

都市雨水排水管渠網の空気圧縮を考慮した
雨水流出解析モデルに関する研究

友 近 榮 治

2013 年 6 月

記号の説明

本論文で用いる記号を以下に示す．この他にも各章において適宜，定義された記号が用いられる．

A : 管渠断面積

A_a : 管渠内の空気相断面積

A_w : 管渠内の水相断面積

a : 常温大気中の空気の音速 $= \sqrt{\gamma p_a / \rho_a}$

B : 開水路流れの水面幅

C_m : 流量係数

c_w : 微小擾乱の伝播速度

D : 管渠内径

F_A : マンホール内の空気が流出入する断面積の総和

F_l : Δx 間の取付管断面積の総和

F_M : マンホール直壁部の断面積

f_D : 空気流の管摩擦係数

g : 重力加速度

h : 水深

h_G : マンホール深さ

h_M : マンホール位置の水深

l_a : 空気の接している壁面の長さ

m : 管渠から取付管を通して大気中に排出される質量流量

m' : 単位長さあたりの管渠から排出される質量流量

n : マニングの粗度係数

p : 管渠内の空気圧

p_0 : 大気圧

p_M : マンホール内の空気圧

ΣQ_{in} : マンホールへの水の総流入量

ΣQ_{out} : マンホールへの水の総流出量

目 次

記号の説明

頁

1 章 序 論	1
1.1 本研究の背景	1
1.2 従来の研究と本研究の位置付け	2
1.3 本研究の目的と本論文の概要	3
参考文献	6
2 章 管渠内空気・雨水の流れの解析モデル	8
2.1 概 説	8
2.2 雨水排水管渠における空気の流れの基礎式	8
2.2.1 取付管を考慮した排水管渠における空気の流れの基礎式	10
(1) 連続の式	10
(2) 運動方程式	13
2.2.2 マンホールにおける空気の流れの基礎式	16
(1) 空気塊の質量保存則	16
(2) 空気の圧縮性の式	19
(3) 全水頭の式	19
2.3 雨水排水管渠とマンホールにおける雨水の流れの基礎式	19
2.3.1 連続の式	19
(1) 雨水排水管渠部	19
(2) マンホール部	22
2.3.2 運動方程式	22
2.4 基礎式の無次元化	24
2.4.1 空気の流れの無次元化	24
(1) 取付管を考慮した雨水排水管渠部	24
(2) マンホール部	27
2.4.2 雨水の流れの無次元化	28
参考文献	31
3 章 流れの基礎式の数値解析法	32
3.1 概 説	32

3.2	特性曲線法（矩形格子）	32
3.2.1	取付管を考慮した排水管渠における空気の流れの解析法	32
(1)	内点断面における計算	35
(2)	上流端断面における計算	43
(3)	下流端断面における計算	46
3.2.2	マンホールにおける空気の流れの解析法	49
3.2.3	単位距離あたりの排気質量流量 m' の取り扱い	53
3.2.4	雨水排水管渠における雨水の流れの解析法	54
(1)	内点断面における計算	55
(2)	上流端断面における計算	62
(3)	下流端断面における計算	63
	参考文献	65
4 章	空気・雨水流れモデルの模型実験	66
4.1	概 説	66
4.2	雨水排水管渠模型概要	66
4.3	実験方法	69
4.3.1	取付管を有する模型実験	69
4.3.2	マンホールを有する模型実験	69
4.4	数値解析	76
4.5	実験結果と数値解析結果の比較と考察	79
4.5.1	取付管を有する排水管渠模型実験	79
4.5.2	マンホールを有する排水管渠模型実験	104
	参考文献	128
5 章	結 論	129
	謝 辞	

1 章 序 論

1.1 本研究の背景

近年，ゲリラ豪雨と呼ばれる局地的集中豪雨や，台風上陸回数の増加による短期間での降水量が増加しており，大雨発生回数の変化は過去 30 年間で，1 時間降水量 50 ミリ以上の年間観測回数の増加率は 10 年当り 20 回の増加率にもなっている¹⁾．このため，各地の下水道流域では，計画を上回る雨水が下水道管渠内に流入し，マンホール蓋浮上・飛散現象や，それに伴う 2 次被害が多発している．この際，路面が冠水していることが多く，マンホール位置を確認できないことから，通行者に対して極めて危険な状況となっている．日本国内では，東京都で 1991 年から 2003 年度の 13 年間に報告されたマンホール蓋浮上・飛散実績は 308 件にも上っており，1999 年からの 5 カ年を平均すると約 40 件/年であった²⁾．また，2000 年 9 月の東海豪雨では，マンホール蓋が約 70 箇所で飛散している．人的被害としては，1985 年に東京都内で 1 人が死亡，1998 年 9 月 24～25 日には高知県で豪雨によりマンホール蓋が外れ 2 人が亡くなっている³⁾．そして，高知県での被害が契機となって，1993 年 3 月に「下水道マンホール安全対策の手引き(案)」が建設省（現国土交通省）でとりまとめられている．海外でも，中国の湖南省長沙市内で 2013 年 3 月 22 日の豪雨時に女子大生がマンホールに落ち，行方不明となっている．

マンホール蓋浮上・飛散の現象は，豪雨時に雨水が大量に下水管渠へ流入し，①ポンプ場におけるゲートの急閉操作やポンプの急停止等による衝撃圧，②背水や跳水の移動による急激な水位上昇などの水理現象が生じ，マンホールや下水管渠内の流体圧（空気圧および水圧）が増大することで発生する⁴⁾．

上述した豪雨被害の軽減および解決のためには，下水管渠内の空気・雨水の流れの，より精度の高い解析（シミュレーションモデル）が必要となっている．

1.2 従来の研究と本研究の位置付け

本研究は、取付管やマンホールを含んだ都市雨水排水管路網における空気塊を含んだ雨水流出解析の分野に属し、管路は一次元流れとみなしている。

都市下水道流域の雨水流出解析モデルに関する研究は、都市化現象が急速に進展してきた1960年代から、地表面の雨水の流れをkinematic wave流れとして取り扱うkinematic waveモデル(雨水流法)⁵⁾、また、下水道管路の流出を線形kinematic wave流れとして取り扱うChicago hydrograph法⁶⁾、非線形kinematic wave流れとして取り扱うkinematic waveモデル(雨水流法)^{7~9)}などの都市雨水流出モデルが提案され始めているが、下水道管路の流れはopen-channel(開水路流れ)として取り扱っている。1980年代に入り、都市化がさらに進展するようになると、計画を上回る大量の雨水が流出するようになり、下水道管路網ではsurcharged flow(満管流れ)がしばしば発生するようになってきたため、下水道管路の雨水の流れをdynamic wave流れとして取り扱い、open-channel flowとsurcharged flowの両流れをシミュレートできる雨水流出モデルが提案されるようになってきた¹⁰⁾。

さらに、2000年代に入ると、前節で述べたように、世界の各地の都市下水道流域で、気候の温暖化の進行とも相まって、豪雨が頻発するようになるとともに都市の雨水流出も激しさを増し、マンホールからの氾濫・溢水による大規模な地表面浸水氾濫流が発生するようになってきたため、この複雑な流れの様相を呈する地表面浸水氾濫流を、dynamic wave 流れとして取り扱い、下水道管路の流れと組み合わせてシミュレートできる雨水流出モデル^{10), 13), 14)}が提案されるようになってきた。

近年では、豪雨時、下水道管路網の激しい流れが空気を圧縮してマンホール蓋を飛散させる雨水流出現象がしばしば発生するようになっており、こうした豪雨時の空気圧縮を伴う激しい雨水の流れをシミュレートできる都市下水道流域の雨水流出モデルが必要と

されるようになってきているが、現在までのところ、そうした雨水流出モデルは未だ開発されていない。

管渠内の空気圧を考慮しない開水路流れと満管流れが混在する流れについては、両境界点の前後でそれぞれの基礎式を使い分ける方法¹¹⁾や、管頂に微小幅の仮想スロットを取り付けることにより開水路流れと満管（圧力）流れの両流れを開水路流れの基礎式で表現し、一貫して開水路流れとして解くモデル（プライスマン・スロットモデル）¹²⁾があり、近年、後者は SWMM¹⁰⁾、MOUSE¹³⁾、InfoWorks¹⁴⁾等に広く採用されている。

上述のプライスマン・スロットの手法を応用したモデル（以下、スロットモデルと呼ぶ）は、スロットの水面上の空気圧は大気圧としているため、管渠内の空気圧が大気圧以上または負圧になることは考慮されていない。

また、管渠部分が満管状態でのマンホール内の水位上昇および水位上昇に伴う空気圧縮については、これまでに多くの研究^{15)、16)}がなされている。しかし、管渠部分における空気の挙動については、まだ十分に解明されていない。

そこで本研究では、管渠内における空気の移動と空気圧の時空間変化を解析することができる都市雨水管渠の流出解析モデルを提案し検証することとした。

1.3 本研究の目的と本論文の概要

マンホール蓋の飛散や空気圧縮を伴う代表的な都市の雨水流出は以下のようなものである。①雨水排水管渠網の下流端において、ポンプ場のゲートを閉めることにより開水路流れから圧力流れへと流れの遷移が発生する、②この遷移は管渠網内で急速に上流へ進展する、③その運動に沿って管渠網内が空気で占められて空間が減少し、空気圧は増大する、④遷移のさらなる上流への伝播に伴って、空気はさらに圧縮されて空気圧はさらに増大する、⑤管渠上流へ空気が移

動している間、空気の一部は取付管やマンホール蓋の小さな排気孔から排出される、⑥マンホール内の空気圧力がマンホール蓋の抵抗力（マンホール蓋とマンホール枠との間の摩擦力）を超えたとき、圧力により蓋は飛散する。

従来の管渠内空気圧の算定方法¹⁷⁾では、まず流出解析モデルを用いて雨水流出量を算定し、そこから得られる水位変動の結果から空気圧縮の計算を行っている。この解析の過程でまず問題であると考えられるのが管渠内水位の算定である。この際に管渠内空気圧を大気圧と等しいとしているが、マンホール蓋の飛散が発生するような大量の雨水が下水管渠内に流入すると、管渠内の空気圧は急激に上昇し、管渠に流入する流量にも影響があると考えられる。

また、従来の計算の過程で最も大きな問題が生じると考えられるのは、管渠内空気圧を算定する際、ゲート操作後の同時刻において、管渠システム内の各マンホールおよび管渠内の空気圧は均一であるとして計算を行っている点である。実際の管渠システムでは、上流側のマンホールと下流側のマンホールが 2～3 km 離れている場合もあり、そのような場合にはゲート付近で発生する段波の伝播速度やマンホール部分での空気塊の貯留効果などから、下流と上流では同時刻において管渠システム内の空気圧に違いが生じることが考えられる。

本研究では、上述のような問題点を解消するために、

- (1)空気の移動と空気圧の時空間変化を考慮した都市雨水排水管渠網の解析モデルとその数値解析法を提案する、
- (2)数値解析結果と模型実験結果を比較することにより解析モデルの有効性を検証する、

ことを目的としている。

本論文は 5 章で構成されている。以下に各章の概要を述べる。

1 章の「序論」では、本研究の背景を示し、管渠部分における空気の挙動（流れ、圧縮）を考慮した都市雨水排水管渠網の従来の研究と問題点について説明し、本研究との関連を示すとともに、本研

究の目的を示した。

2章の「管渠内空気・雨水の流れの解析モデル」では、はじめに、都市雨水排水管渠網内に多数存在し、それらを通じて空気の排気・吸気が行われるところの、これまで全く考慮されることのなかったマンホールと取付管を組み入れ、空気の流れを等エントロピー流れと考えて、空気の流れの基礎式（連続式および運動方程式）を導出している。次いで、雨水排水管渠網における空気流れの空気圧の場所的変動を考慮して、空気・水二層流の水の流れの基礎式（連続式および運動方程式）を導出している。なお、これら基礎式は、雨水排水管渠網内の雨水と空気の実際の流れを厳密に記述できているものとしては、都市雨水流出の分野では初めて、導出されたものである。

3章の「流れの基礎式の数値解析法」では、雨水と空気の流れの基礎式を、厳密に数値解析するため、特性曲線法（時空間間隔の矩形格子）を採用し、その数値解析のための数値計算式（差分式）を展開している。雨水と空気の二層流を、特性曲線法を用いて厳密にかつ精度高くまた安定的に数値解析しようとすることは、こうした分野の雨水流出解析法では、はじめての試みでもある。

4章の「空気・雨水の流れモデルの模型実験」では、実験装置は排水管渠全長 10.9m、管渠直径 10cm、勾配 2/1000 で、2箇所にと付管（内径は 1cm）を設けた模型と、2箇所にマンホール（内径は 15cm）設けた模型を使用している。各々、管渠内の流れの圧力と水深の時空間変化を計測し、第2章で提案した解析モデルの有効性を検証するため実験結果と数値解析結果の比較を行い、本流出解析モデル（すなわち、それら流れの基礎式およびその数値計算式）が高い適合性と妥当性をもつものであることを明らかにしている。

第5章の「結論」では、都市雨水排水管渠網における実際の流れを正確に記述している、雨水排水管渠内における空気・雨水の流れの基礎式（連続の式と運動方程式）を導出するとともに、空気の移動と空気圧の時空間変化を考慮した都市雨水排水管渠の解析モデルとその数値解析法を提案することができたとしている。

参考文献

- 1) 気象庁：気候変動監視レポート 2011，気象庁，p. 27，2011.
- 2) 東京都下水道局：東京都下水道局技術調査年報 2004，東京都，pp. 72-73，2004.
- 3) 田中 博：下水道用マンホール蓋の技術革新，JASCOM，No. 36，p. 46，2012.
- 4) (社)日本下水道協会：下水道用マンホール安全対策の手引き(案)，(社)日本下水道協会，pp. 8-12，16-21，1999.
- 5) 門屋 睦：流出解析手法(その 6)，農業土木学会誌，第 48 巻，第 6 号，pp. 37～43，1980.
- 6) Tholin, A. L. and C. J. Keifer: Hydrology of urban runoff, Trans. ASCE, Vol. 125, pp. 1308-1379, 1960.
- 7) Sueishi, T.: Run-off estimation in storm sewer system using equivalent roughness, Proc. JSCE, No. 91, pp. 41-54, 1963.
- 8) Yen, B. C. and A. S. Sevuk: Design of storm sewer networks, J. Environ. Eng. Div., Proc. ASCE, Vol. 101, No. EE4, pp. 535-553, 1975.
- 9) Toyokuni, E. and M. Watanabe: Urban catchment modeling for storm water runoff, Proc. Fort Collins Third International Hydrology Symposium, pp. 423-440, Colorado, USA, 1977.
- 10) Wayne C. Huber et al.: Storm Water Management Model, Version 4; User's Manual, U.S.EPA/ 600/3-88/001a, 1988.
- 11) Song, C. C. S. et al.: Transient Mixed-Flow Models for Storm Sewers, J. Hyd. Eng, ASCE, Vol. 109, Issue. 11, pp. 1487-1504, 1983.
- 12) Chaudhry, M. H.: Applied Hydraulic Transients, VNR Company, pp. 423-448, 1979.
- 13) Danish Hydraulic Institute: MOUSE, An Integrated modeling package for urban drainage and sewer systems, 1996.

- 14) Price, R. K. : Product Brief and Technical Notes for WALLRUS and SPIDA Hydraulics Research Limited, Wallingford OX10 8BA, UK, 1991.
- 15) 渡辺 政広 他：マンホール部に空気塊を封入する下水道管渠網の圧力流れ，水工学論文集，第44巻，pp. 551-556，2000.
- 16) 渡辺 政広 他：マンホール蓋飛散の水理解析モデルと水理模型実験，水工学論文集，第45巻，pp. 907-911，2001.
- 17) (社)日本下水道協会：下水道用マンホール安全対策の手引き(案)，(社)日本下水道協会，pp. 44-54，1999.

2 章 管渠内空気・雨水の流れの解析モデル

2.1 概 説

都市雨水排水管渠システムは，通常，管渠部と，管渠網内に多数存在しそれらを通じて空気の排気・吸気が行われるところの，取付管とマンホール部から構成される．1 章で述べたように，雨水排水管渠部分が満管の状態における研究は，これまでも多く行われてきた．しかし，雨水排水管渠部とマンホール部に空気塊が存在し，それが圧縮されることに伴う空気圧増加により蓋の浮上・飛散に繋がる場合も多い．また，上述した取付管とマンホール部も全く考慮されていない．そのため，このメカニズムについては，取付管とマンホール部を含めた研究を進めていく必要がある．

まず，このメカニズムについての研究を進めていくうえで，雨水排水管渠内における空気・水の二層流れを考えなければならない．しかし，空気・水が存在する気液二層流は，二層の境界面での相互作用や流れ様式の複雑さから，あまり研究がなされていない^{1), 2)}．

そこで，今後二層状態での研究を進めるため，ここでは，取付管とマンホール部を組み入れた，気層（空気）と雨水の各基礎式を導出していく．

2.2 雨水排水管渠における空気の流れの基礎式^{3), 4)}

取付管およびマンホールを含む雨水排水渠内の空気の流れは，等エントロピー流れとする．すなわち，断熱かつ可逆（reversible）な流れであることから，圧力と密度の関係式は，図 2-1 および次式で示される⁵⁾．

$$\left(\frac{p_1}{p_2}\right) = \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^\gamma \dots\dots\dots (2.1)$$

ここに， p ：空気圧， ρ ：空気の密度， γ ：空気の比熱比 $=1.4$ ．

また，空気の流れの基礎式は，取付管を考慮した雨水排水管路部とマンホール部の各々について導出する．

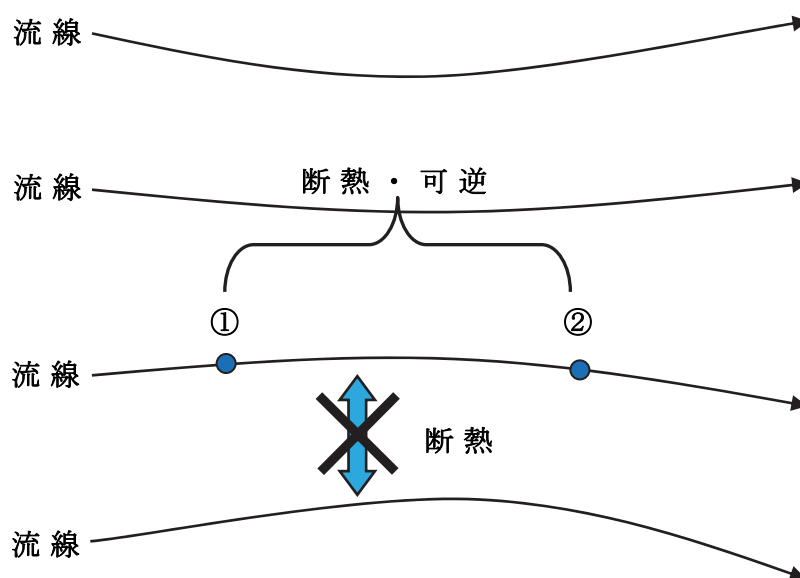


図 2-1 等エントロピー変化

2.2.1 取付管を考慮した排水管渠における空気の流れの基礎式

(1) 連続の式

図 2-2 のような断面 1-2 に囲まれた圧縮性流体(空気)の微小要素の流れに質量保存則を適用する．なお， x 軸を微小要素の流れ方向にとる．流れる空気の断面積は時間とともに変化するとして質量保存則より連続の式を導出する．なお， Δx 間の取付管からの排気質量流量を m とする．

断面 1 での空気断面積を A_a ，風速を V_a とする．

Δt 時間に流入する質量 m_{in} は，次のように示される．

$$m_{in} = \frac{1}{2} \rho_a V_a A_a \Delta t \dots\dots\dots (2.2)$$

また， Δt 時間に流出する質量 m_{out} は，次のように示される．

$$m_{out} = \left\{ \rho_a V_a A_a + \frac{\partial(\rho_a V_a A_a)}{\partial x} \Delta x \right\} \Delta t \dots\dots\dots (2.3)$$

Δt 時間での正味の流入質量は，

$$m_{in} - m_{out} = - \left\{ \frac{\partial(\rho_a A_a \Delta x)}{\partial x} + m \right\} \Delta t \dots\dots\dots (2.4)$$

$$\left. \begin{aligned} & ; \quad m = \rho_a C_m F_l \left(\frac{p_0}{p_a} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{p_a}{\rho_a} \left\{ 1 - \left(\frac{p_0}{p_a} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right\}} \quad (\text{排気時}) \\ & ; \quad m = -\rho_0 C_m F_l \left(\frac{p_a}{p_0} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{p_0}{\rho_0} \left\{ 1 - \left(\frac{p_a}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right\}} \quad (\text{吸気時}) \end{aligned} \right\} \dots\dots (2.5)$$

したがって，質量保存則より，

$$\begin{aligned} & -\rho_a V_a A_a \Delta t + \left\{ \rho_a V_a A_a + \frac{\partial(\rho_a V_a A_a)}{\partial x} \Delta x \right\} \Delta t = - \left\{ \frac{\partial(\rho_a A_a \Delta x)}{\partial t} + m \right\} \Delta t \\ & -\rho_a V_a A_a \Delta t + \rho_a V_a A_a \Delta t + \frac{\partial(\rho_a V_a A_a)}{\partial x} \Delta x \Delta t = - \frac{\partial(\rho_a A_a)}{\partial t} \Delta x \Delta t - m \Delta t \end{aligned}$$

$$\frac{\partial(\rho_a V_a A_a)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho_a A_a)}{\partial t} + \frac{m}{\Delta x} = 0$$

以上より，連続の式は以下のように示される．

$$A_a \frac{\partial \rho_a}{\partial t} + \rho_a \frac{\partial A_a}{\partial t} + \rho_a A_a \frac{\partial V_a}{\partial x} + \rho_a V_a \frac{\partial A_a}{\partial x} + A_a V_a \frac{\partial \rho_a}{\partial x} + m' = 0 \cdots \cdots (2.6)$$

$$; m' = \frac{m}{\Delta x} \cdots \cdots (2.7)$$

ここに， C_m ：流量係数， F_l ： Δx 間の取付管断面積の総和， ρ_a ：空気の密度， Δx ：微小距離， Δt ：微小時間， m' ：単位距離あたりの排气質量流量， x ：距離， t ：時間．

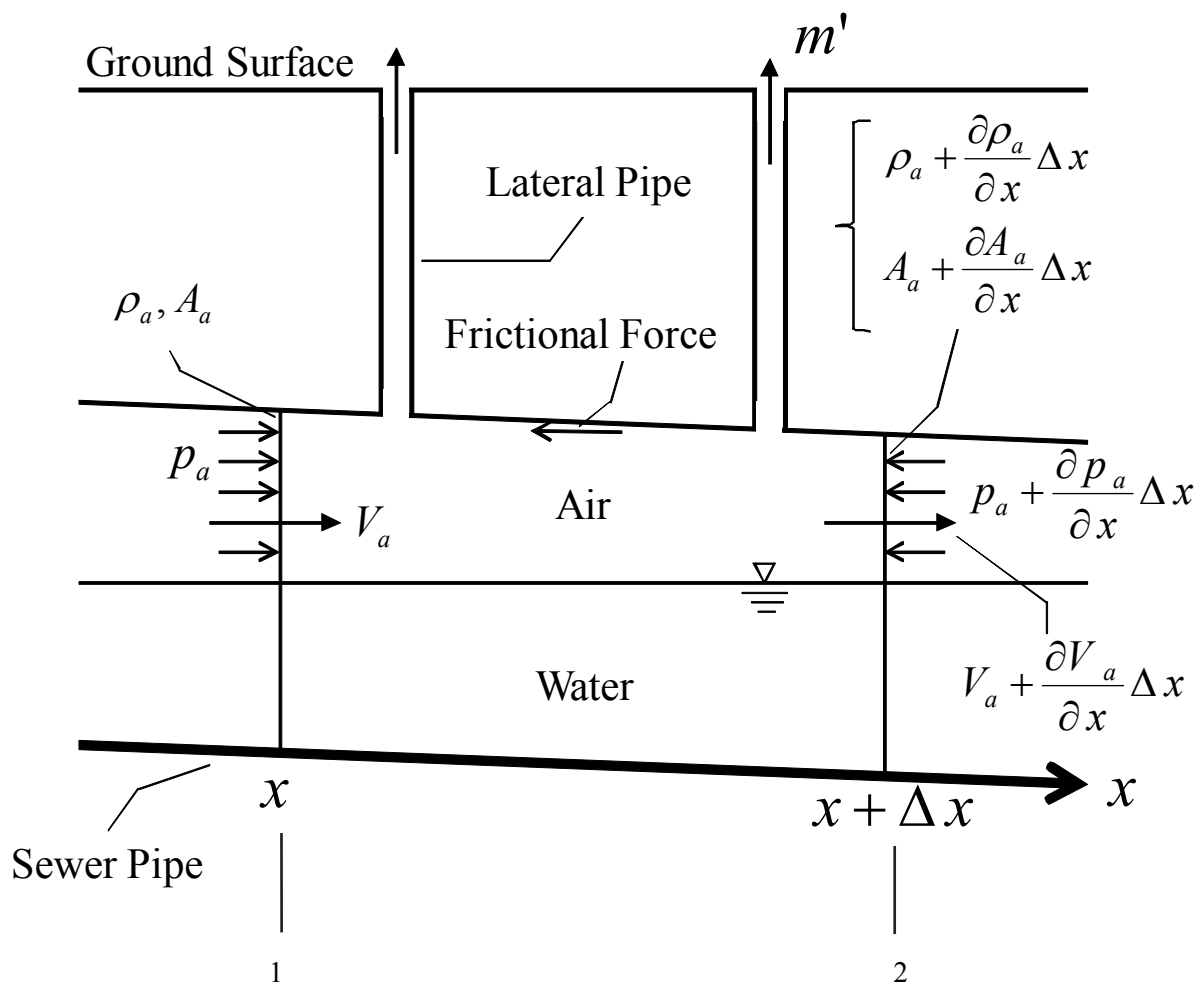


図 2-2 取付管を考慮した排水管渠の空気検査体積概念図

(2) 運動方程式

運動量の定理より運動方程式を導出する過程を以下に示す．このとき、空気の流れは非定常流れとして取り扱う．

図 2-2 のような検査体積内の運動量の変化量は検査体積内で働く力による力積の総和に等しいと考える．ここで、検査体積内に働く力とは、①空気圧による力、②水が空気に及ぼす力、③壁面摩擦力、④重力による力である．

① 空気圧による力

$t=t$ のとき、 p_a を圧力とすると、流れ方向に作用する正味の空気圧力は、

$$p_a A_a - \left\{ p_a A_a + \frac{\partial(p_a A_a)}{\partial x} \Delta x \right\} = - \frac{\partial(p_a A_a)}{\partial x} \Delta x \dots\dots\dots (2.8)$$

② 水が空気に及ぼす力

$t=t$ のとき、水が空気に及ぼす力の流れ方向成分は、

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(p_a + p_a + \frac{\partial p_a}{\partial x} \Delta x \right) \left(A_a + \frac{\partial A_a}{\partial x} \Delta x - A_a \right) = \left(p_a + \frac{1}{2} \frac{\partial p_a}{\partial x} \Delta x \right) \frac{\partial A_a}{\partial x} \Delta x \\ & = p_a \frac{\partial A_a}{\partial x} \Delta x \dots\dots\dots (2.9) \end{aligned}$$

③ 壁面摩擦力

$t=t$ のとき、壁面摩擦力は、

$$-\frac{1}{2} \left[\tau_a s + \left\{ \tau_a s + \frac{\partial(\tau_a s)}{\partial x} \Delta x \right\} \right] \Delta x = - \left\{ \tau_a s + \frac{1}{2} \frac{\partial(\tau_a s)}{\partial x} \Delta x \right\} \Delta x = -\tau_a s \Delta x \dots\dots (2.10)$$

ここに、 τ_a ：壁面摩擦応力、 s ：潤辺．

ここで， $\tau_a \propto \rho V^2$ より，次式を得る．

$$\frac{\tau_a s}{\rho_a A_a} = f_D \frac{1}{4R_a} \frac{1}{2} |V_a| V_a \dots\dots\dots (2.11)$$

なお，Reynolds 数 (R_e) の算出等に使用する空気断面の径深 R_a は，次式より求める．

$$R_a = \frac{4A_a}{l_a + B} \dots\dots\dots (2.12)$$

ここに， l_a ：空気の接している壁面の長さ， B ：空気の接している水面の幅．

摩擦損失係数は，水面の粗さを管壁と同等とみなすと，次式で示される⁶⁾．

$$f_D = \frac{64}{R_e} \quad (\text{層流：} R_e \leq 3000) \dots\dots\dots (2.13)$$

$$f_D = 4 \times 0.0625 \left/ \left[\log_{10} \left(\frac{\varepsilon}{3.7 \times 4R_a} + \frac{5.74}{R_e^{0.9}} \right) \right] \right|^2$$

(乱流： $R_e > 3000$) $\dots\dots\dots (2.14)$

$$; R_e = \frac{4 \times R_a V_a}{\nu_a} \dots\dots\dots (2.15)$$

ここに， f_D ：ダルシー・ワイスバッハの摩擦損失係数， ε ：管渠壁面の表面粗さ（絶対粗度）， ν_a ：空気の動粘性係数．

④ 重力による力

$t=t$ のとき，重力の流れ方向成分は，

$$\frac{1}{2} \left\{ \rho_a A_a + \left(\rho_a A_a + \frac{\partial(\rho_a A_a)}{\partial x} \Delta x \right) \right\} \Delta x g \sin \theta$$

$$= \left\{ \rho_a A_a + \frac{1}{2} \frac{\partial(\rho_a A_a)}{\partial x} \Delta x \right\} \Delta x g \sin \theta = \rho_a A_a g \Delta x \sin \theta \dots \dots \dots (2.16)$$

ここに， g ：重力加速度， $\sin \theta$ ：水面勾配．

⑤ 運動量の変化量

$t=t$ から $t=t+\Delta t$ の Δt 間の運動量変化量は，

$$\begin{aligned} -\rho_a V_a^2 A_a + \left\{ \rho_a V_a^2 A_a + \frac{\partial(\rho_a V_a^2 A_a)}{\partial x} \Delta x \right\} + \frac{\partial(\rho_a V_a A_a \Delta x)}{\partial t} \\ = \frac{\partial(\rho_a V_a A_a \Delta x)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_a V_a^2 A_a)}{\partial x} \Delta x \dots \dots (2.17) \end{aligned}$$

ここで，式(2.17)=式(2.8)+ 式(2.9)+ 式(2.15)+ 式(2.16)より，

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho_a V_a A_a \Delta x)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_a V_a^2 A_a)}{\partial x} \Delta x \\ = -\frac{\partial(p_a A_a)}{\partial x} \Delta x + p_a \frac{\partial A_a}{\partial x} \Delta x - \tau_a s \Delta x + \rho_a A_a g \sin \theta \Delta x \\ \frac{\partial(\rho_a V_a^2 A_a)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho_a V_a A_a)}{\partial t} = -\frac{\partial(p_a A_a)}{\partial x} + p_a \frac{\partial A_a}{\partial x} - \tau_a s + \rho_a A_a g \sin \theta \\ \rho_a V_a A_a \frac{\partial V_a}{\partial x} + V_a \frac{\partial(\rho_a V_a A_a)}{\partial x} + \rho_a A_a \frac{\partial V_a}{\partial t} + V_a \frac{\partial(\rho_a A_a)}{\partial t} \\ = -A_a \frac{\partial p_a}{\partial x} - p_a \frac{\partial A_a}{\partial x} + p_a \frac{\partial A_a}{\partial x} - \tau_a s + \rho_a A_a g \sin \theta \\ \rho_a V_a A_a \frac{\partial V_a}{\partial x} + \rho_a A_a \frac{\partial V_a}{\partial t} + V_a \left\{ \frac{\partial(\rho_a V_a A_a)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho_a A_a)}{\partial t} \right\} \\ = -A_a \frac{\partial p_a}{\partial x} - \tau_a s + \rho_a A_a g \sin \theta \dots \dots \dots (2.18) \end{aligned}$$

また，連続の式(2.6)を変形すると，

$$\frac{\partial(\rho_a V_a A_a)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho_a A_a)}{\partial t} = -m' \dots \dots \dots (2.19)$$

式 (2.19) を式 (2.18) に代入すると,

$$\rho_a V_a A_a \frac{\partial V_a}{\partial x} + \rho_a A_a \frac{\partial V_a}{\partial t} - V_a m' = -A_a \frac{\partial p_a}{\partial x} - \tau_a s + \rho_a A_a g \sin \theta$$

$$\frac{\partial V_a}{\partial t} + V_a \frac{\partial V_a}{\partial x} + \frac{1}{\rho_a} \frac{\partial p_a}{\partial x} + \frac{\tau_a s}{\rho_a A_a} - \frac{m' V_a}{\rho_a A_a} - g \sin \theta = 0 \dots \dots \dots (2.20)$$

上式に式 (2.11) を代入し, 重力が空気に与える力はごく微小であることから重力項を省略すると, 運動方程式は次式で示される.

$$\frac{\partial V_a}{\partial t} + V_a \frac{\partial V_a}{\partial x} + \frac{1}{\rho_a} \frac{\partial p_a}{\partial x} + f_D \frac{1}{4R_a} \frac{1}{2} |V_a| V_a - \frac{m' V_a}{\rho_a A_a} = 0 \dots \dots \dots (2.21)$$

ここに, V_a : 風速, ρ_a : 空気の密度, A_a : 空気断面積, m' : 単位距離あたりの排気質量流量, f_D : ダルシー・ワイスバッハの摩擦損失係数, x : 距離, t : 時間.

2.2.2 マンホールにおける空気の流れの基礎式

マンホール地点における圧力流れ (連続の式および運動方程式) は, 空気の質量保存則, 空気の圧縮性の式と, 全水頭の式により次式のように表される. このとき, 図 2-3 に示すように, 水は非圧縮性, 空気は圧縮性で, 水および空気はマンホール蓋 (飛散しないように固定されている) の空気孔とマンホールの吸排気管を通じて流出入するものとする.

(1) 空気塊の質量保存則

$$F_M \frac{d}{dt} \left\{ \rho_M (h_G - h_M) \right\} = A_{au} \rho_M V_{au} - A_{ad} \rho_M V_{ad} - m_M \dots \dots \dots (2.22)$$

$$; m_M = \rho_M C_m F_A \left(\frac{p_0}{p_M} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{p_M}{\rho_M} \left\{ 1 - \left(\frac{p_0}{p_M} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right\}} \quad (\text{排気時})$$

$$; \quad m_M = -\rho_0 C_m F_A \left(\frac{p_M}{p_0} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{p_0}{\rho_0} \left\{ 1 - \left(\frac{p_M}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right\}} \quad (\text{吸気時})$$

ここに， C_m ：流量係数， F_M ：マンホールの断面積， h_G ：マンホール深， h_M ：マンホール位置の水深， ρ_M ：マンホール内の空気密度， p_M ：マンホール内空気圧， ρ_0 ：大気密度， p_0 ：大気圧， A_{au} ：流入管渠の下流端の空気断面積， A_{ad} ：流出管渠の上流端の空気断面積， V_{au} ：流入管渠の下流端の風速， V_{ad} ：流出管渠の上流端の風速， m_M ：吸排気孔を通じて流出入する空気の質量流量， F_A ：マンホール内の空気が流出入する断面積の総和， x ：距離， t ：時間．

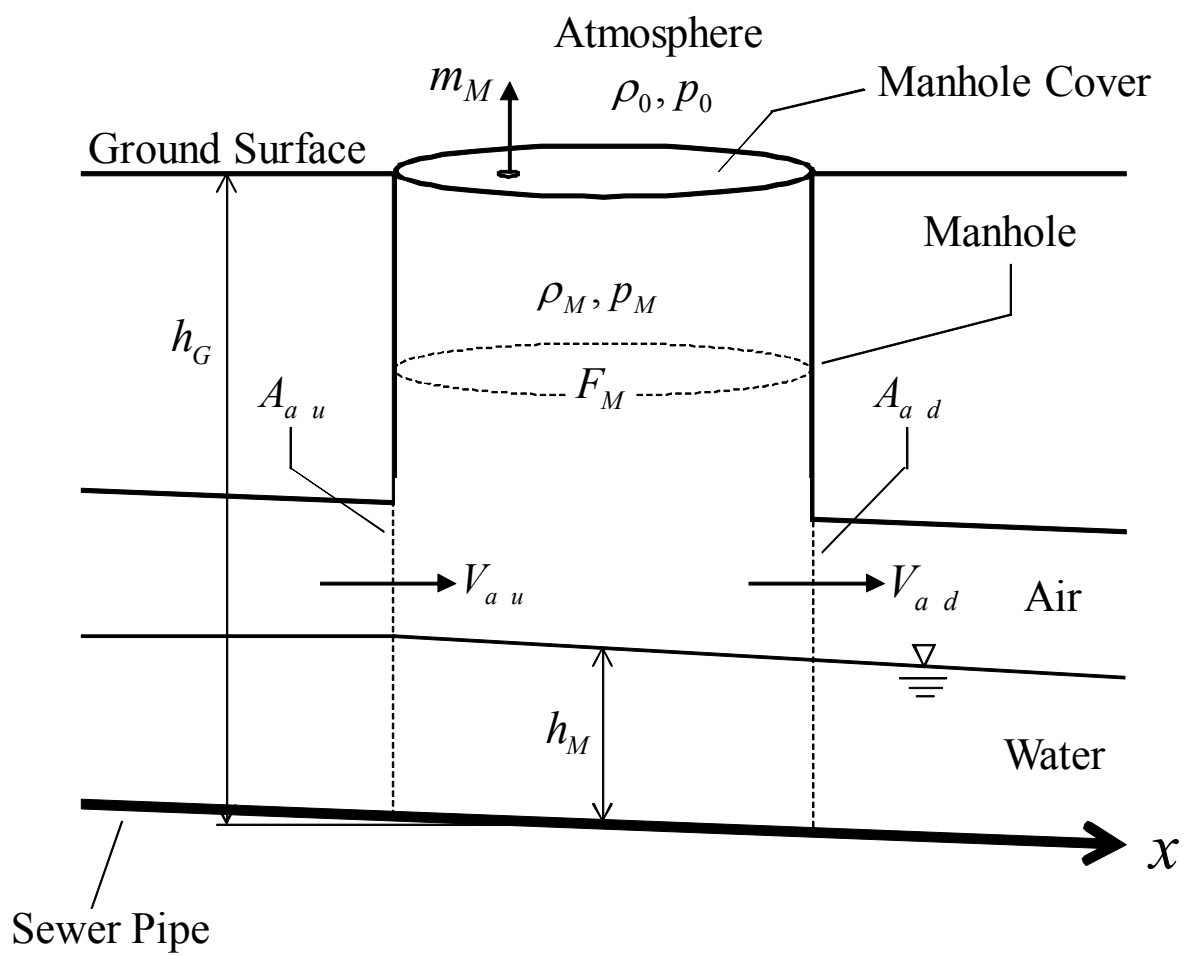


図 2-3 マンホール内の空気の流れ図

(2) 空気の圧縮性の式

空気の流れは，等エントロピー流れとする．

$$\frac{p_M}{\rho_M^\gamma} = \frac{p_0}{\rho_0^\gamma} \dots\dots\dots (2.23)$$

ここに， γ : 空気の比熱比 = 1.4 ．

(3) 全水頭の式

$$h_T = h_M + h_a \dots\dots\dots (2.24)$$

$$; h_a = \frac{p_M - p_0}{\rho_w g}$$

ここに， h_T : 全水頭， h_a : 圧力水頭， ρ_w : 水の密度， g : 重力加速度．

2.3 雨水排水管渠とマンホールにおける雨水の流れの基礎式

2.3.1 連続の式

(1) 雨水排水管渠部

図 2-4 に示すような断面 1-2 に囲まれた圧縮性流体(雨水)の微小要素の流れに質量保存則を適用する．また， x 軸を微小要素の流れ方向にとる．このような場合における排水管渠内の雨水の流れを考える．

本来なら横流入はあるものの，全てマンホール部分に流入するとし，ここでは横流入は $q = 0$ とする．質量保存則より，

Δt 時間に流入する質量 m_{in} は，

$$m_{in} = \rho_w V_w A_w \Delta t$$

Δt 時間に出ていく質量 m_{out} は，

$$m_{out} = \left\{ \rho_w V_w A_w + \frac{\partial(\rho_w V_w A_w)}{\partial x} \Delta x \right\} \Delta t$$

Δt 時間での正味の流入質量は，

$$m_{in} - m_{out} = \frac{\partial(\rho_w A_w \Delta x)}{\partial t} \Delta t$$

質量保存則より，

$$\rho_w V_w A_w \Delta t - \left\{ \rho_w V_w A_w + \frac{\partial(\rho_w V_w A_w)}{\partial x} \Delta x \right\} \Delta t = \frac{\partial(\rho_w A_w \Delta x)}{\partial t} \Delta t$$

$$\rho_w V_w A_w \Delta t - \rho_w V_w A_w \Delta t - \rho_w \frac{\partial(V_w A_w)}{\partial x} \Delta x \Delta t = \rho_w \frac{\partial A_w}{\partial t} \Delta x \Delta t$$

$$\frac{\partial A_w}{\partial t} + V_w \frac{\partial A_w}{\partial x} + A_w \frac{\partial V_w}{\partial x} = 0$$

$$B \frac{\partial h}{\partial t} + V_w B \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{B}{g} \left(g \frac{A_w}{B} \right) \frac{\partial V_w}{\partial x} = 0$$

以上より，連続の式は以下のように示される．

$$\frac{\partial h}{\partial t} + V_w \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{c_w^2}{g} \frac{\partial V_w}{\partial x} = 0 \dots\dots\dots (2.25)$$

$$; \quad c_w = \sqrt{g \frac{A_w}{B}}$$

ここで，図 2-5 より，流水断面積および径深は次式により求める．

$$A_w = \frac{D^2}{8} (\varphi - \sin \varphi) \dots\dots\dots (2.26)$$

$$R_w = D \frac{\varphi - \sin \varphi}{4\varphi} \dots\dots\dots (2.27)$$

$$; \quad \varphi = 2 \cos^{-1} \left(1 - 2 \frac{h}{D} \right)$$

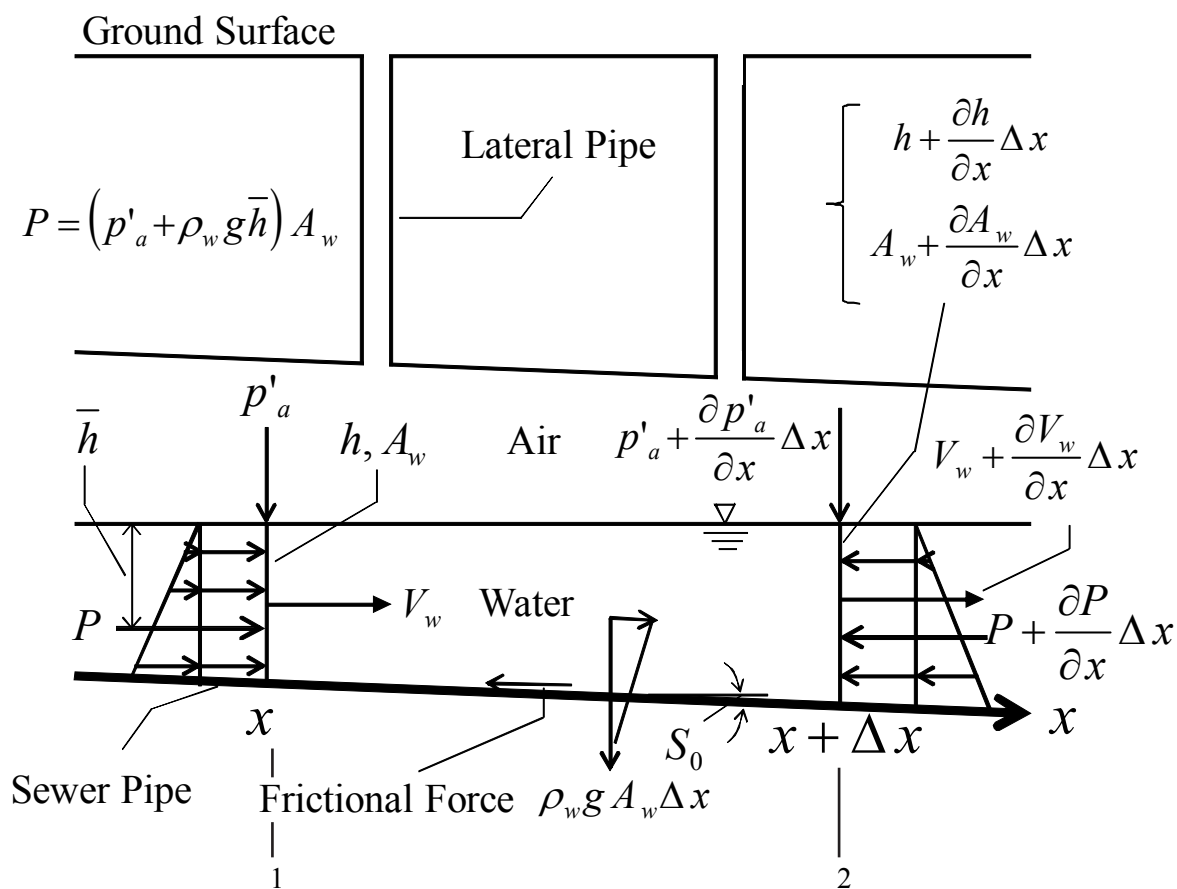


図 2-4 雨水排水管渠の雨水検査体積概念図

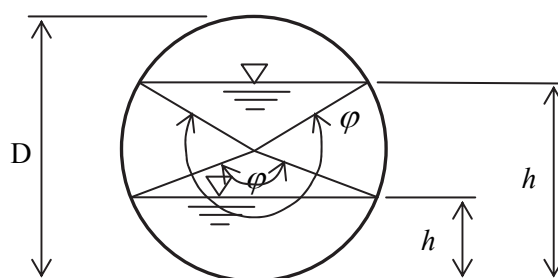


図 2-5 雨水排水管渠の流水断面

(2) マンホール部

① 圧力流れ時

$$F_M \frac{dh_M}{dt} = \sum Q_{in} - \sum Q_{out} \cdots \cdots \cdots (2.28)$$

② 開水路流れ時

$$0 = \sum Q_{in} - \sum Q_{out} \cdots \cdots \cdots (2.29)$$

ここに， F_M ：マンホールの断面積， h_M ：マンホール位置の水深， t ：時間， $\sum Q_{in}$ ：マンホールへの総流入流量， $\sum Q_{out}$ ：マンホールからの総流出流量．

2.3.2 運動方程式

運動量の定理を適用し，運動方程式を導出する過程を以下に示す．

図 2-4 に示される検査体積内の運動量の変化量は，検査体積に働く力による力積の総和に等しいと考える．ここで，検査体積に働く力とは，①水圧による力，②空気が水に及ぼす力，③壁面摩擦力，④重力による力である．なお，空気と水面の摩擦力はごく微小であることから省略する．

① 水圧による力

$t=t$ のとき，流れ方向に作用する正味の水圧は，

$$\rho_w g \bar{h} A_w - \left(\rho_w g \bar{h} A_w + \frac{\partial(\rho_w g \bar{h} A_w)}{\partial x} \Delta x \right) = - \frac{\partial(\rho_w g \bar{h} A_w)}{\partial x} \Delta x = - \rho_w g \frac{\partial \bar{h}}{\partial x} A_w \Delta x$$

..... (2.30)

② 空 気 が 水 に 及 ぼ す 力

$t=t$ のとき， $p_a - p_0 = p'_a$ とすると， 流れ方向に作用する正味の圧力は，

$$p'_a A_w - \left(p'_a A_w + \frac{\partial(p'_a A_w)}{\partial x} \Delta x \right) = - \frac{\partial(p'_a A_w)}{\partial x} \Delta x = - \frac{\partial p'_a}{\partial x} A_w \Delta x \dots (2.31)$$

③ 壁 面 摩 擦 力

$t=t$ のとき， 流れ方向に作用する正味の力は，

$$-\tau_0 s_w \Delta x = -\rho_w g R_w S_f s_w \Delta x = -\rho_w g A_w S_f \Delta x \dots \dots \dots (2.32)$$

④ 重 力 に よ る 力

$t=t$ のとき， 重力の流れ方向成分は，

$$\rho_w A_w g \Delta x \sin \theta \dots \dots \dots (2.33)$$

⑤ 運 動 量 の 変 化 量

$t=t$ から $t=t+\Delta t$ の Δt 間の運動量変化量は，

$$\begin{aligned} & -\rho_w A_w V_w^2 + \left\{ \rho_w A_w V_w^2 + \frac{\partial(\rho_w A_w V_w^2)}{\partial x} \Delta x \right\} + \frac{\partial(\rho_w A_w V_w \Delta x)}{\partial t} \\ & = \frac{\partial(\rho_w A_w V_w \Delta x)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_w A_w V_w^2)}{\partial x} \Delta x \dots \dots \dots (2.34) \end{aligned}$$

式 (2.34) = 式 (2.30) + 式 (2.31) + 式 (2.32) + 式 (2.33) より，

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(\rho_w A_w V_w \Delta x)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_w A_w V_w^2)}{\partial x} \Delta x \\ & = -\rho_w g \frac{\partial h}{\partial x} A_w \Delta x - \frac{\partial p'_a}{\partial x} A_w \Delta x - \rho_w g A_w S_f \Delta x + \rho_w A_w g \Delta x \sin \theta \\ & \rho_w A_w \Delta x \frac{\partial V_w}{\partial t} + \rho_w A_w V_w \frac{\partial V_w}{\partial x} \Delta x \end{aligned}$$

$$= -\rho_w g \frac{\partial h}{\partial x} A_w \Delta x - \frac{\partial p'_a}{\partial x} A_w \Delta x - \rho_w g A_w S_f \Delta x + \rho_w A_w g \Delta x \sin \theta$$

以上より，運動方程式は以下のように示される．

$$\frac{1}{g} \frac{\partial V_w}{\partial t} + \frac{V_w}{g} \frac{\partial V_w}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{1}{g \rho_w} \frac{\partial p'_a}{\partial x} - S_0 + \frac{n^2 |V_w| V_w}{R_w^{4/3}} = 0 \dots\dots\dots (2.35)$$

$$; S_0 = \sin \theta$$

$$; S_f = \frac{n^2 |V_w| V_w}{R_w^{4/3}}$$

ここに， Δx ：微小距離， Δt ：微小時間， ρ_w ：水の密度， R_w ：径深， S_f ：摩擦勾配， g ：重力加速度， A_w ：通水断面積， S_0 ：河床勾配， V_w ：流速， n ：マンニングの粗度係数， x ：距離， t ：時間．

2.4 基礎式の無次元化

2.2 および 2.3 において空気・雨水流れの基礎式を導出したが，ここでは，これら基礎式の無次元化をはかり，雨水排水管渠網の流れを規定するパラメータを明らかにする．本論文では，流れ方向の長さの代表値に雨水排水管渠長 L ，鉛直方向の長さのそれに雨水排水管渠径 D ，風速のそれに \sqrt{gD} ，時間の代表値に L/\sqrt{gD} ，空気圧に大気圧 p_0 を，空気の密度に大気圧の密度 ρ_0 を選ぶこととする．

2.4.1 空気の流れの無次元化

(1) 取付管を考慮した雨水排水管渠部

無次元変数を下記のように定義する．

$$\left. \begin{aligned} x_* &= x/L, & t_* &= t/(L/\sqrt{gD}) \\ A_{a*} &= A_a/D^2, & V_{a*} &= V_a/\sqrt{gD} \\ R_{a*} &= R_a/(D/4), & m'_* &= m'/(\rho_0 \sqrt{gD} D^2/L) \\ p_{a*} &= p_a/p_0, & \rho_{a*} &= \rho_a/\rho_0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.36)$$

これらを連続の式（式（2.6））および運動方程式（式（2.21））に代入すると，下記の無次元化された流れの基礎式が得られる．

$$A_{a*} \frac{\partial \rho_{a*}}{\partial t_*} + \rho_{a*} \frac{\partial A_{a*}}{\partial t_*} + \rho_{a*} A_{a*} \frac{\partial V_{a*}}{\partial x_*} + \rho_{a*} V_{a*} \frac{\partial A_{a*}}{\partial x_*} + A_{a*} V_{a*} \frac{\partial \rho_{a*}}{\partial x_*} + m'_* = 0 \dots\dots\dots (2.37)$$

$$\frac{\partial V_{a*}}{\partial t_*} + V_{a*} \frac{\partial V_{a*}}{\partial x_*} + \frac{1}{gD} \frac{p_0}{\rho_0} \frac{1}{\rho_{a*}} \frac{\partial p_{a*}}{\partial x_*} + f_D \frac{L}{D} \frac{1}{R_{a*}} \frac{1}{2} |V_{a*}| V_{a*} - \frac{m'_* V_{a*}}{\rho_{a*} A_{a*}} = 0 \dots\dots\dots (2.38)$$

相似則が成り立つには，式（2.38）の第3項 $\frac{1}{gD} \frac{p_0}{\rho_0}$ ，および，第4項の $\frac{L}{D}$ が原型と模型で一致している必要がある．ここで，添え字の p, m をそれぞれ原型と模型におけるパラメータを示すものとする，第3項は次式で示される．

$$\frac{1}{gD_p} \frac{p_{0p}}{\rho_{0p}} = \frac{1}{gD_m} \frac{p_{0m}}{\rho_{0m}} \dots\dots\dots (2.39)$$

式（2.39）において，模型実験を標準大気圧（1気圧）中で行う場合は， $D_m = D_p$ となり，原型での実験でなければならない．

また，1/10スケールの模型実験を行う場合は，式（2.39）より，

$$\frac{1}{gD_p} \frac{p_{0p}}{\rho_{0p}} = \frac{10}{gD_p} \frac{p_{0m}}{\rho_{0m}}$$

$$\frac{p_{0m}}{\rho_{0m}} = \frac{1}{10} \frac{p_{0p}}{\rho_{0p}} \dots\dots\dots (2.40)$$

ここで，温度 10℃ の大気圧を想定し，次式の値を式（2.40）に代入すると，

$$\left. \begin{array}{l} p_{0p} = 101,325 \text{ Pa} \\ \rho_{0p} = 1.247 \text{ kg/m}^3 \end{array} \right\} \dots\dots\dots (2.41)$$

$$\frac{p_{0m}}{\rho_{0m}} = \frac{101325}{12.47} = 8125 \text{ m}^2/\text{s}^2 \dots\dots\dots (2.42)$$

ここで， $p_{0m} = 32.038965 \text{ Pa}$ と仮定すると，

$$\rho_{0m} = \rho_{0p} \left(\frac{p_{0m}}{p_{0p}} \right)^{\frac{1}{1.4}} = 1.247 \times (0.0003162)^{\frac{1}{1.4}} = 0.003943113 \text{ kg/m}^3 \text{ より，}$$

$$\frac{p_{0m}}{\rho_{0m}} = \frac{32.038965}{0.003943113} = 8125 \text{ m}^2/\text{s}^2 \text{ となり，式 (2.42) と一致する.}$$

$$\text{よって，} \frac{p_{0m}}{\rho_{0p}} = \frac{32.038965}{101325} = 0.0003162 \approx \frac{1}{3163} \text{ となる.}$$

なお， 1/2 スケールの模型実験を行う場合は，式 (2.39) より，

$$\frac{1}{gD_p} \frac{p_{0p}}{\rho_{0p}} = \frac{2}{gD_p} \frac{p_{0m}}{\rho_{0m}}$$

$$\frac{p_{0m}}{\rho_{0m}} = \frac{1}{2} \frac{p_{0p}}{\rho_{0p}} \dots\dots\dots (2.43)$$

ここで，式 (2.41) の各値を式 (2.43) に代入すると，

$$\frac{p_{0m}}{\rho_{0m}} = \frac{101325}{2 \times 1.247} = 40628 \text{ m}^2/\text{s}^2 \dots\dots\dots (2.44)$$

ここで， $p_{0m} = 8956.11675 \text{ Pa}$ と仮定すると，

$$\rho_{0m} = \rho_{0p} \left(\frac{p_{0m}}{p_{0p}} \right)^{\frac{1}{1.4}} = 1.247 \times (0.08839)^{\frac{1}{1.4}} = 0.22044348 \text{ kg/m}^3 \text{ より，}$$

$$\frac{p_{0m}}{\rho_{0m}} = \frac{8956.11675}{0.22044348} = 40628 \text{ m}^2/\text{s}^2 \text{ となり，式 (2.44) と一致する.}$$

$$\text{よって，} \frac{p_{0m}}{\rho_{0p}} = \frac{8956.11675}{101325} = 0.08839 \approx \frac{1}{11} \text{ となる.}$$

したがって，標準大気圧下での模型実験は，相似則による水路寸法の拡大には適用できない．なお，第 4 項は管長 L と管径 D の比を同じとすれば相似則が成り立つことが分かる．

(2) マンホール部

無次元変数を下記のように定義する．

$$\left. \begin{aligned} h_{G*} &= h_G / D, \quad h_{M*} = h_M / D, \quad h_{T*} = h_T / D, \quad h_{a*} = h_a / D \\ F_{M*} &= F_M / D^2, \quad t_* = t / (L / \sqrt{gD}), \quad A_{au*} = A_{au} / D^2, \\ A_{ad*} &= A_{ad} / D^2, \quad V_{au*} = V_{au} / \sqrt{gD}, \quad V_{ad*} = V_{ad} / \sqrt{gD} \\ \rho_{M*} &= \rho_M / \rho_0, \quad p_{M*} = p_M / p_0, \quad m_{M*} = m_M / \rho_0 \sqrt{gD} D^2 \end{aligned} \right\} \dots (2.45)$$

式(2.46)を空気塊の質量保存則(式(2.22))に代入すると、下記の無次元化された質量保存則が得られる．

$$F_{M*} \frac{d}{dt_*} \left\{ \frac{D}{L} \rho_{M*} (h_{G*} - h_{M*}) \right\} - A_{au*} \rho_{M*} V_{au*} + A_{ad*} \rho_{M*} V_{ad*} - m_{M*} \dots \dots \dots (2.46)$$

相似則が成り立つには、式(2.46)の第1項の $\frac{L}{D}$ が原型と模型で一致している必要がある．ここで、添え字の p , m をそれぞれ原型と模型におけるパラメータを示すものとする、第1項は次式で示される．

$$\frac{L_p}{D_p} = \frac{L_m}{D_m} \dots \dots \dots (2.47)$$

したがって、模型においても、原型の管長 L と管径 D を同じ比にすれば相似則が成り立つことが分かる．

次に、式(2.45)を空気の圧縮性の式(式(2.23))に代入すると、次式が得られる．

$$\frac{p_0}{\rho_0^\gamma} \left(\frac{p_{M*}}{\rho_{M*}^\gamma} - 1 \right) = 0 \dots \dots \dots (2.48)$$

ここで、式(2.1)より、次式が導出される．

$$\frac{p_0}{\rho_0^\gamma} = \frac{p_{M*}}{\rho_{M*}^\gamma} \dots \dots \dots (2.49)$$

式 (2.49) を式 (2.48) に代入すると，下記の無次元化された基礎式が得られる．

$$\frac{p_{M*}}{\rho_{M*}'} \left(\frac{p_{M*}}{\rho_{M*}'} - 1 \right) = 0 \dots \dots \dots (2.50)$$

また，式 (2.45) を全水頭の式 ((2.24)) に代入すると，無次元化された基礎式が得られる．

$$h_{T*} = h_{M*} + h_{a*} \dots \dots \dots (2.51)$$

以上より，マンホール部においては，原型と模型は，管長 L と管径 D の比を同じにすれば相似則が成り立つことが分かる．

2.4.2 雨水の流れの無次元化

無次元変数を下記のように定義する．

$$\left. \begin{array}{ll} h_* = h/D, & B_* = B/D \\ x_* = x/L, & t_* = t / (L/\sqrt{gD}) \\ A_{w*} = A_w / D^2, & V_{w*} = V_w / \sqrt{gD} \\ R_{w*} = R_w / (D/4), & c_{w*} = \sqrt{g \frac{A_{w*}}{B_*}} = c_w / \sqrt{gD} \\ p'_{a*} = p'_{a0} / p_0, & F_{M*} = F_M / D^2 \\ h_{M*} = h_M / D, & Q_* = A_{w*} \cdot V_{w*} = Q / (\sqrt{gD} D^2) \end{array} \right\} \dots \dots \dots (2.52)$$

これらを連続の式 (式 (2.25)，式 (2.28)) および運動方程式 (式 (2.36))，に代入すると，下記の無次元化された流れの基礎式が得られる．

$$\frac{\partial h_*}{\partial t_*} + V_{w*} \frac{\partial h_*}{\partial x_*} + c_{w*}^2 \frac{\partial V_{w*}}{\partial x_*} = 0 \dots \dots \dots (2.53)$$

$$\frac{D}{L} F_{M*} \frac{dh_{M*}}{dt_*} = \sum (Q_{in})_* - \sum (Q_{out})_* \dots \dots \dots (2.54)$$

$$\frac{\partial V_{w*}}{\partial t_*} + V_{w*} \frac{\partial V_{w*}}{\partial x_*} + \frac{\partial h_*}{\partial x_*} + \frac{p_0}{gD} \frac{1}{\rho_w} \frac{\partial p'_{a*}}{\partial x_*} - \frac{L}{D} S_0 + \frac{gn^2 L}{(D/4)^{4/3}} \frac{|V_{w*}| V_{w*}}{R_{w*}^{4/3}} = 0 \quad \dots\dots\dots (2.55)$$

式 (2.54) の相似則が成り立つには，第 1 項の $\frac{D}{L}$ が原型と模型で一致している必要がある．ここで，添え字の p ， m をそれぞれ原型と模型におけるパラメータを示すものとする，第 1 項は次式で示される．

$$\frac{D_p}{L_p} = \frac{D_m}{L_m} \quad \dots\dots\dots (2.56)$$

したがって，模型においても，原型の管径 D と管長 L を同じ比にすれば相似則が成り立つことが分かる．

また，式 (2.55) の相似則が成り立つには，第 4 項の $\frac{p_0}{gD} \frac{1}{\rho_w}$ ，第 5 項の $\frac{L}{D}$ および第 6 項の $\frac{gn^2 L}{(D/4)^{4/3}}$ が原型と模型で一致している必要がある．ここで，添え字の p ， m をそれぞれ原型と模型におけるパラメータを示すものとする，各項はそれぞれ次式で示される．

第 4 項は，

$$\frac{p_{0p}}{gD_p} \frac{1}{\rho_{wp}} = \frac{p_{0m}}{gD_m} \frac{1}{\rho_{wm}} \quad \dots\dots\dots (2.57)$$

より，原型および模型実験共に，液体を水とし標準大気圧（1 気圧）中で行う場合は， $p_{0p} = p_{0m}$ ， $\rho_{wp} = \rho_{wm}$ となり，

$$D_m = D_p \quad \dots\dots\dots (2.58)$$

第 5 項は，

$$\frac{L_p}{D_p} = \frac{L_m}{D_m} \quad \dots\dots\dots (2.59)$$

したがって，原型と模型は，管長 L と管径 D の比を同じにすれば

相似則が成り立つことが分かる．

第 6 項は，マニングの粗度係数に関する項で，

$$\frac{gn_p^2 L_p}{(D_p/4)^{4/3}} = \frac{gn_m^2 L_m}{(D_m/4)^{4/3}} \dots\dots\dots (2.60)$$

したがって，

$$n_m = n_p \sqrt{\frac{L_p}{L_m} \left(\frac{D_m}{D_p} \right)^{4/3}} \dots\dots\dots (2.61)$$

以上より，運動方程式においては一部の項で，標準大気圧における模型実験は，相似則より，原型寸法と必要とすることが確認された．しかしながら，連続の式は無次元化され相似則が成り立っており，模型スケールによっては，許容誤差内の実験結果が得られることは十分考えられる．

参考文献

- 1) 日本流体力学会：混相流体の力学，朝倉書店，pp. 1-7，1991.
- 2) 日本原子力学会，熱流れ部会：気液二相流の数値解析，朝倉書店，pp. 1-7，54-67，1993.
- 3) 松尾 一泰：圧縮性流体力学，理工学社，pp. 48～65，1999.
- 4) Oosthuizen, P. H. and Carscallen, W. C.: Compressible fluid flow, McGraw-Hill Companies, pp. 225-235, 1997.
- 5) 日本機械学会：流体力学，日本機械学会，pp. 187-191，2005.
- 6) 林 泰造：基礎水理学，鹿島出版会，pp. 147-156，1996.

3 章 流れの基礎式の数値解析法

3.1 概 説

2 章において導出した都市雨水排水管渠網における気液二層流の気層（空気）と雨水についての各基礎式は，①雨水排水管渠における空気の流れの連続の式と運動方程式，②マンホールにおける空気の流れの質量保存則と空気の圧縮性の式および全水頭の式，③雨水排水管渠とマンホールにおける雨水の流れの連続の式と運動方程式から構成されている．

ここでは，上述の空気と雨水の流れの各基礎式を，厳密に数値解析するため，特性曲線法を採用し，その数値解析のための矩形格子を用いた数値計算式（差分式）を新たに提案している．以下に，詳細な特性方程式の導出方法と数値解析法について述べる．

3.2 特性曲線法（矩形格子）

取付管を考慮した雨水排水管渠とマンホールにおける空気の流れの解析法¹⁾，および雨水排水管渠とマンホールにおける雨水の流れの解析法について詳述する．

3.2.1 取付管を考慮した排水管渠における空気の流れの解析法

空気の流れの連続の式(質量保存則)は，次のように表わされる．

$$A_a \frac{\partial \rho_a}{\partial t} + \rho_a \frac{\partial A_a}{\partial t} + \rho_a A_a \frac{\partial V_a}{\partial x} + \rho_a V_a \frac{\partial A_a}{\partial x} + A_a V_a \frac{\partial \rho_a}{\partial x} + m' = 0 \cdots \cdots (3.1)$$

また，空気の流れの運動方程式は，次のように表わされる．

$$\frac{\partial V_a}{\partial t} + V_a \frac{\partial V_a}{\partial x} + \frac{1}{\rho_a} \frac{\partial p_a}{\partial x} + f_D \frac{1}{4R_a} \frac{1}{2} |V_a| V_a - \frac{m' V_a}{\rho_a A_a} = 0 \cdots \cdots (3.2)$$

ここで， $\frac{1}{\rho_a} \frac{\partial p_a}{\partial x} = \frac{a^2}{\rho_a} \frac{\partial \rho_a}{\partial x}$ であり，式(3.2)に代入すると，

$$\frac{\partial V_a}{\partial t} + V_a \frac{\partial V_a}{\partial x} + \frac{a^2}{\rho_a} \frac{\partial \rho_a}{\partial x} + f_D \frac{1}{4R_a} \frac{1}{2} |V_a| V_a - \frac{m' V_a}{\rho_a A_a} = 0 \dots \dots \dots (3.3)$$

ここに， f_D ：ダルシー・ワスバッハの摩擦損失係数， R_a ：径深，
 a ：音速．

式 (3.3) + λ × 式 (3.1) より， (λ ：媒介変数)

$$\begin{aligned} & \frac{\partial V_a}{\partial t} + V_a \frac{\partial V_a}{\partial x} + \lambda \rho_a A_a \frac{\partial V_a}{\partial x} + \lambda \rho_a \frac{\partial A_a}{\partial t} + \lambda \rho_a V_a \frac{\partial A_a}{\partial x} + \frac{a^2}{\rho_a} \frac{\partial \rho_a}{\partial t} + \lambda A_a \frac{\partial \rho_a}{\partial t} \\ & + \lambda A_a V_a \frac{\partial \rho_a}{\partial x} + f_D \frac{1}{4R} \frac{1}{2} |V_a| V_a - \frac{m' V_a}{\rho_a A_a} + \lambda m' = 0 \\ & \left\{ \frac{\partial V_a}{\partial t} + (V_a + \lambda \rho_a A_a) \frac{\partial V_a}{\partial x} \right\} + \lambda A_a \left\{ \frac{\partial \rho_a}{\partial t} + \left(V_a + \frac{a^2}{\lambda A_a \rho_a} \right) \frac{\partial \rho_a}{\partial x} \right\} \\ & + \lambda \rho_a \left(\frac{\partial A_a}{\partial t} + V_a \frac{\partial A_a}{\partial x} \right) + f_D \frac{1}{4R} \frac{1}{2} |V_a| V_a - m' \left(\frac{V_a}{\rho_a A_a} - \lambda \right) = 0 \dots \dots \dots (3.4) \end{aligned}$$

$$\frac{dx}{dt} = V_a + \lambda \rho_a A_a = V + \frac{a^2}{\lambda A_a \rho_a} \dots \dots \dots (3.5)$$

$$\begin{aligned} \lambda \rho_a A_a &= \frac{a^2}{\lambda A_a \rho_a} \\ \lambda^2 &= \frac{a^2}{\lambda A_a \rho_a} \\ \lambda &= \pm \frac{a}{\rho_a A_a} \dots \dots \dots (3.6) \end{aligned}$$

式 (3.6) を式 (3.5) に代入すると，特性曲線：式 (3.7) のもと
 で，特性方程式：式 (3.8) が成り立つ．

$$\frac{dx}{dt} = V_a \pm a \dots \dots \dots (3.7)$$

$$\begin{aligned} & \frac{dV_a}{dt} \pm \frac{a}{\rho_a} \frac{d\rho_a}{dt} \pm \frac{a}{A_a} \left(\frac{\partial A_a}{\partial t} + V_a \frac{\partial A_a}{\partial x} \right) + f_D \frac{1}{4R} \frac{1}{2} |V_a| V_a - m' \frac{V_a \mp a}{\rho_a A_a} = 0 \\ & \dots \dots \dots (3.8) \end{aligned}$$

$$; \lambda A_a = \pm \frac{a}{\rho_a}, \quad \lambda \rho_a = \pm \frac{a}{A_a}, \quad \frac{V_a}{\rho_a A_a} - \lambda = \frac{V_a \mp a}{\rho_a A_a}$$

式 (3.8) の左辺から 3 番目の項は速度と密度に関して空気流れ断面積の時空間的变化の影響を意味している。

特性曲線法 (矩形格子) の概念図を図 3-1 に, また, 計算断面での特性曲線図を図 3-2 ~ 図 3-4 に示す。

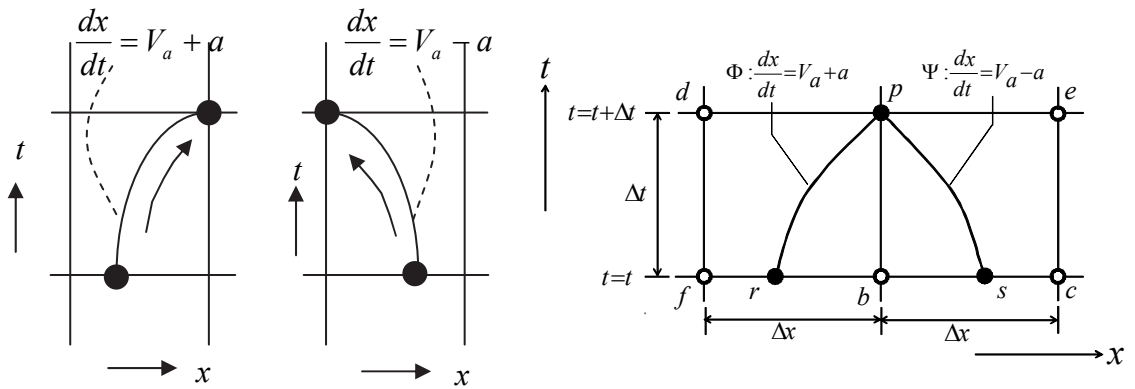


図 3-1 特性曲線法 (矩形格子)

図 3-2 特性曲線 (内点断面)

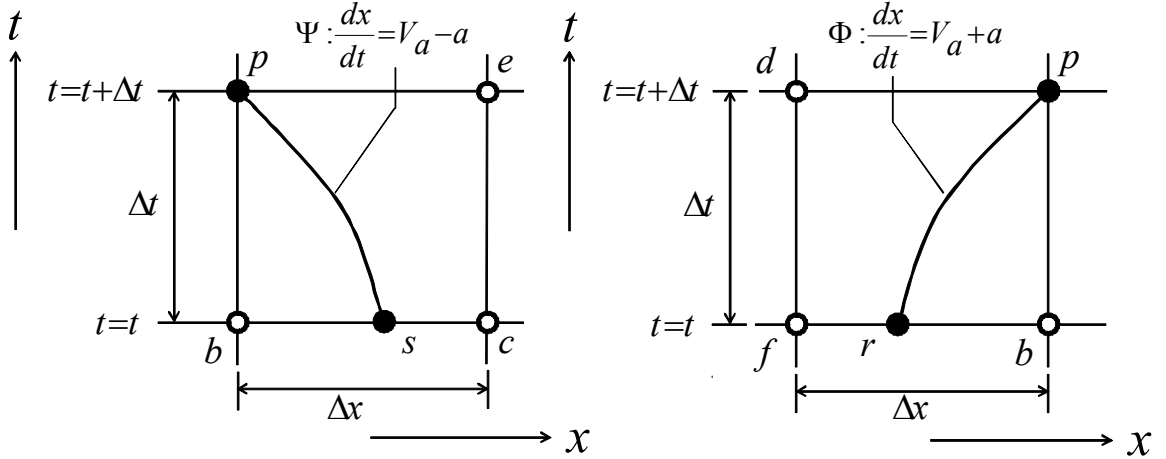


図 3-3 特性曲線 (上流端断面)

図 3-4 特性曲線 (下流端断面)

(1) 内点断面における計算

① 第 1 ステップ

図 3-2 に示すような特性曲線 Φ (式 (3.7), +符号) を点 r から点 p まで積分する.

$$\int_{x_r}^{x_p} dx = \int_t^{t+\Delta t} (V_a + a) dt \quad \text{において, } V_r, V_p, a_r, a_p \text{ を } V_b, a_b \text{ で近似}$$

すると, 次式を得る.

$$x_p - x_r = (V_{ab} + a_b) \Delta t \dots\dots\dots (3.9)$$

ここで, 式 (3.9) および点 f, b 間で V_a や ρ_a が線形変化している仮定より,

$$\left. \begin{aligned} V_{ar} &= V_{ab} - \frac{V_{ab} - V_{af}}{x_b - x_a} (V_{ab} + a_b) \Delta t \\ \rho_{ar} &= \rho_{ab} - \frac{\rho_{ab} - \rho_{af}}{x_b - x_a} (V_{ab} + a_b) \Delta t \\ a_r &= \sqrt{\gamma \frac{p_{ar}}{\rho_{ar}}} \quad , \quad p_{ar} = \left(\frac{p_0}{\rho_0^\gamma} \right) \rho_{ar}^\gamma \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.10)$$

ここに, p_0 : 大気圧, ρ_0 : 大気密度, γ : 空気の比熱比.

次に, 特性方程式 (式 (3.8), 上符号) を点 r から点 p まで積分する.

$$\begin{aligned} \int_{V_{ar}}^{V_{ap}} dV_a + \int_{\rho_{ar}}^{\rho_{ap}} \frac{a}{\rho_a} d\rho_a + \int_t^{t+\Delta t} \frac{a}{A_a} \left(\frac{\partial A_a}{\partial t} + V_a \frac{\partial A_a}{\partial x} \right) dt \\ + \int_t^{t+\Delta t} f_D \frac{1}{4R_a} \frac{1}{2} |V_a| V_a dt - \int_t^{t+\Delta t} m' \frac{V_a - a}{\rho_a A_a} dt = 0 \end{aligned}$$

ここで, p 点の値を r 点の値で近似することとすると, 次式を得る.

$$V_{ap} - V_{ar} + \frac{a_r}{\rho_{ar}}(\rho_{ap} - \rho_{ar}) + \frac{a_r}{A_{ar}} \left(\frac{\partial A_a}{\partial t} \Big|_r + V_{ar} \frac{\partial A_a}{\partial x} \Big|_r \right) \Delta t \\ + f_{Dr} \frac{1}{4R_{ar}} \frac{1}{2} |V_{ar}| V_{ar} \Delta t - m_r' \frac{V_{ar} - a_r}{\rho_{ar} A_{ar}} \Delta t = 0 \dots \dots (3.11)$$

ここで、 $\frac{\partial A_a}{\partial x} \Big|_r$ は、時刻 $t=t$ における点 b , f 間での $\frac{\partial A_a}{\partial x}$ として表わされるから、次式で示される。

$$\frac{\partial A_a}{\partial x} \Big|_r = \frac{A_{ab} - A_{af}}{\Delta x} \dots \dots \dots (3.12)$$

$$\text{また, } \frac{\partial A_a}{\partial t} \Big|_r \text{ は, } x=x_b \text{ における } \frac{\partial A_a}{\partial t} = \frac{\partial A_a}{\partial t} \Big|_b \text{ と } x=x_f \text{ における } \frac{\partial A_a}{\partial t} = \frac{\partial A_a}{\partial t} \Big|_f$$

との間で、 $\frac{\partial A_a}{\partial t}$ が線形変化していると仮定すると、次式を得る。

$$\frac{\partial A_a}{\partial t} \Big|_r = \frac{\partial A_a}{\partial t} \Big|_b - \frac{\Delta t}{\Delta x} (V_{ab} + a_b) \cdot \left(\frac{\partial A_a}{\partial t} \Big|_b - \frac{\partial A_a}{\partial t} \Big|_f \right) \dots \dots \dots (3.13)$$

同様に、

$$\frac{\partial A_a}{\partial t} \Big|_b = \frac{\partial A_a}{\partial t} \Big|_p = \frac{A_{ap} - A_{ab}}{\Delta t}, \quad \frac{\partial A_a}{\partial t} \Big|_f = \frac{A_{af} - A_{ad}}{\Delta t} \dots \dots \dots (3.14)$$

次に、図 3-2 に示す特性曲線 Ψ (式 (3.7), - 符号) を点 s から点 p まで積分する。

$$\int_{x_s}^{x_p} dx = \int_t^{t+\Delta t} (V_a - a) dt \text{ において, } V_s, V_p, a_s, a_p \text{ を } V_b, a_b \text{ で近似}$$

すると、次式を得る。

$$x_p - x_s = (V_{ab} + a_b) \Delta t \dots \dots \dots (3.15)$$

ここで、式 (3.15) および点 b , c 間で V_a や ρ_a が線形変化している仮定より、

$$\left. \begin{aligned} V_{as} &= V_{ab} - \frac{V_{ac} - V_{ab}}{x_c - x_b} (V_{ab} - a_b) \Delta t \\ \rho_{as} &= \rho_{ab} - \frac{\rho_{ac} - \rho_{ab}}{x_c - x_b} (V_{ab} - a_b) \Delta t \\ a_s &= \sqrt{\gamma \frac{p_{as}}{\rho_{as}}} \quad , \quad p_{as} = \left(\frac{p_0}{\rho_0^\gamma} \right) \rho_{as}^\gamma \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.16)$$

次に，特性方程式（式（3.8），下符号）を点 s から点 p まで積分する．

$$\begin{aligned} \int_{V_{as}}^{V_{ap}} dV_a - \int_{\rho_{as}}^{\rho_{ap}} \frac{a}{\rho_a} d\rho_a - \int_t^{t+\Delta t} \frac{a}{A_a} \left(\frac{\partial A_a}{\partial t} + V_a \frac{\partial A_a}{\partial x} \right) dt \\ + \int_t^{t+\Delta t} f_D \frac{1}{4R_a} \frac{1}{2} |V_a| V_a dt - \int_t^{t+\Delta t} m' \frac{V_a + a}{\rho_a A_a} dt = 0 \end{aligned}$$

ここで， p 点の値を s 点の値で近似することとすると，次式を得る．

$$\begin{aligned} V_{ap} - V_{as} - \frac{a_s}{\rho_{as}} (\rho_{ap} - \rho_{as}) - \frac{a_s}{A_{as}} \left(\frac{\partial A_a}{\partial t} \Big|_s + V_{as} \frac{\partial A_a}{\partial x} \Big|_s \right) \Delta t \\ + f_{Ds} \frac{1}{4R_{as}} \frac{1}{2} |V_{as}| V_{as} \Delta t - m'_s \frac{V_{as} + a_s}{\rho_{as} A_{as}} \Delta t = 0 \dots\dots (3.17) \end{aligned}$$

ここで， $\frac{\partial A_a}{\partial x} \Big|_s$ は，時刻 $t=t$ における点 b, c 間での $\frac{\partial A_a}{\partial x}$ として表わされるから，次式で示される．

$$\frac{\partial A_a}{\partial x} \Big|_s = \frac{A_{ac} - A_{ab}}{\Delta x} \dots\dots\dots (3.18)$$

また， $\frac{\partial A_a}{\partial t} \Big|_s$ は， $x=x_b$ における $\frac{\partial A_a}{\partial t} = \frac{\partial A_a}{\partial t} \Big|_b$ と $x=x_c$ における $\frac{\partial A_a}{\partial t} = \frac{\partial A_a}{\partial t} \Big|_c$

との間で， $\frac{\partial A_a}{\partial t}$ が線形変化していると仮定すると，次式を得る．

$$\left. \frac{\partial A_a}{\partial t} \right|_s = \left. \frac{\partial A_a}{\partial t} \right|_b - \frac{\Delta t}{\Delta x} (V_{ab} - a_b) \cdot \left(\left. \frac{\partial A_a}{\partial t} \right|_c - \left. \frac{\partial A_a}{\partial t} \right|_b \right) \dots\dots\dots (3.19)$$

同様に，

$$\left. \frac{\partial A_a}{\partial t} \right|_c = \frac{A_{ae} - A_{ac}}{\Delta t} \dots\dots\dots (3.20)$$

ここで，式 (3.11) $\times \frac{a_s}{\rho_{as}}$ + 式 (3.17) $\times \frac{a_r}{\rho_{ar}}$ より，

$$\begin{aligned} & \left(\frac{a_s}{\rho_{as}} + \frac{a_r}{\rho_{ar}} \right) V_{ap} - \left(\frac{a_s}{\rho_{as}} V_{ar} + \frac{a_r}{\rho_{ar}} V_{as} \right) - \left(\frac{a_r}{\rho_{ar}} \frac{a_s}{\rho_{as}} \rho_{ar} - \frac{a_s}{\rho_{as}} \frac{a_r}{\rho_{ar}} \rho_{as} \right) \\ & + \left\{ \frac{a_s}{\rho_{as}} \frac{a_r}{A_{ar}} \left(\left. \frac{\partial A_a}{\partial t} \right|_r + V_{ar} \frac{\partial A_a}{\partial x} \right|_r \right) - \frac{a_r}{\rho_{ar}} \frac{a_s}{A_{as}} \left(\left. \frac{\partial A_a}{\partial t} \right|_s + V_{as} \frac{\partial A_a}{\partial x} \right|_s \right) \right\} \Delta t \\ & + \left(\frac{a_s}{\rho_{as}} f_{Dr} \frac{1}{4R_{ar}} \frac{1}{2} |V_{ar}| V_{ar} + \frac{a_r}{\rho_{ar}} f_{Ds} \frac{1}{4R_{as}} \frac{1}{2} |V_{as}| V_{as} \right) \Delta t \\ & - \left(\frac{a_s}{\rho_{as}} m'_r \frac{V_{ar} - a_r}{\rho_{ar} A_{ar}} + \frac{a_r}{\rho_{ar}} m'_s \frac{V_{as} + a_s}{\rho_{as} A_{as}} \right) \Delta t = 0 \\ \\ & \left(\frac{a_s}{\rho_{as}} V_{ar} + \frac{a_r}{\rho_{ar}} V_{as} \right) + (\rho_{ar} - \rho_{as}) \frac{a_r}{\rho_{ar}} \frac{a_s}{\rho_{as}} \\ & - \left\{ \frac{a_s}{\rho_{as}} \frac{a_r}{A_{ar}} \left(\left. \frac{\partial A_a}{\partial t} \right|_r + V_{ar} \frac{\partial A_a}{\partial x} \right|_r \right) - \frac{a_r}{\rho_{ar}} \frac{a_s}{A_{as}} \left(\left. \frac{\partial A_a}{\partial t} \right|_s + V_{as} \frac{\partial A_a}{\partial x} \right|_s \right) \right\} \Delta t \\ & - \left(\frac{a_s}{\rho_{as}} f_{Dr} \frac{1}{4R_{ar}} \frac{1}{2} |V_{ar}| V_{ar} + \frac{a_r}{\rho_{ar}} f_{Ds} \frac{1}{4R_{as}} \frac{1}{2} |V_{as}| V_{as} \right) \Delta t \\ & + \left(\frac{a_s}{\rho_{as}} m'_r \frac{V_{ar} - a_r}{\rho_{ar} A_{ar}} + \frac{a_r}{\rho_{ar}} m'_s \frac{V_{as} + a_s}{\rho_{as} A_{as}} \right) \Delta t \\ V_{ap} = & \frac{\dots\dots\dots}{\frac{a_s}{\rho_{as}} + \frac{a_r}{\rho_{ar}}} \dots\dots (3.21) \end{aligned}$$

また，式（3.11）－式（3.17）より，

$$\begin{aligned}
& -V_{ar} + V_{as} + \left(\frac{a_r}{\rho_{ar}} + \frac{a_s}{\rho_{as}} \right) \rho_{ap} - a_r - a_s \\
& + \left\{ \frac{a_r}{A_{ar}} \left(\frac{\partial A_a}{\partial t} \right)_r + V_{ar} \frac{\partial A_a}{\partial x} \right\}_r + \frac{a_s}{A_{as}} \left(\frac{\partial A_a}{\partial t} \right)_s + V_{as} \frac{\partial A_a}{\partial x} \Big|_s \Bigg\} \Delta t \\
& + \left(f_{Dr} \frac{1}{4R_{ar}} \frac{1}{2} |V_{ar}| V_{ar} - f_{Ds} \frac{1}{4R_{as}} \frac{1}{2} |V_{as}| V_{as} \right) \Delta t \\
& - \left(m'_r \frac{V_{ar} - a_r}{\rho_{ar} A_{ar}} - m'_s \frac{V_{as} + a_s}{\rho_{as} A_{as}} \right) \Delta t = 0
\end{aligned}$$

したがって，次式を得る．

$$\begin{aligned}
& (V_{ar} - V_{as}) + (a_r + a_s) - \left\{ \frac{a_r}{A_{ar}} \left(\frac{\partial A_a}{\partial t} \right)_r + V_{ar} \frac{\partial A_a}{\partial x} \right\}_r + \frac{a_s}{A_{as}} \left(\frac{\partial A_a}{\partial t} \right)_s + V_{as} \frac{\partial A_a}{\partial x} \Big|_s \Bigg\} \Delta t \\
& - \left(f_{Dr} \frac{1}{4R_r} \frac{1}{2} |V_{ar}| V_{ar} - f_{Ds} \frac{1}{4R_s} \frac{1}{2} |V_{as}| V_{as} \right) \Delta t + \left(m'_r \frac{V_{ar} - a_r}{\rho_{ar} A_{ar}} - m'_s \frac{V_{as} + a_s}{\rho_{as} A_{as}} \right) \Delta t \\
\rho_{ap} = & \frac{\frac{a_r}{\rho_{ar}} + \frac{a_s}{\rho_{as}}}{\dots \dots \dots} \quad (3.22)
\end{aligned}$$

$$\therefore P_{ap} = \left(\frac{p_{a0}}{\rho_{a0}^\gamma} \right) \rho_{ap}^\gamma, \quad a_p = \sqrt{\gamma \frac{p_{ap}}{\rho_{ap}}} \dots \dots \dots (3.23)$$

② 第 2 ステップ

特性曲線 Φ （式（3.7），+符号）を点 r から点 p まで積分する．

$$x_p - x_r = \frac{1}{2} \left\{ (V_{ar} + a_r) + (V_{ap} + a_p) \right\} \cdot \Delta t \dots \dots \dots (3.24)$$

ここで，式（3.24）および点 f ， b 間で V_a や ρ_a が線形変化している仮定より，

$$\left.
\begin{aligned}
V_{ar} &= V_{ab} - \frac{1}{2} \frac{V_{ab} - V_{af}}{x_b - x_a} \{ (V_{ar} + a_r) + (V_{ap} + a_p) \} \Delta t \\
\rho_{ar} &= \rho_{ab} - \frac{1}{2} \frac{\rho_{ab} - \rho_{af}}{x_b - x_a} \{ (V_{ar} + a_r) + (V_{ap} + a_p) \} \Delta t \\
a_r &= \sqrt{\gamma \frac{p_{ar}}{\rho_{ar}}} \quad , \quad p_{ar} = \left(\frac{p_0}{\rho_0^\gamma} \right) \rho_{ar}^\gamma
\end{aligned}
\right\} \dots (3.25)$$

次に，特性方程式（式（3.8），上符号）を点 r から点 p まで積分する．

$$\begin{aligned}
& (V_{ap} - V_{ar}) + \frac{1}{2} \left(\frac{a_r}{\rho_{ar}} + \frac{a_p}{\rho_{ap}} \right) (\rho_{ap} - \rho_{ar}) \\
& + \frac{1}{2} \left[\frac{a_r}{A_{ar}} \left(\frac{\partial A_a}{\partial t} \Big|_r + V_{ar} \frac{\partial A_a}{\partial x} \Big|_r \right) + \frac{a_p}{A_{ap}} \left(\frac{\partial A_a}{\partial t} \Big|_p + V_{ap} \frac{\partial A_a}{\partial x} \Big|_{rp} \right) \right] \cdot \Delta t \\
& + \frac{1}{2} \left(f_{Dr} \frac{1}{4R_{ar}} \frac{1}{2} |V_{ar}| V_{ar} + f_{Dp} \frac{1}{4R_{ap}} \frac{1}{2} |V_{ap}| V_{ap} \right) \cdot \Delta t \\
& - \frac{1}{2} \left(m'_r \frac{V_{ar} - a_r}{\rho_{ar} A_{ar}} + m'_p \frac{V_{ap} - a_p}{\rho_{ap} A_{ap}} \right) \cdot \Delta t = 0 \quad \dots (3.26)
\end{aligned}$$

ここで， $\frac{\partial A_a}{\partial x} \Big|_{rp}$ は，時刻 $t=t+\Delta t$ における点 p ， d 間での $\frac{\partial A_a}{\partial x}$ とし

て表わされるから，次式で示される．

$$\frac{\partial A_a}{\partial x} \Big|_{rp} = \frac{A_{ap} - A_{ad}}{\Delta x} \dots \dots \dots (3.27)$$

また， $\frac{\partial A_a}{\partial t} \Big|_r$ は， $x=x_b$ における $\frac{\partial A_a}{\partial t} = \frac{\partial A_a}{\partial t} \Big|_b$ と $x=x_f$ における $\frac{\partial A_a}{\partial t} = \frac{\partial A_a}{\partial t} \Big|_f$

との間で， $\frac{\partial A_a}{\partial t}$ が線形変化していると仮定すると，次式を得る．

$$\frac{\partial A_a}{\partial t} \Big|_r = \frac{\partial A_a}{\partial t} \Big|_b - \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} \{ (V_{ar} + a_r) + (V_{ap} + a_p) \} \cdot \left(\frac{\partial A_a}{\partial t} \Big|_b - \frac{\partial A_a}{\partial t} \Big|_f \right) \dots (3.28)$$

特性曲線 Ψ (式 (3.7), - 符号) を点 s から点 p まで積分する .

$$x_p - x_s = \frac{1}{2} \left\{ (V_{as} - a_s) + (V_{ap} - a_p) \right\} \cdot \Delta t \dots\dots\dots (3.29)$$

ここで, 式 (3.29) および点 b, c 間で V_a や ρ_a が線形変化している仮定より,

$$\left. \begin{aligned} V_{as} &= V_{ab} - \frac{1}{2} \frac{V_{ac} - V_{ab}}{x_c - x_b} \{ (V_{as} - a_s) + (V_{ap} - a_p) \} \Delta t \\ \rho_{as} &= \rho_{ab} - \frac{1}{2} \frac{\rho_{ac} - \rho_{ab}}{x_c - x_b} \{ (V_{as} - a_s) + (V_{ap} - a_p) \} \Delta t \\ a_s &= \sqrt{\gamma \frac{p_{as}}{\rho_{as}}} \quad , \quad p_{as} = \left(\frac{p_0}{\rho_0^\gamma} \right) \rho_{as}^\gamma \end{aligned} \right\} \dots\dots (3.30)$$

次に, 特性方程式 (式 (3.8), 下符号) を点 s から点 p まで積分する .

$$\begin{aligned} & (V_{ap} - V_{as}) - \frac{1}{2} \left(\frac{a_s}{\rho_{as}} + \frac{a_p}{\rho_{ap}} \right) (\rho_{ap} - \rho_{as}) \\ & - \frac{1}{2} \left[\frac{a_s}{A_{as}} \left(\frac{\partial A_a}{\partial t} \right) \Big|_s + V_{as} \frac{\partial A_a}{\partial x} \Big|_s \right] + \frac{a_p}{A_{ap}} \left(\frac{\partial A_a}{\partial t} \Big|_p + V_{ap} \frac{\partial A_a}{\partial x} \Big|_{sp} \right) \cdot \Delta t \\ & + \frac{1}{2} \left(f_{Ds} \frac{1}{4R_{as}} \frac{1}{2} |V_{as}| V_{as} + f_{Dp} \frac{1}{4R_{ap}} \frac{1}{2} |V_{ap}| V_{ap} \right) \cdot \Delta t \\ & - \frac{1}{2} \left(m'_s \frac{V_{as} + a_s}{\rho_{as} A_{as}} + m'_p \frac{V_{ap} + a_p}{\rho_{ap} A_{ap}} \right) \cdot \Delta t = 0 \quad \dots\dots\dots (3.31) \end{aligned}$$

ここで, $\frac{\partial A_a}{\partial x} \Big|_{sp}$ は, 時刻 $t = t + \Delta t$ における点 p, e 間での $\frac{\partial A_a}{\partial x}$ とし

て表わされるから, 次式で示される .

$$\frac{\partial A_a}{\partial x} \Big|_{sp} = \frac{A_{ae} - A_{ap}}{\Delta x} \dots\dots\dots (3.32)$$

また， $\left. \frac{\partial A_a}{\partial t} \right|_s$ は， $x=x_b$ における $\frac{\partial A_a}{\partial t} = \left. \frac{\partial A_a}{\partial t} \right|_b$ と $x=x_c$ における $\frac{\partial A_a}{\partial t} = \left. \frac{\partial A_a}{\partial t} \right|_c$

との間で， $\frac{\partial A_a}{\partial t}$ が線形変化していると仮定すると，次式を得る．

$$\left. \frac{\partial A_a}{\partial t} \right|_s = \left. \frac{\partial A_a}{\partial t} \right|_b - \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} \{ (V_{as} - a_s) + (V_{ap} - a_p) \} \cdot \left(\left. \frac{\partial A_a}{\partial t} \right|_c - \left. \frac{\partial A_a}{\partial t} \right|_b \right) \quad (3.33)$$

同様に，

$$\left. \frac{\partial A_a}{\partial t} \right|_b = \left. \frac{\partial A_a}{\partial t} \right|_p = \frac{A_{ap} - A_{ab}}{\Delta t}, \quad \left. \frac{\partial A_a}{\partial t} \right|_c = \frac{A_{ae} - A_{ac}}{\Delta t} \quad \dots\dots\dots (3.34)$$

式 (3.25) $\times \left(\frac{a_s}{\rho_{as}} + \frac{a_e}{\rho_{ae}} \right) +$ 式 (3.31) $\times \left(\frac{a_r}{\rho_{ar}} + \frac{a_e}{\rho_{ae}} \right)$ より，

$$\begin{aligned} & \{ (s,p) + (r,p) \} V_{ap} - \{ (s,p) V_{ar} + (r,p) V_{as} \} - \frac{1}{2} \{ (r,p)(s,p) \rho_{ar} - (s,p)(r,p) \rho_{as} \} \\ & + \frac{1}{2} \{ [r,p](s,p) - [s,p](r,p) \} \Delta t + \frac{1}{2} \{ \|r,p\|(s,p) + \|s,p\|(r,p) \} \Delta t \\ & - \frac{1}{2} \{ \langle r,p \rangle (s,p) + \langle s,p \rangle (r,p) \} \Delta t = 0 \end{aligned}$$

したがって，次式を得る．

$$\begin{aligned} & (s,p) V_{ar} + (r,p) V_{as} + \frac{1}{2} (\rho_{ar} - \rho_{as}) (r,p)(s,p) - \frac{1}{2} \{ [r,p](s,p) - [s,p](r,p) \} \Delta t \\ & - \frac{1}{2} \{ \|r,p\|(s,p) + \|s,p\|(r,p) \} \Delta t + \frac{1}{2} \{ \langle r,p \rangle (s,p) + \langle s,p \rangle (r,p) \} \Delta t \\ V_{ap} = & \frac{(s,p) + (r,p)}{\dots\dots\dots} \quad (3.35) \end{aligned}$$

式 (3.25) $-$ 式 (3.31) より，

$$\begin{aligned} & -V_{ar} + V_{as} + \frac{1}{2} \{ (r,p) + (s,p) \} \rho_{ap} - \frac{1}{2} \{ (r,p) \rho_{ar} + (s,p) \rho_{as} \} \\ & + \frac{1}{2} \{ [r,p] + [s,p] \} \Delta t + \frac{1}{2} \{ \|r,p\| - \|s,p\| \} \Delta t - \frac{1}{2} \{ \langle r,p \rangle - \langle s,p \rangle \} \Delta t = 0 \end{aligned}$$

したがって，次式を得る．

$$\rho_{ap} = \frac{(V_{ar} - V_{as}) + \frac{1}{2}\{(r, p)\rho_{ar} + (s, p)\rho_{as}\} - \frac{1}{2}\{[r, p] + [s, p]\}\Delta t - \frac{1}{2}\{\|r, p\| - \|s, p\|\}\Delta t + \frac{1}{2}\{\langle r, p \rangle - \langle s, p \rangle\}\Delta t}{\frac{1}{2}\{(r, p) + (s, p)\}} \dots\dots\dots (3.36)$$

$$\therefore P_{ap} = \left(\frac{p_{a0}}{\rho_{a0}^\gamma} \right) \rho_{ap}^\gamma, \quad a_p = \sqrt{\gamma \frac{p_{ap}}{\rho_{ap}}} \dots\dots\dots (3.37)$$

ここに,

$$\left. \begin{aligned} (s, p) &= \frac{a_s}{\rho_{as}} + \frac{a_p}{\rho_{ap}}, \quad (r, p) = \frac{a_r}{\rho_{ar}} + \frac{a_p}{\rho_{ap}} \\ \left\{ \begin{aligned} [s, p] &= \frac{a_s}{A_{as}} \left(\frac{\partial A}{\partial t} \Big|_s + V_{as} \frac{\partial A}{\partial x} \Big|_s \right) + \frac{a_p}{A_{ap}} \left(\frac{\partial A}{\partial t} \Big|_p + V_{ap} \frac{\partial A}{\partial x} \Big|_{sp} \right) \\ [r, p] &= \frac{a_r}{A_{ar}} \left(\frac{\partial A}{\partial t} \Big|_r + V_{ar} \frac{\partial A}{\partial x} \Big|_r \right) + \frac{a_p}{A_{ap}} \left(\frac{\partial A}{\partial t} \Big|_p + V_{ap} \frac{\partial A}{\partial x} \Big|_{rp} \right) \end{aligned} \right\} \\ \left\{ \begin{aligned} \|s, p\| &= f_{Ds} \frac{1}{4R_{as}} \frac{1}{2} |V_{as}| V_{as} + f_{Dp} \frac{1}{4R_{ap}} \frac{1}{2} |V_{ap}| V_{ap} \\ \|r, p\| &= f_{Dr} \frac{1}{4R_{ar}} \frac{1}{2} |V_{ar}| V_{ar} + f_{Dp} \frac{1}{4R_{ap}} \frac{1}{2} |V_{ap}| V_{ap} \end{aligned} \right\} \\ \left\{ \begin{aligned} \langle s, p \rangle &= m'_s \frac{V_{as} + a_s}{\rho_{as} A_{as}} + m'_p \frac{V_{ap} + a_p}{\rho_{ap} A_{ap}} \\ \langle r, p \rangle &= m'_r \frac{V_{ar} - a_r}{\rho_{ar} A_{ar}} + m'_p \frac{V_{ap} - a_p}{\rho_{ap} A_{ap}} \end{aligned} \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots (3.38)$$

(2) 上流端断面における計算

① 第 1 ステップ

図 3-3 に示すような特性曲線 Ψ (式 (3.7), - 符号) は次式のよう
に表わされる.

$$x_p - x_s = (V_{ab} - a_b) \Delta t \dots\dots\dots (3.39)$$

また，特性方程式（式（3.8），下符号）は次式のように表される．

$$V_{ap} - V_{as} - \frac{a_s}{\rho_{as}} (\rho_{ap} - \rho_{as}) - \frac{a_s}{A_{as}} \left(\frac{\partial A_a}{\partial t} \Big|_s + V_{as} \frac{\partial A_a}{\partial x} \Big|_s \right) \Delta t \\ + f_{Ds} \frac{1}{4R_{as}} \frac{1}{2} |V_{as}| V_{as} \Delta t - m'_s \frac{V_{as} + a_s}{\rho_{as} A_{as}} \Delta t = 0 \dots \dots (3.40)$$

$$; \quad a_s = \sqrt{\gamma \frac{p_{as}}{\rho_{as}}} \quad , \quad p_{as} = \left(\frac{p_0}{\rho_0^\gamma} \right) \rho_{as}^\gamma$$

$$; \quad \frac{\partial A_a}{\partial x} \Big|_s = \frac{A_{ac} - A_{ab}}{\Delta x}$$

$$; \quad \frac{\partial A_a}{\partial t} \Big|_s = \frac{\partial A_a}{\partial t} \Big|_b - \frac{\Delta t}{\Delta x} (V_{ab} - a_b) \cdot \left(\frac{\partial A_a}{\partial t} \Big|_c - \frac{\partial A_a}{\partial t} \Big|_b \right)$$

$$; \quad \frac{\partial A_a}{\partial t} \Big|_b = \frac{\partial A_a}{\partial t} \Big|_p = \frac{A_{ap} - A_{ab}}{\Delta t} \quad , \quad \frac{\partial A_a}{\partial t} \Big|_c = \frac{A_{ae} - A_{ac}}{\Delta t}$$

ここで， V_{ap} が境界条件として与えられるとき，次式を得る．

$$V_{ap} - V_{as} + a_s - \frac{a_s}{A_{as}} \left(\frac{\partial A_a}{\partial t} \Big|_s + V_{as} \frac{\partial A_a}{\partial x} \Big|_s \right) \Delta t \\ + f_{Ds} \frac{1}{4R_{as}} \frac{1}{2} |V_{as}| V_{as} \Delta t - m'_s \frac{V_{as} + a_s}{\rho_{as} A_{as}} \Delta t \\ \rho_{ap} = \frac{\dots \dots \dots (3.41)}{\frac{a_s}{\rho_{as}}}$$

$$\therefore P_{ap} = \left(\frac{p_{a0}}{\rho_{a0}^\gamma} \right) \rho_{ap}^\gamma \quad , \quad a_p = \sqrt{\gamma \frac{p_{ap}}{\rho_{ap}}} \dots \dots \dots (3.42)$$

一方， ρ_{ap} (or p_{ap})が境界条件として与えられるとき次式を得る．

$$V_{ap} = V_{as} + \frac{a_s}{\rho_{as}} (\rho_{ap} - \rho_{as}) + \frac{a_s}{A_{as}} \left(\frac{\partial A_a}{\partial t} \Big|_s + V_{as} \frac{\partial A_a}{\partial x} \Big|_s \right) \Delta t$$

$$-f_{Ds} \frac{1}{4R_{as}} \frac{1}{2} \left| V_{as} \right| V_{as} \Delta t + m'_s \frac{V_{as} + a_s}{\rho_{as} A_{as}} \Delta t \dots \dots (3.43)$$

② 第 2 ステップ

特性曲線 Ψ (式 (3.7), - 符号) より,

$$x_p - x_s = \frac{1}{2} \left\{ (V_{as} - a_s) + (V_{ap} - a_p) \right\} \cdot \Delta t \dots \dots \dots (3.44)$$

特性方程式 (式 (3.8), 下符号) より,

$$V_{ap} - V_{as} - \frac{1}{2}(s, p)(\rho_{ap} - \rho_{as}) \\ - \frac{1}{2}[s, p]\Delta t + \frac{1}{2}\|s, p\|\Delta t - \frac{1}{2}\langle s, p \rangle \Delta t = 0 \dots \dots \dots (3.45)$$

$$; \quad a_p = \sqrt{\gamma \frac{p_{ap}}{\rho_{ap}}}, \quad p_{ap} = \left(\frac{p_{a0}}{\rho_{a0}^\gamma} \right) \rho_{ap}^\gamma$$

$$; \quad a_s = \sqrt{\gamma \frac{p_{as}}{\rho_{as}}}, \quad p_{as} = \left(\frac{p_0}{\rho_0^\gamma} \right) \rho_{as}^\gamma$$

$$; \quad \left. \frac{\partial A_a}{\partial x} \right|_{sp} = \frac{A_{ae} - A_{ap}}{\Delta x}$$

$$; \quad \left. \frac{\partial A_a}{\partial t} \right|_s = \left. \frac{\partial A_a}{\partial t} \right|_b - \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left\{ (V_{as} - a_s) + (V_{ap} - a_p) \right\} \cdot \left(\left. \frac{\partial A_a}{\partial t} \right|_c - \left. \frac{\partial A_a}{\partial t} \right|_b \right)$$

$$; \quad \left. \frac{\partial A_a}{\partial t} \right|_b = \left. \frac{\partial A_a}{\partial t} \right|_p = \frac{A_{ap} - A_{ab}}{\Delta t}, \quad \left. \frac{\partial A_a}{\partial t} \right|_c = \frac{A_{ae} - A_{ac}}{\Delta t}$$

$$; \quad (s, p) = \frac{a_s}{\rho_{as}} + \frac{a_p}{\rho_{ap}}$$

$$; \quad [s, p] = \frac{a_s}{A_{as}} \left(\left. \frac{\partial A}{\partial t} \right|_s + V_{as} \left. \frac{\partial A}{\partial x} \right|_s \right) + \frac{a_p}{A_{ap}} \left(\left. \frac{\partial A}{\partial t} \right|_p + V_{ap} \left. \frac{\partial A}{\partial x} \right|_{sp} \right)$$

$$\begin{aligned} & ; \quad \|s, p\| = f_{Ds} \frac{1}{4R_{as}} \frac{1}{2} |V_{as}| V_{as} + f_{Dp} \frac{1}{4R_{ap}} \frac{1}{2} |V_{ap}| V_{ap} \\ & ; \quad \langle s, p \rangle = m'_s \frac{V_{as} - a_s}{\rho_{as} A_{as}} + m'_p \frac{V_{ap} - a_p}{\rho_{ap} A_{ap}} \end{aligned}$$

ここで， V_{ap} が境界条件として与えられるとき，次式を得る．

$$\rho_{ap} = \frac{V_{ap} - V_{as} + \frac{1}{2}(s, p)\rho_{as} - \frac{1}{2}[s, p]\Delta t + \frac{1}{2}\|s, p\|\Delta t - \frac{1}{2}\langle s, ep \rangle \Delta t}{\frac{1}{2}(s, p)} \dots (3.46)$$

$$\therefore P_{ap} = \left(\frac{p_{a0}}{\rho_{a0}^\gamma} \right) \rho_{ap}^\gamma, \quad a_p = \sqrt{\gamma \frac{p_{ap}}{\rho_{ap}}} \dots \dots \dots (3.47)$$

一方， ρ_{ap} (or p_{ap})が境界条件として与えられるとき次式を得る．

$$V_{ap} = V_{as} + \frac{1}{2}(s, p)(\rho_{ap} - \rho_{as}) + \frac{1}{2}[s, p]\Delta t - \frac{1}{2}\|s, p\|\Delta t + \frac{1}{2}\langle s, p \rangle \Delta t \dots (3.48)$$

(3) 下流端断面における計算

① 第 1 ステップ

図 3-4 に示すような特性曲線 Φ (式 (3.7)，+符号) は次式のように表わされる．

$$x_p - x_s = (V_{ab} + a_b) \Delta t \dots \dots \dots (3.49)$$

また，特性方程式 (式 (3.8)，上符号) は次式のように表される．

$$\begin{aligned} V_{ap} - V_{ar} + \frac{a_r}{\rho_{ar}} (\rho_{ap} - \rho_{ar}) + \frac{a_r}{A_{ar}} \left\{ \frac{\partial A_a}{\partial t} \Big|_r + V_{ar} \frac{\partial A_a}{\partial x} \Big|_r \right\} \Delta t \\ + f_{Dr} \frac{1}{4R_{ar}} \frac{1}{2} |V_{ar}| V_{ar} \Delta t - m'_r \frac{V_{ar} - a_r}{\rho_{ar} A_{ar}} \Delta t = 0 \dots \dots (3.50) \end{aligned}$$

$$; \quad a_r = \sqrt{\gamma \frac{p_{ar}}{\rho_{ar}}}, \quad p_{ar} = \left(\frac{p_0}{\rho_0^\gamma} \right) \rho_{ar}^\gamma$$

$$\begin{aligned}
& ; \quad \left. \frac{\partial A_a}{\partial x} \right|_r = \frac{A_{ab} - A_{af}}{\Delta x} \\
& ; \quad \left. \frac{\partial A_a}{\partial t} \right|_r = \left. \frac{\partial A_a}{\partial t} \right|_b - \frac{\Delta t}{\Delta x} (V_{ab} + a_b) \cdot \left(\left. \frac{\partial A_a}{\partial t} \right|_b - \left. \frac{\partial A_a}{\partial t} \right|_f \right) \\
& ; \quad \left. \frac{\partial A_a}{\partial t} \right|_b = \left. \frac{\partial A_a}{\partial t} \right|_p = \frac{A_{ap} - A_{ab}}{\Delta t}, \quad \left. \frac{\partial A_a}{\partial t} \right|_f = \frac{A_{ad} - A_{af}}{\Delta t}
\end{aligned}$$

ここで， V_{ap} が境界条件として与えられるとき，次式を得る．

$$\begin{aligned}
& -V_{ap} + V_{ar} + a_r - \frac{a_r}{A_{ar}} \left(\left. \frac{\partial A_a}{\partial t} \right|_r + V_{ar} \left. \frac{\partial A_a}{\partial x} \right|_r \right) \Delta t \\
& - f_{Dr} \frac{1}{4R_{ar}} \frac{1}{2} |V_{ar}| V_{ar} \Delta t + m'_r \frac{V_{ar} - a_r}{\rho_{ar} A_{ar}} \Delta t \\
\rho_{ap} = & \frac{\dots\dots\dots}{\frac{a_r}{\rho_{ar}}} \dots\dots\dots (3.51)
\end{aligned}$$

$$\therefore P_{ap} = \left(\frac{p_{a0}}{\rho_{a0}^\gamma} \right) \rho_{ap}^\gamma, \quad a_p = \sqrt{\gamma \frac{p_{ap}}{\rho_{ap}}} \dots\dots\dots (3.52)$$

一方， ρ_{ap} (or p_{ap})が境界条件として与えられるとき次式を得る．

$$\begin{aligned}
V_{ap} = & V_{ar} - \frac{a_r}{\rho_{ar}} (\rho_{ap} - \rho_{ar}) - \frac{a_r}{A_{ar}} \left(\left. \frac{\partial A_a}{\partial t} \right|_r + V_{ar} \left. \frac{\partial A_a}{\partial x} \right|_r \right) \Delta t \\
& - f_{Dr} \frac{1}{4R_{ar}} \frac{1}{2} |V_{ar}| V_{ar} \Delta t + m'_r \frac{V_{ar} - a_r}{\rho_{ar} A_{ar}} \Delta t \dots\dots\dots (3.53)
\end{aligned}$$

② 第 2 ステップ

特性曲線 Φ (式 (3.7)，+符号) より，

$$x_p - x_r = \frac{1}{2} \left\{ (V_{ar} + a_r) + (V_{ap} + a_p) \right\} \cdot \Delta t \dots\dots\dots (3.54)$$

特性方程式 (式 (3.8)，上符号) より，

$$\begin{aligned}
& V_{a\,p} - V_{a\,r} + \frac{1}{2}(r, p)(\rho_{a\,p} - \rho_{a\,r}) \\
& \quad + \frac{1}{2}[r, p]\Delta t + \frac{1}{2}\|r, p\|\Delta t - \frac{1}{2}\langle r, p \rangle \Delta t = 0 \dots\dots (3.55) \\
& ; \quad a_p = \sqrt{\gamma \frac{p_{a\,p}}{\rho_{a\,p}}}, \quad p_{a\,p} = \left(\frac{p_{a0}}{\rho_{a0}^\gamma} \right) \rho_{a\,p}^\gamma \\
& ; \quad a_r = \sqrt{\gamma \frac{p_{a\,r}}{\rho_{a\,r}}}, \quad p_{a\,r} = \left(\frac{p_0}{\rho_0^\gamma} \right) \rho_{a\,r}^\gamma \\
& ; \quad \left. \frac{\partial A_a}{\partial x} \right|_{rp} = \frac{A_{a\,p} - A_{a\,b}}{\Delta x} \\
& ; \quad \left. \frac{\partial A_a}{\partial t} \right|_r = \left. \frac{\partial A_a}{\partial t} \right|_b - \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} \{ (V_{a\,r} + a_r) + (V_{a\,p} + a_p) \} \cdot \left(\left. \frac{\partial A_a}{\partial t} \right|_b - \left. \frac{\partial A_a}{\partial t} \right|_f \right) \\
& ; \quad \left. \frac{\partial A_a}{\partial t} \right|_b = \left. \frac{\partial A_a}{\partial t} \right|_p = \frac{A_{a\,p} - A_{a\,b}}{\Delta t}, \quad \left. \frac{\partial A_a}{\partial t} \right|_f = \frac{A_{a\,d} - A_{a\,f}}{\Delta t} \\
& ; \quad (r, p) = \frac{a_r}{\rho_{a\,r}} + \frac{a_p}{\rho_{a\,p}} \\
& ; \quad [r, p] = \frac{a_r}{A_{a\,r}} \left(\left. \frac{\partial A}{\partial t} \right|_r + V_{a\,r} \left. \frac{\partial A}{\partial x} \right|_r \right) + \frac{a_p}{A_{a\,p}} \left(\left. \frac{\partial A}{\partial t} \right|_p + V_{a\,p} \left. \frac{\partial A}{\partial x} \right|_{rp} \right) \\
& ; \quad \|r, p\| = f_{Dr} \frac{1}{4R_{a\,r}} \frac{1}{2} |V_{a\,r}| V_{a\,r} + f_{Dp} \frac{1}{4R_{a\,p}} \frac{1}{2} |V_{a\,p}| V_{a\,p} \\
& ; \quad \langle r, p \rangle = m'_r \frac{V_{a\,r} - a_r}{\rho_{a\,r} A_{a\,r}} + m'_p \frac{V_{a\,p} - a_p}{\rho_{a\,p} A_{a\,p}}
\end{aligned}$$

ここで， $V_{a\,p}$ が境界条件として与えられるとき，次式を得る．

$$\rho_{a\,p} = \frac{-V_{a\,p} + V_{a\,r} + \frac{1}{2}(r, p)\rho_{a\,r} - \frac{1}{2}[r, p]\Delta t - \frac{1}{2}\|r, p\|\Delta t + \frac{1}{2}\langle r, p \rangle \Delta t}{\frac{1}{2}(r, p)} \dots\dots (3.56)$$

また， $\rho_{a\,p}$ (or $p_{a\,p}$)が境界条件として与えられるとき，次式を得る．

$$V_{a\,p} = V_{a\,r} - \frac{1}{2}(r, p)(\rho_{a\,p} - \rho_{a\,r}) - \frac{1}{2}[r, p]\Delta t - \frac{1}{2}\|r, p\|\Delta t + \frac{1}{2}\langle r, p \rangle \Delta t \dots\dots (3.57)$$

3.2.2 マンホールにおける空気の流れの解析法 ^{2) ~ 4)}

マンホール内での空気塊の質量保存則は，次のように表される．

$$F_M \frac{d}{dt} \left\{ \rho_M (h_G - h_M) \right\} = A_{au} \rho_M V_{au} - A_{ad} \rho_M V_{ad} - m_M \dots \dots (3.58)$$

$$; \quad m_M = \rho_M F_A \left(\frac{p_0}{p_M} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{p_M}{\rho_M} \left\{ 1 - \left(\frac{p_0}{p_M} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right\}} \quad (\text{排気時})$$

$$; \quad m_M = -\rho_0 F_A \left(\frac{p_M}{p_0} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{p_0}{\rho_0} \left\{ 1 - \left(\frac{p_M}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right\}} \quad (\text{吸気時})$$

ここに， F_M ：マンホールの断面積， h_G ：マンホール深， h_M ：マンホール位置の水深， ρ_M ：マンホール内の空気密度， p_M ：マンホール内空気圧， ρ_0 ：大気密度， p_0 ：大気圧， A_{au} ：流入管渠の下流端の空気断面積， A_{ad} ：流出管渠の上流端の空気断面積， V_{au} ：流入管渠の下流端の風速， V_{ad} ：流出管渠の上流端の風速， m_M ：吸排気孔を通じて流出入する空気の質量流量， F_A ：マンホール蓋の吸排気管の断面積の総和， x ：距離， t ：時間．

ここで，式（3.58）を $t=t$ から $t=t+\Delta t$ まで積分する．

$$F_M h_G d\rho_M - F_M d(\rho_M h_M) = \int_t^{t+\Delta t} (A_{au} \rho_{Mu} V_{au} - A_{ad} \rho_{Md} V_{ad} - m_M) dt$$

ここで，上式の右辺において，点 p の値を点 b の値で近似する．

$$\begin{aligned} F_M h_G (\rho_{Mp} - \rho_{Mb}) - F_M (\rho_{Mp} h_{Mp} - \rho_{Mb} h_{Mb}) \\ = (A_{abu} \rho_{Mb} V_{abu} - A_{abd} \rho_{Mb} V_{abd} - m_{Mb}) \Delta t \dots \dots (3.59) \end{aligned}$$

したがって，次式を得る．

$$\rho_{Mp} = \frac{F_M \rho_{Mb} (h_G - h_{Mb}) + (A_{abu} \rho_{Mb} V_{abu} - A_{abd} \rho_{Mb} V_{abd} - m_{Mb}) \Delta t}{F_M (h_G - h_{Mp})} \dots \dots (3.60)$$

$$; m_{Mb} = \rho_{Mb} F_A \left(\frac{p_0}{p_{Mb}} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \cdot \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{p_{Mb}}{\rho_{Mb}} \left\{ 1 - \left(\frac{p_0}{p_{Mb}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right\}} \quad (\text{排気時})$$

$$; m_{Mb} = -\rho_0 F_A \left(\frac{p_{Mb}}{p_0} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \cdot \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{p_0}{\rho_0} \left\{ 1 - \left(\frac{p_{Mb}}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right\}} \quad (\text{吸気時})$$

① 第 1 ステップ

図 3-5 に示すような特性曲線 Φ に沿って，特性方程式（式（3.8），上符号）を点 r から点 p_u まで積分する．

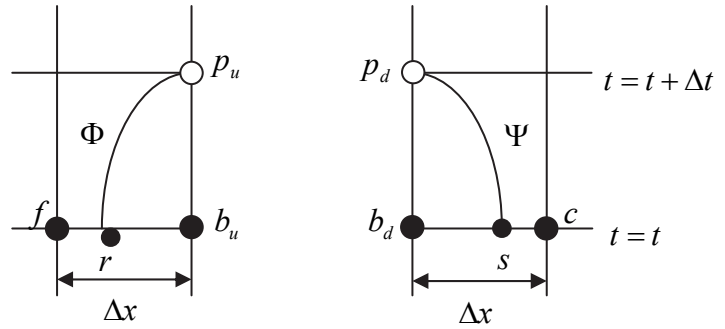


図 3-5 マンホール地点における特性曲線

ここで，点 p_u の値を点 r の値で近似すると，次式を得る．

$$\begin{aligned} V_{apu} - V_{ar} + \frac{a_r}{\rho_{Mr}} (\rho_{Mp} - \rho_{Mr}) + \frac{a_r}{A_{ar}} \left(\frac{\partial A_a}{\partial t} \Big|_r + V_{ar} \frac{\partial A_a}{\partial x} \Big|_r \right) \Delta t \\ + f_{Dr} \frac{1}{4R_{ar}} \frac{1}{2} |V_{ar}| V_{ar} \Delta t - m'_r \frac{V_{ar} - a_r}{\rho_{Mr} A_{ar}} \Delta t = 0 \dots \dots \dots (3.61) \end{aligned}$$

したがって，次式を得る．

$$\begin{aligned} V_{apu} = V_{ar} - \frac{a_r}{\rho_{Mr}} \rho_{Mp} + a_r + \frac{a_r}{A_{ar}} \left(\frac{\partial A_a}{\partial t} \Big|_r + V_{ar} \frac{\partial A_a}{\partial x} \Big|_r \right) \Delta t \\ - f_{Dr} \frac{1}{4R_{ar}} \frac{1}{2} |V_{ar}| V_{ar} \Delta t + m'_r \frac{V_{ar} - a_r}{\rho_{Mr} A_{ar}} \Delta t \dots \dots \dots (3.62) \end{aligned}$$

次に，図 3-5 に示す特性曲線 Ψ に沿って，特性方程式（式（3.8），下符号）を点 s から点 p_d まで積分する．

ここで，点 p_d の値を点 s の値で近似すると，次式を得る．

$$V_{apd} = V_{as} + \frac{a_s}{\rho_{Ms}} \rho_{Mp} - a_s + \frac{a_s}{A_{as}} \left(\frac{\partial A_a}{\partial t} \Big|_s + V_{as} \frac{\partial A_a}{\partial x} \Big|_s \right) \Delta t$$

$$-f_{Ds} \frac{1}{4R_{as}} \frac{1}{2} |V_{as}| V_{as} \Delta t + \frac{1}{2} m'_s \frac{V_{as} - a_s}{\rho_{Ms} A_{as}} \Delta t \dots\dots\dots (3.63)$$

また，式 (3.60) より，

$$p_{Mp} = \left(\frac{p_0}{\rho_0^\gamma} \right) \rho_{Mp}^\gamma, \quad a_p = \sqrt{\gamma \frac{p_{Mp}}{\rho_{Mp}}} \dots\dots\dots (3.64)$$

② 第 2 ステップ

式 (3.58) を $t=t$ から $t=t+\Delta t$ まで積分する．

$$\begin{aligned} & F_M h_G (\rho_{Mp} - \rho_{Mb}) - F_M (\rho_{Mp} h_{Mp} - \rho_{Mb} h_{Mb}) \\ &= \frac{1}{2} \{ (A_{bu} \rho_{Mb} V_{bu} - A_{bd} \rho_{Mb} V_{bd} - m_{Mb}) \\ & \quad + (A_{pu} \rho_{Mp} V_{pu} - A_{pd} \rho_{Mp} V_{pd} - m_{Mp}) \} \Delta t \dots\dots\dots (3.65) \end{aligned}$$

したがって，次式を得る．

$$\rho_{Mp} = \frac{F_M \rho_{Mb} (h_G - h_{Mb}) - \frac{1}{2} \{ (A_{bu} \rho_{Mb} V_{bu} - A_{bd} \rho_{Mb} V_{bd} - m_{Mb}) + (A_{pu} \rho_{Mp} V_{pu} - A_{pd} \rho_{Mp} V_{pd} - m_{Mp}) \} \Delta t}{F_M (h_G - h_{Mp})} \dots\dots (3.66)$$

また，図 3-5 に示すような特性曲線 Φ に沿って，特性方程式（式 (3.8)，上符号）を点 r から点 p_u まで積分する．

$$\begin{aligned} & (V_{apu} - V_{ar}) + \frac{1}{2} \left(\frac{a_r}{\rho_r} + \frac{a_p}{\rho_p} \right) (\rho_p - \rho_r) \\ & + \frac{1}{2} \left\{ \frac{a_r}{A_{ar}} \left(\frac{\partial A_a}{\partial t} \Big|_r + V_{ar} \frac{\partial A_a}{\partial x} \Big|_r \right) + \frac{a_p}{A_{apu}} \left(\frac{\partial A_a}{\partial t} \Big|_{rp} + V_{apu} \frac{\partial A_a}{\partial x} \Big|_{rp} \right) \right\} \Delta t \\ & + \frac{1}{2} \left(f_{Dr} \frac{1}{4R_{ar}} \frac{1}{2} |V_{ar}| V_{ar} + f_{Dpu} \frac{1}{4R_{apu}} \frac{1}{2} |V_{apu}| V_{apu} \right) \Delta t \\ & - \frac{1}{2} \left(m'_r \frac{V_{ar} - a_r}{\rho_r A_{ar}} + m'_{pr} \frac{V_{apu} - a_p}{\rho_p A_{apu}} \right) \Delta t = 0 \quad \dots\dots\dots (3.67) \end{aligned}$$

したがって，次式を得る．

$$\begin{aligned}
V_{a\ pu} = & V_{a\ r} - \frac{1}{2} \left(\frac{a_r}{\rho_r} + \frac{a_p}{\rho_p} \right) (\rho_p - \rho_r) \\
& - \frac{1}{2} \left\{ \frac{a_r}{A_{a\ r}} \left(\frac{\partial A_a}{\partial t} \right)_r + V_{a\ r} \frac{\partial A_a}{\partial x} \Big|_r \right\} + \frac{a_p}{A_{a\ pu}} \left(\frac{\partial A_a}{\partial t} \Big|_{rp} + V_{a\ pu} \frac{\partial A_a}{\partial x} \Big|_{rp} \right) \Bigg\} \Delta t \\
& - \frac{1}{2} \left(f_{D\ r} \frac{1}{4R_{a\ r}} \frac{1}{2} |V_{a\ r}| V_{a\ r} + f_{D\ pu} \frac{1}{4R_{a\ pu}} \frac{1}{2} |V_{a\ pu}| V_{a\ pu} \right) \Delta t \\
& + \frac{1}{2} \left(m'_r \frac{V_{a\ r} - a_r}{\rho_r A_{a\ r}} + m'_{pr} \frac{V_{a\ pu} - a_p}{\rho_p A_{a\ pu}} \right) \Delta t \quad \dots\dots\dots (3.68)
\end{aligned}$$

次に，図 3-5 に示す特性曲線 Ψ （式（3.8），下符号）に沿って，特性方程式を点 s から点 p_d まで積分する．

$$\begin{aligned}
(V_{a\ pd} - V_{a\ s}) - \frac{1}{2} \left(\frac{a_s}{\rho_s} + \frac{a_p}{\rho_p} \right) (\rho_p - \rho_s) \\
- \frac{1}{2} \left\{ \frac{a_s}{A_{a\ s}} \left(\frac{\partial A_a}{\partial t} \right)_s + V_{a\ s} \frac{\partial A_a}{\partial x} \Big|_s \right\} + \frac{a_p}{A_{a\ pd}} \left(\frac{\partial A_a}{\partial t} \Big|_{sp} + V_{a\ pd} \frac{\partial A_a}{\partial x} \Big|_{sp} \right) \Bigg\} \Delta t \\
+ \frac{1}{2} \left(f_{D\ s} \frac{1}{4R_{a\ s}} \frac{1}{2} |V_{a\ s}| V_{a\ s} + f_{D\ pd} \frac{1}{4R_{a\ pd}} \frac{1}{2} |V_{a\ pd}| V_{a\ pd} \right) \Delta t \\
- \frac{1}{2} \left(m'_s \frac{V_{a\ s} + a_s}{\rho_s A_{a\ s}} + m'_{ps} \frac{V_{a\ pd} + a_p}{\rho_p A_{a\ pd}} \right) \Delta t = 0 \quad \dots\dots\dots (3.69)
\end{aligned}$$

したがって，次式を得る．

$$\begin{aligned}
V_{a\ pd} = & V_{a\ s} + \frac{1}{2} \left(\frac{a_s}{\rho_s} + \frac{a_p}{\rho_p} \right) (\rho_p - \rho_s) \\
& + \frac{1}{2} \left\{ \frac{a_s}{A_{a\ s}} \left(\frac{\partial A_a}{\partial t} \right)_s + V_{a\ s} \frac{\partial A_a}{\partial x} \Big|_s \right\} + \frac{a_p}{A_{a\ pd}} \left(\frac{\partial A_a}{\partial t} \Big|_{sp} + V_{a\ pd} \frac{\partial A_a}{\partial x} \Big|_{sp} \right) \Bigg\} \Delta t \\
& - \frac{1}{2} \left(f_{D\ s} \frac{1}{4R_{a\ s}} \frac{1}{2} |V_{a\ s}| V_{a\ s} + f_{D\ pd} \frac{1}{4R_{a\ pd}} \frac{1}{2} |V_{a\ pd}| V_{a\ pd} \right) \Delta t \\
& + \frac{1}{2} \left(m'_s \frac{V_{a\ s} + a_s}{\rho_s A_{a\ s}} + m'_{ps} \frac{V_{a\ pd} + a_p}{\rho_p A_{a\ pd}} \right) \Delta t \quad \dots\dots\dots (3.70)
\end{aligned}$$

3.2.3 単位距離あたりの排気質量流量 m' の取り扱い

取付管からの単位距離あたり排気質量流量 m' の取り扱いについて述べる．なお， F_l は Δx 間の取付管断面積の総和である．

m'_r について； $m'_r = \frac{m_r}{\Delta x}$ である．ここで，

$$\rho_r = \frac{1}{2}(\rho_f + \rho_b), \quad p_r = \left(\frac{p_0}{\rho_0^\gamma} \right) \rho_r^\gamma \dots\dots\dots (3.71)$$

と表すとする， m_r は次式で示される．

$$\left. \begin{aligned} m_r &= \rho_r F_{lr} \left(\frac{p_0}{p_r} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{p_r}{\rho_r} \left\{ 1 - \left(\frac{p_0}{p_r} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right\}} && \text{(排気時)} \\ m_r &= -\rho_0 F_{lr} \left(\frac{p_r}{p_0} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{p_0}{\rho_0} \left\{ 1 - \left(\frac{p_r}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right\}} && \text{(吸気時)} \end{aligned} \right\} \dots (3.72)$$

m'_{pr} について； $m'_{pr} = \frac{m_{pr}}{\Delta x}$ である．ここで，

$$\rho_{pr} = \frac{1}{2}(\rho_d + \rho_p), \quad p_{pr} = \left(\frac{p_0}{\rho_0^\gamma} \right) \rho_{pr}^\gamma \dots\dots\dots (3.73)$$

と表すとする， m_{pr} は次式で示される．

$$\left. \begin{aligned} m_{pr} &= \rho_{pr} F_{lr} \left(\frac{p_0}{p_{pr}} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{p_{pr}}{\rho_{pr}} \left\{ 1 - \left(\frac{p_0}{p_{pr}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right\}} && \text{(排気時)} \\ m_{pr} &= -\rho_0 F_{lr} \left(\frac{p_{pr}}{p_0} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{p_0}{\rho_0} \left\{ 1 - \left(\frac{p_{pr}}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right\}} && \text{(吸気時)} \end{aligned} \right\} \dots (3.74)$$

m'_s について； $m'_s = \frac{m_s}{\Delta x}$ である．ここで，

$$\rho_s = \frac{1}{2}(\rho_b + \rho_c), \quad p_s = \left(\frac{p_0}{\rho_0^\gamma} \right) \rho_s^\gamma \dots\dots\dots (3.75)$$

と表すとする、 m_s は次式で示される。

$$\left. \begin{aligned} m_s &= \rho_s F_{ls} \left(\frac{p_0}{p_s} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{p_s}{\rho_s} \left\{ 1 - \left(\frac{p_0}{p_s} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right\}} && \text{(排気時)} \\ m_s &= -\rho_0 F_{ls} \left(\frac{p_s}{p_0} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{p_0}{\rho_0} \left\{ 1 - \left(\frac{p_s}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right\}} && \text{(吸気時)} \end{aligned} \right\} \dots (3.76)$$

m'_{ps} について； $m'_{ps} = \frac{m_{ps}}{\Delta x}$ である。ここで、

$$\rho_{ps} = \frac{1}{2}(\rho_p + \rho_e), \quad p_{ps} = \left(\frac{p_0}{\rho_0^\gamma} \right) \rho_{ps}^\gamma \dots\dots\dots (3.77)$$

と表すとする、 m_{ps} は次式で示される。

$$\left. \begin{aligned} m_{ps} &= \rho_{ps} F_{ls} \left(\frac{p_0}{p_{ps}} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{p_{ps}}{\rho_{ps}} \left\{ 1 - \left(\frac{p_0}{p_{ps}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right\}} && \text{(排気時)} \\ m_{ps} &= -\rho_0 F_{ls} \left(\frac{p_{ps}}{p_0} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{p_0}{\rho_0} \left\{ 1 - \left(\frac{p_{ps}}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right\}} && \text{(吸気時)} \end{aligned} \right\} \dots (3.78)$$

3.2.4 雨水排水管渠における雨水の流れの解析法

雨水の流れについての連続の式は、次式のように表される。

$$\frac{\partial h}{\partial t} + V_w \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{c_w^2}{g} \frac{\partial V_w}{\partial x} = 0 \dots\dots\dots (3.79)$$

$$; \quad c_w = \sqrt{g \frac{A_w}{B}} \quad (c_w: \text{微小擾乱の伝播速度})$$

運動方程式は、次式のように表される。

$$\frac{1}{g} \frac{\partial V_w}{\partial t} + \frac{V_w}{g} \frac{\partial V_w}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{1}{g\rho_w} \frac{\partial p'_a}{\partial x} - S_0 + \frac{n^2 |V_w| V_w}{R_w^{4/3}} = 0 \dots\dots\dots (3.80)$$

式 (3.80) + $\lambda \times$ 式 (3.79) より, (λ : 媒介変数)

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial x} + \lambda \frac{\partial h}{\partial t} + \lambda V_w \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{g\rho_w} \frac{\partial p'_a}{\partial x} - S_0 + \frac{n^2 |V_w| V_w}{R_w^{4/3}} \\ + \frac{1}{g} \frac{\partial V_w}{\partial t} + \frac{V_w}{g} \frac{\partial V_w}{\partial x} + \lambda \frac{c_w^2}{g} \frac{\partial V_w}{\partial x} = 0 \\ \frac{1}{g} \left\{ \frac{\partial V_w}{\partial x} (V_w + \lambda c_w^2) + \frac{\partial V_w}{\partial t} \right\} + \lambda \left\{ \frac{\partial h}{\partial x} \left(V_w + \frac{1}{\lambda} \right) + \frac{\partial h}{\partial t} \right\} + \frac{1}{g\rho_w} \frac{\partial p'_a}{\partial x} \\ - S_0 + \frac{n^2 |V_w| V_w}{R_w^{4/3}} = 0 \dots\dots\dots (3.81) \end{aligned}$$

$$\frac{dx}{dt} = V_w + \lambda c_w^2 = V_w + \frac{1}{\lambda} \dots\dots\dots (3.82)$$

$$\lambda c_w^2 = \frac{1}{\lambda}$$

$$\lambda = \pm \frac{1}{c_w} \dots\dots\dots (3.83)$$

$$\frac{dx}{dt} = V_w \pm c_w \dots\dots\dots (3.84)$$

よって, 式 (3.84) のもとで, 次式の特性方程式が成り立つ.

$$\frac{1}{g} \frac{dV_w}{dt} \pm \frac{1}{c_w} \frac{dh}{dt} + \frac{1}{g\rho_w} \frac{\partial p'_a}{\partial x} - S_0 + \frac{n^2 |V_w| V_w}{R_w^{4/3}} = 0 \dots\dots\dots (3.85)$$

(1) 内点断面における計算

① 第 1 ステップ

図 3-6 に示すような特性曲線 C_+ (式 (3.84), + 符号) を点 r から点 p まで積分する.

$$\int_{x_r}^{x_p} dx = \int_t^{t+\Delta t} (V_w + c_w) dt \text{ において, } V_{wr}, V_{wp}, c_{wr}, c_{wp} \text{ を } V_{wb}, c_{wb} \text{ で}$$

近似すると, 次式を得る.

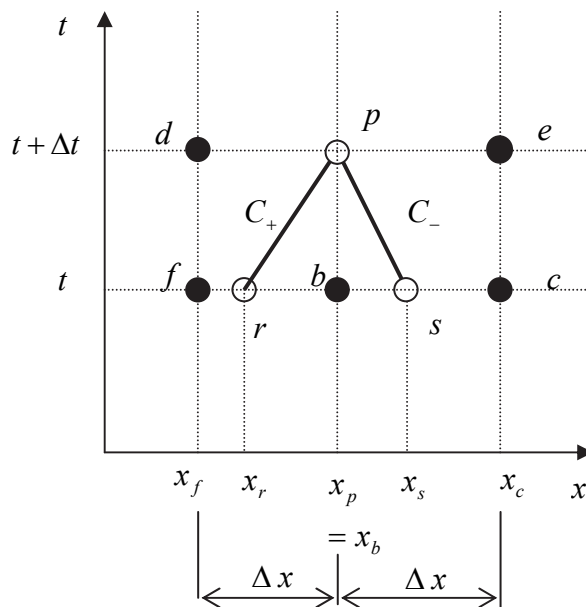


図 3-6 特性曲線（内点断面）

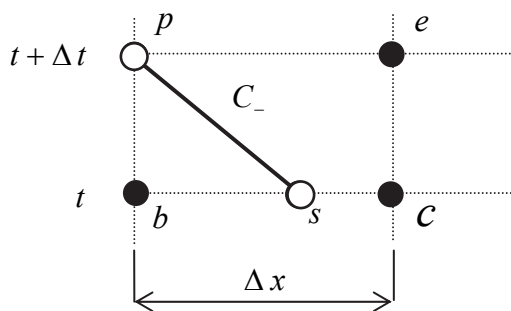


図 3-7 特性曲線（上流端断面）

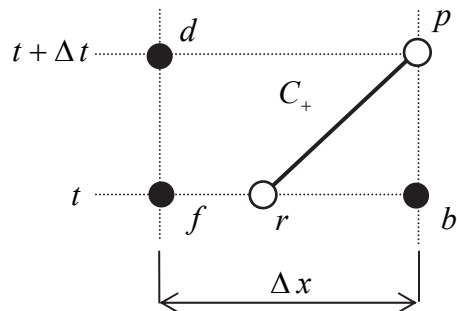


図 3-8 特性曲線（下流端断面）

$$x_p - x_r = (V_{wb} + c_{wb})\Delta t \dots\dots\dots (3.86)$$

ここで，式（3.86）および点 f ， b 間で V_w や h が線形変化している仮定より，

$$\left. \begin{aligned} V_{wr} &= V_{wb} - \frac{V_{wb} - V_{wf}}{x_b - x_f} (V_{wb} + c_{wb})\Delta t \\ h_r &= h_b - \frac{h_b - h_f}{x_b - c_{wf}} (V_{wb} + c_{wb})\Delta t \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.87)$$

特性方程式（式（3.85），上符号）を点 r から点 p まで積分する．

$$\frac{1}{g} \int_{V_{wr}}^{V_{wp}} dV_w + \int_{h_r}^{h_p} \frac{1}{c_w} dh + \frac{1}{g} \int_t^{t+\Delta t} \frac{1}{\rho_w} \frac{\partial p'_a}{\partial x} dt - \int_t^{t+\Delta t} \left(S_0 - \frac{n^2 |V_w| V_w}{R_w^{4/3}} \right) dt = 0$$

において、 p 点の値を r 点の値で近似することとすると、次式を得る。

$$\frac{1}{g} (V_{wp} - V_{wr}) + \frac{1}{c_{wr}} (h_p - h_r) + \frac{1}{g \rho_w} \left. \frac{\partial p'_a}{\partial x} \right|_r \Delta t - \left(S_0 - \frac{n^2 |V_{wr}| V_{wr}}{R_{wr}^{4/3}} \right) \Delta t = 0 \dots (3.88)$$

図 3-6 に示すような特性曲線 C_- (式 (3.84), $-$ 符号) を点 s から点 p まで積分する。

$$\int_{x_s}^{x_p} dx = \int_t^{t+\Delta t} (V_w - c_w) dt \quad \text{において, } V_{ws}, V_{wp}, c_{ws}, c_{wp} \text{ を } V_{wb}, c_{wb}$$

で近似することとすると、次式を得る。

$$x_p - x_s = (V_{wb} - c_{wb}) \Delta t \dots \dots \dots (3.89)$$

ここで、式 (3.89) および点 b, c 間で V_w や h が線形変化している仮定より、

$$\left. \begin{aligned} V_{ws} &= V_{wb} - \frac{V_{wc} - V_{wb}}{x_c - x_b} (V_{wb} - c_{wb}) \Delta t \\ h_s &= h_b - \frac{h_c - h_b}{x_c - x_b} (V_{wb} - c_{wb}) \Delta t \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3.90)$$

特性方程式 (式 (3.85), 下符号) を点 s から点 p まで積分する。

$$\frac{1}{g} \int_{V_{ws}}^{V_{wp}} dV_w - \int_{h_s}^{h_p} \frac{1}{c_w} dh + \frac{1}{g} \int_t^{t+\Delta t} \frac{1}{\rho_w} \frac{\partial p'_a}{\partial x} dt - \int_t^{t+\Delta t} \left(S_0 - \frac{n^2 |V_w| V_w}{R_w^{4/3}} \right) dt = 0$$

において、 p 点の値を s 点の値で近似することとすると、次式を得る。

$$\frac{1}{g} (V_{wp} - V_{ws}) - \frac{1}{c_{ws}} (h_p - h_s) + \frac{1}{g \rho_w} \left. \frac{\partial p'_a}{\partial x} \right|_s \Delta t - \left(S_0 - \frac{n^2 |V_{ws}| V_{ws}}{R_{ws}^{4/3}} \right) \Delta t = 0 \dots (3.91)$$

式 (3.88) $\times \frac{1}{c_{ws}}$ + 式 (3.91) $\times \frac{1}{c_{wr}}$ より ,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{g} \left(\frac{1}{c_{ws}} + \frac{1}{c_{wr}} \right) V_{wp} - \frac{1}{g} \left(\frac{V_{wr}}{c_{ws}} + \frac{V_{ws}}{c_{wr}} \right) - \left(\frac{h_r}{c_{wr} c_{ws}} - \frac{h_s}{c_{ws} c_{wr}} \right) \\ & + \frac{1}{g \rho_w} \left(\frac{1}{c_{ws}} \frac{\partial p'_a}{\partial x} \Big|_r + \frac{1}{c_{wr}} \frac{\partial p'_a}{\partial x} \Big|_s \right) \Delta t \\ & - \left\{ \frac{1}{c_{ws}} \left(S_0 - \frac{n^2 |V_{wr}| |V_{wr}|}{R_{wr}^{4/3}} \right) + \frac{1}{c_{ws}} \left(S_0 - \frac{n^2 |V_{ws}| |V_{ws}|}{R_{ws}^{4/3}} \right) \right\} \Delta t = 0 \end{aligned}$$

したがって、次式を得る .

$$\begin{aligned} & \left(\frac{V_{wr}}{c_{ws}} + \frac{V_{ws}}{c_{wr}} \right) + \frac{g}{c_{wr} c_{ws}} (h_r - h_s) \\ & - \frac{1}{\rho_w} \left(\frac{1}{c_{ws}} \frac{\partial p'_a}{\partial x} \Big|_r + \frac{1}{c_{wr}} \frac{\partial p'_a}{\partial x} \Big|_s \right) \Delta t \\ & + g \left\{ \frac{1}{c_{ws}} \left(S_0 - \frac{n^2 |V_{wr}| |V_{wr}|}{R_{wr}^{4/3}} \right) + \frac{1}{c_{wr}} \left(S_0 - \frac{n^2 |V_{ws}| |V_{ws}|}{R_{ws}^{4/3}} \right) \right\} \Delta t \\ V_{wp} = & \frac{\frac{1}{c_{ws}} + \frac{1}{c_{wr}}}{\frac{1}{c_{ws}} + \frac{1}{c_{wr}}} \dots (3.92) \end{aligned}$$

また、式 (3.88) - 式 (3.91) より ,

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{g} (V_{wr} - V_{ws}) + \left(\frac{1}{c_{wr}} + \frac{1}{c_{ws}} \right) h_p - \frac{h_r}{c_{wr}} - \frac{h_s}{c_{ws}} + \frac{1}{g \rho_w} \left(\frac{\partial p'_a}{\partial x} \Big|_r - \frac{\partial p'_a}{\partial x} \Big|_s \right) \Delta t \\ & + \left(\frac{n^2 |V_{wr}| |V_{wr}|}{R_{wr}^{4/3}} - \frac{n^2 |V_{ws}| |V_{ws}|}{R_{ws}^{4/3}} \right) \Delta t = 0 \dots\dots\dots (3.93) \\ & ; \quad \frac{\partial p'_a}{\partial x} \Big|_r = \frac{p'_{ab} - p'_{af}}{\Delta x}, \quad \frac{\partial p'_a}{\partial x} \Big|_s = \frac{p'_{ac} - p'_{ab}}{\Delta x} \end{aligned}$$

したがって、次式を得る .

$$h_p = \frac{-\frac{1}{g}(V_{wr} - V_{ws}) + \frac{h_r}{c_{wr}} + \frac{h_s}{c_{ws}} - \frac{1}{g\rho_w} \left(\frac{\partial p'_a}{\partial x} \Big|_r - \frac{\partial p'_a}{\partial x} \Big|_s \right) \Delta t - \left(\frac{n^2 |V_{wr}| V_{wr}}{R_{wr}^{4/3}} - \frac{n^2 |V_{ws}| V_{ws}}{R_{ws}^{4/3}} \right) \Delta t}{\frac{1}{c_{wr}} + \frac{1}{c_{ws}}} \dots\dots (3.94)$$

② 第 2 ステップ

特性曲線 C_+ (式 (3.84), + 符号) を点 r から点 p まで積分する.

$$x_p - x_r = \frac{1}{2} \{ (V_{wr} + c_{wr}) + (V_{wp} + c_{wp}) \} \Delta t \dots\dots\dots (3.95)$$

ここで, 式 (3.95) および点 f, b 間で V_w や h が線形変化している仮定より,

$$\left. \begin{aligned} V_{wr} &= V_{wb} - \frac{1}{2} \frac{V_{wb} - V_{wf}}{x_b - x_f} \{ (V_{wr} + c_{wr}) + (V_{wp} + c_{wp}) \} \Delta t \\ h_r &= h_b - \frac{1}{2} \frac{h_b - h_f}{x_b - x_f} \{ (V_{wr} + c_{wr}) + (V_{wp} + c_{wp}) \} \Delta t \end{aligned} \right\} \dots\dots (3.96)$$

次に, 特性方程式 (式 (3.85), 上符号) を点 r から点 p まで積分する.

$$\begin{aligned} \frac{1}{g}(V_{wp} - V_{wr}) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{c_{wr}} + \frac{1}{c_{wp}} \right) (h_p - h_r) + \frac{1}{2g\rho_w} \left(\frac{\partial p'_a}{\partial x} \Big|_r + \frac{\partial p'_a}{\partial x} \Big|_{rp} \right) \Delta t \\ - S_0 \Delta t + \frac{1}{2} \left(\frac{n^2 |V_{wp}| V_{wp}}{R_{wp}^{4/3}} + \frac{n^2 |V_{wr}| V_{wr}}{R_{wr}^{4/3}} \right) \Delta t = 0 \dots (3.97) \end{aligned}$$

$$; \quad \frac{\partial p'_a}{\partial x} \Big|_r = \frac{p'_{ab} - p'_{af}}{\Delta x}, \quad \frac{\partial p'_a}{\partial x} \Big|_{rp} = \frac{p'_{ap} - p'_{ad}}{\Delta x}$$

また, 特性曲線 C_- (式 (3.84), - 符号) を点 s から点 p まで積分する.

$$x_p - x_s = \frac{1}{2} \{ (V_{ws} - c_{ws}) + (V_{wp} - c_{wp}) \} \Delta t \dots \dots \dots (3.98)$$

ここで，式 (3.98) および点 b ， c 間で V_a や ρ_a が線形変化している仮定より，

$$\left. \begin{aligned} V_{ws} &= V_{wb} - \frac{1}{2} \frac{V_{wc} - V_{wb}}{x_c - x_b} \{ (V_{ws} - c_{ws}) + (V_{wp} - c_{wp}) \} \Delta t \\ h_s &= h_b - \frac{1}{2} \frac{h_c - h_b}{x_c - x_b} \{ (V_{ws} - c_{ws}) + (V_{wp} - c_{wp}) \} \Delta t \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3.99)$$

次に，特性方程式 (式 (3.85)，下符号) を点 s から点 p まで積分する．

$$\begin{aligned} \frac{1}{g} (V_{wp} - V_{ws}) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{c_{ws}} + \frac{1}{c_{wp}} \right) (h_p - h_s) + \frac{1}{2g\rho_w} \left(\frac{\partial p'_a}{\partial x} \Big|_s + \frac{\partial p'_a}{\partial x} \Big|_{sp} \right) \Delta t \\ - S_0 \Delta t + \frac{1}{2} \left(\frac{n^2 |V_{wp}| V_{wp}}{R_{wp}^{4/3}} + \frac{n^2 |V_{ws}| V_{ws}}{R_{ws}^{4/3}} \right) \Delta t = 0. \dots (3.100) \end{aligned}$$

$$; \quad \frac{\partial p'_a}{\partial x} \Big|_s = \frac{p'_{ac} - p'_{ab}}{\Delta x}, \quad \frac{\partial p'_a}{\partial x} \Big|_{sp} = \frac{p'_{ae} - p'_{ap}}{\Delta x}$$

$$\text{式 (3.97)} \times \left(\frac{1}{c_{ws}} + \frac{1}{c_{wp}} \right) + \text{式 (3.100)} \times \left(\frac{1}{c_{wr}} + \frac{1}{c_{wp}} \right) \quad \text{より，}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{g} (|s, p| + |r, p|) V_{wp} - \frac{1}{g} (|s, p| V_{wr} + |r, p| V_{ws}) \\ - \frac{1}{2} (|s, p| |r, p| h_r - |r, p| |s, p| h_s) \\ + \frac{1}{2g\rho_w} \left\{ |s, p| \left(\frac{\partial p'_a}{\partial x} \Big|_r + \frac{\partial p'_a}{\partial x} \Big|_{rp} \right) + |r, p| \left(\frac{\partial p'_a}{\partial x} \Big|_s + \frac{\partial p'_a}{\partial x} \Big|_{sp} \right) \right\} \Delta t \\ - (|s, p| + |r, p|) S_0 \Delta t + \frac{1}{2} \left\{ |s, p| \left(\frac{n^2 |V_{wp}| V_{wp}}{R_{wp}^{4/3}} + \frac{n^2 |V_{wr}| V_{wr}}{R_{wr}^{4/3}} \right) \right. \\ \left. + |r, p| \left(\frac{n^2 |V_{wp}| V_{wp}}{R_{wp}^{4/3}} + \frac{n^2 |V_{ws}| V_{ws}}{R_{ws}^{4/3}} \right) \right\} \Delta t = 0 \dots \dots \dots (3.101) \end{aligned}$$

したがって，次式を得る．

$$\begin{aligned}
& (|s, p|V_{wr} + |r, p|V_{ws}) + \frac{g}{2} (|s, p||r, p|h_r - |r, p||s, p|h_s) \\
& - \frac{1}{2\rho_w} \left\{ |s, p| \left(\frac{\partial p'_a}{\partial x} \Big|_r + \frac{\partial p'_a}{\partial x} \Big|_{rp} \right) + |r, p| \left(\frac{\partial p'_a}{\partial x} \Big|_s + \frac{\partial p'_a}{\partial x} \Big|_{sp} \right) \right\} \Delta t \\
& + g (|s, p| + |r, p|) S_0 \Delta t - \frac{g}{2} \left\{ |s, p| \left(\frac{n^2 |V_{wp}| V_{wp}}{R_{wp}^{4/3}} + \frac{n^2 |V_{wr}| V_{wr}}{R_{wr}^{4/3}} \right) \right. \\
& \left. + |r, p| \left(\frac{n^2 |V_{wp}| V_{wp}}{R_{wp}^{4/3}} + \frac{n^2 |V_{ws}| V_{ws}}{R_{ws}^{4/3}} \right) \right\} \Delta t \\
V_{wp} = & \frac{\dots\dots\dots (3.102)}{|s, p| + |r, p|}
\end{aligned}$$

また，式 (3.97) - 式 (3.100) より，

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{g} (V_{wr} - V_{ws}) + \frac{1}{2} (|r, p| + |s, p|) h_p - \frac{1}{2} (|r, p|h_r + |s, p|h_s) \\
& + \frac{1}{2g\rho_w} \left(\frac{\partial p'_a}{\partial x} \Big|_r + \frac{\partial p'_a}{\partial x} \Big|_{rp} - \frac{\partial p'_a}{\partial x} \Big|_s - \frac{\partial p'_a}{\partial x} \Big|_{sp} \right) \Delta t \\
& + \frac{1}{2} \left(\frac{n^2 |V_{wr}| V_{wr}}{R_{wr}^{4/3}} + \frac{n^2 |V_{ws}| V_{ws}}{R_{ws}^{4/3}} \right) \Delta t = 0 \dots\dots\dots (3.103)
\end{aligned}$$

したがって，次式を得る．

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{g} (V_{wr} - V_{ws}) + \frac{1}{2} (|r, p|h_r + |s, p|h_s) \\
& - \frac{1}{2g\rho_w} \left(\frac{\partial p'_a}{\partial x} \Big|_r + \frac{\partial p'_a}{\partial x} \Big|_{rp} - \frac{\partial p'_a}{\partial x} \Big|_s - \frac{\partial p'_a}{\partial x} \Big|_{sp} \right) \Delta t \\
& - \frac{1}{2} \left(\frac{n^2 |V_{wr}| V_{wr}}{R_{wr}^{4/3}} + \frac{n^2 |V_{ws}| V_{ws}}{R_{ws}^{4/3}} \right) \Delta t \\
h_p = & \frac{\dots\dots\dots (3.104)}{\frac{1}{2} (|r, p| + |s, p|)}
\end{aligned}$$

$$; |s, p| = \left(\frac{1}{c_{ws}} + \frac{1}{c_{wp}} \right)$$

$$; |r, p| = \left(\frac{1}{c_{wr}} + \frac{1}{c_{wp}} \right)$$

(2) 上流端断面における計算

① 第 1 ステップ

図 3-7 に示すような特性曲線 C_- (式 (3.84), - 符号) は次式のように表わされる.

$$x_p - x_s = (V_{wb} - c_{wb}) \Delta t \dots \dots \dots (3.105)$$

また, 特性方程式 (式 (3.85), 下符号) は次式のように表わされる.

$$\frac{1}{g}(V_{wp} - V_{ws}) - \frac{1}{c_{ws}}(h_p - h_s) + \frac{1}{g\rho_w} \frac{\partial p'_a}{\partial x} \Big|_s \Delta t - \left(S_0 - \frac{n^2 |V_{ws}| V_{ws}}{R_{ws}^{4/3}} \right) \Delta t = 0 \dots (3.106)$$

$$; \frac{\partial p'_a}{\partial x} \Big|_s = \frac{p'_{ac} - p'_{ab}}{\Delta x}$$

ここで, h_p が境界条件として与えられるとき, 次式を得る.

$$V_{wp} = V_{ws} + \frac{g}{c_{ws}}(h_p - h_s) - \frac{1}{\rho_w} \frac{\partial p'_a}{\partial x} \Big|_s \Delta t - g \left(S_0 - \frac{n^2 |V_{ws}| V_{ws}}{R_{ws}^{4/3}} \right) \Delta t \dots \dots (3.107)$$

② 第 2 ステップ

特性曲線 C_- (式 (3.84), - 符号) は次式のように表わされる.

$$x_p - x_s = \frac{1}{2} \{ (V_{ws} - c_{ws}) + (V_{wp} - c_{wp}) \} \Delta t \dots \dots \dots (3.108)$$

また, 特性方程式 (式 (3.85), 下符号) は次式のように表わされる.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{g}(V_{wp} - V_{ws}) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{c_{ws}} + \frac{1}{c_{wp}} \right) (h_p - h_s) + \frac{1}{2g\rho_w} \left(\frac{\partial p'_a}{\partial x} \Big|_s + \frac{\partial p'_a}{\partial x} \Big|_{sp} \right) \Delta t \\ & - S_0 \Delta t + \frac{1}{2} \left(\frac{n^2 |V_{wp}| V_{wp}}{R_{wp}^{4/3}} + \frac{n^2 |V_{ws}| V_{ws}}{R_{ws}^{4/3}} \right) \Delta t = 0 \dots (3.109) \\ & ; \quad \frac{\partial p'_a}{\partial x} \Big|_s = \frac{p'_{ac} - p'_{ab}}{\Delta x}, \quad \frac{\partial p'_a}{\partial x} \Big|_{sp} = \frac{p'_{ae} - p'_{ap}}{\Delta x} \end{aligned}$$

ここで、 h_p が境界条件として与えられるとき、次式を得る。

$$\begin{aligned} V_{wp} = V_{ws} + \frac{g}{2} \left(\frac{1}{c_{ws}} + \frac{1}{c_{wp}} \right) (h_p - h_s) - \frac{1}{2\rho_w} \left(\frac{\partial p'_a}{\partial x} \Big|_s + \frac{\partial p'_a}{\partial x} \Big|_{sp} \right) \Delta t \\ + gS_0 \Delta t - \frac{g}{2} \left(\frac{n^2 |V_{wp}| V_{wp}}{R_{wp}^{4/3}} + \frac{n^2 |V_{ws}| V_{ws}}{R_{ws}^{4/3}} \right) \Delta t = 0 \dots (3.110) \end{aligned}$$

(3) 下流端断面における計算

① 第 1 ステップ

図 3-8 に示すような特性曲線 C_+ (式 (3.84), + 符号) は次式のように表わされる。

$$x_p - x_r = (V_{wb} + c_{wb}) \Delta t \dots \dots \dots (3.111)$$

また、特性方程式 (式 (3.85), 上符号) は次式のように表わされる。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{g}(V_{wp} - V_{wr}) + \frac{1}{c_{wr}}(h_p - h_r) + \frac{1}{g\rho_w} \frac{\partial p'_a}{\partial x} \Big|_r \Delta t - \left(S_0 - \frac{n^2 |V_{wr}| V_{wr}}{R_{wr}^{4/3}} \right) \Delta t = 0 \dots (3.112) \\ & ; \quad \frac{\partial p'_a}{\partial x} \Big|_r = \frac{p'_{ab} - p'_{af}}{\Delta x} \end{aligned}$$

ここで、 h_p が境界条件として与えられるとき、次式を得る。

$$V_{wp} = V_{wr} - \frac{g}{c_{wr}}(h_p - h_r) + \frac{1}{\rho_w} \frac{\partial p'_a}{\partial x} \Big|_r \Delta t - g \left(S_0 - \frac{n^2 |V_{wr}| V_{wr}}{R_{wr}^{4/3}} \right) \Delta t \dots \dots (3.113)$$

② 第 2 ステップ

特性曲線 C_+ (式 (3.84), + 符号) は次式のように表わされる.

$$x_p - x_r = \frac{1}{2} \{ (V_{wr} + c_{wr}) + (V_{wp} + c_{wp}) \} \Delta t \dots \dots \dots (3.114)$$

また, 特性方程式 (式 (3.85), 上符号) は次式のように表わされる.

$$\begin{aligned} \frac{1}{g} (V_{wp} - V_{wr}) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{c_{wr}} + \frac{1}{c_{wp}} \right) (h_p - h_r) + \frac{1}{2g\rho_w} \left(\frac{\partial p'_a}{\partial x} \Big|_r + \frac{\partial p'_a}{\partial x} \Big|_{rp} \right) \Delta t \\ - S_0 \Delta t + \frac{1}{2} \left(\frac{n^2 |V_{wp}| V_{wp}}{R_{wp}^{4/3}} + \frac{n^2 |V_{wr}| V_{wr}}{R_{wr}^{4/3}} \right) \Delta t = 0 \quad \dots (3.115) \end{aligned}$$

$$; \quad \frac{\partial p'_a}{\partial x} \Big|_r = \frac{p'_{ab} - p'_{af}}{\Delta x}, \quad \frac{\partial p'_a}{\partial x} \Big|_{rp} = \frac{p'_{ap} - p'_{ad}}{\Delta x}$$

ここで, h_p が境界条件として与えられるとき, 次式を得る.

$$\begin{aligned} V_{wp} = V_{wr} - \frac{g}{2} \left(\frac{1}{c_{wr}} + \frac{1}{c_{wp}} \right) (h_p - h_r) - \frac{1}{2\rho_w} \left(\frac{\partial p'_a}{\partial x} \Big|_r + \frac{\partial p'_a}{\partial x} \Big|_{rp} \right) \Delta t \\ + g S_0 \Delta t - \frac{g}{2} \left(\frac{n^2 |V_{wp}| V_{wp}}{R_{wp}^{4/3}} + \frac{n^2 |V_{wr}| V_{wr}}{R_{wr}^{4/3}} \right) \Delta t \dots (3.116) \end{aligned}$$

参考文献

- 1) 小西 亜弥：下水道管渠システムの空気の流れ・空気圧変動解析に関する基礎的研究，平成 21 年度愛媛大学工学部環境建設工学科卒業論文，2010.
- 2) 渡辺 政広 他：マンホール部に空気塊を封入する下水道管渠網の圧力流れ，水工学論文集，第 44 巻，pp. 551-556，2000.
- 3) 渡辺 政広 他：マンホール蓋飛散の水理解析モデルと水理模型実験，水工学論文集，第 45 巻，pp. 907-911，2001.
- 4) 重田 尚秀・魚谷 牧夫・右近 雄大・友近 榮治・渡辺 政広：マンホール蓋浮上・飛散シミュレーションモデル，土木学会第 65 回年次学術講演会講演概要集，pp. 119-120，2010.

4 章 空気・雨水の流れモデルの模型実験^{1), 2), 3), 4)}

4.1 概 説

3 章では 2 章で導出した空気の流れの基礎式を用いて，雨水排水管渠内空気・雨水の流れの数値解析法を提案した．本章では，解析モデルの妥当性の検証を行った．実験は，空気・水の二層状態での，取付管を有する排水管渠模型実験と，マンホールを有する排水管渠模型実験を行なった．それぞれの実験で得られた結果と解析結果を比較し，検証を行った．以下に実験概要，および結果と考察を示す．

4.2 雨水排水管渠模型概要

排水管渠模型は，図 4-1, 図 4-2 に示すように，流入流量を調節するための上流部の水槽（塩化ビニール製），円管（内径 100 mm，透明アクリル製）の排水管渠部，および流出流量あるいは下流端水位を調節するための下流部の水槽（塩化ビニール製）の三つの部分からなる．

上流部の水槽は，ポンプより送られた水を貯留する第一水槽から，三角堰を通して第二水槽に水を落とし込み，排水管渠部の上流端に流入されるように設置されている．第一，第二水槽には，水の乱れを押さえるためのフィルター（整流板）が設置されている．また，第一水槽には越流水深を測定するためのポイント・ゲージが設置されている．

排水管渠部分は，全長 10,900 mm であり，管渠部分の上流部と下流部の 2 箇所に取り付管（内径 10 mm，直立高さ 1020 mm， $F_{tA}=0.79 \text{ cm}^2$ ）を設けた模型（図 4-1）と，2 箇所にマンホール（内径 150 mm， $h_G=37.5 \text{ cm}$ ，空気孔 $F_A=0.20 \text{ cm}^2$ ）を設けた模型（図 4-2）を使用した．また，管渠下流端には実際のポンプ場におけるゲート操作を再現できるように，流量制御のための手動式流量調節ゲートを設置している．

図 4-1, 図 4-2 に示すように, マンホールおよび管渠には圧力センサを設置した。管渠内圧力変動は, 設置した圧力センサにより測定されデータ・レコーダーに記録される。なお, 排水管渠勾配は 2/1000 である。

Sensor No.	8, 8'	7, 7'	6, 6'	5, 5'	4, 4'	3, 3'	2, 2'	1, 1'
x (mm)	560	1370	3440	4440	6480	7510	8540	10570

Lateral Pipe	1	2
x (mm)	950	9990

上流端	x=0mm
下流端	x=10900mm

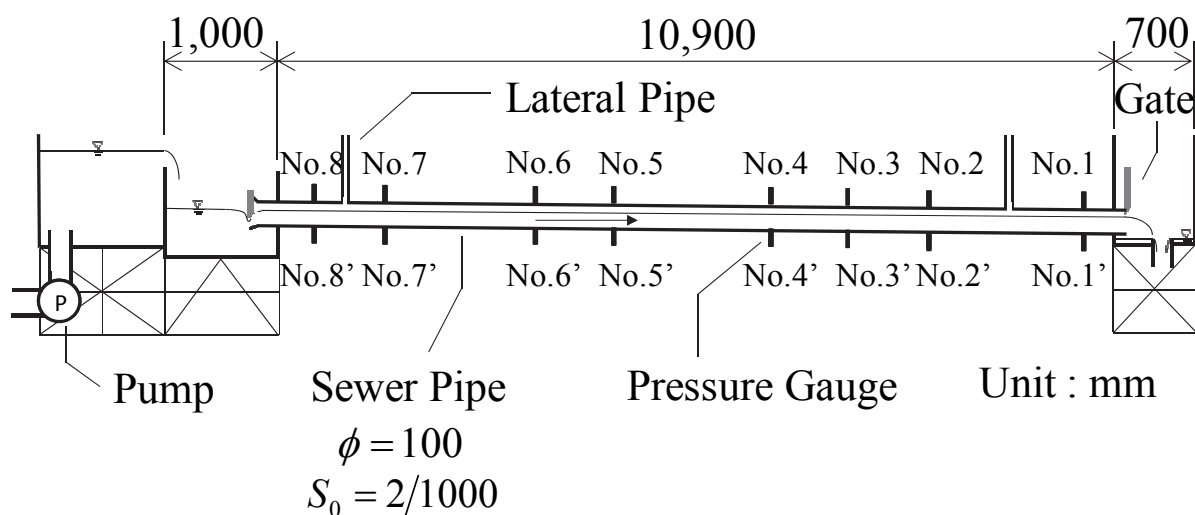


図 4-1 取付管を有する排水管渠模型概要

Sensor No.	8, 8'	7, 7'	6, 6'	5, 5'	4, 4'	3, 3'	2, 2'	1, 1'
x (mm)	560	1370	3440	4440	6480	7510	8540	10570

Manhole	1	2
x (mm)	3440	7510

上流端	x=0mm
下流端	x=10900mm

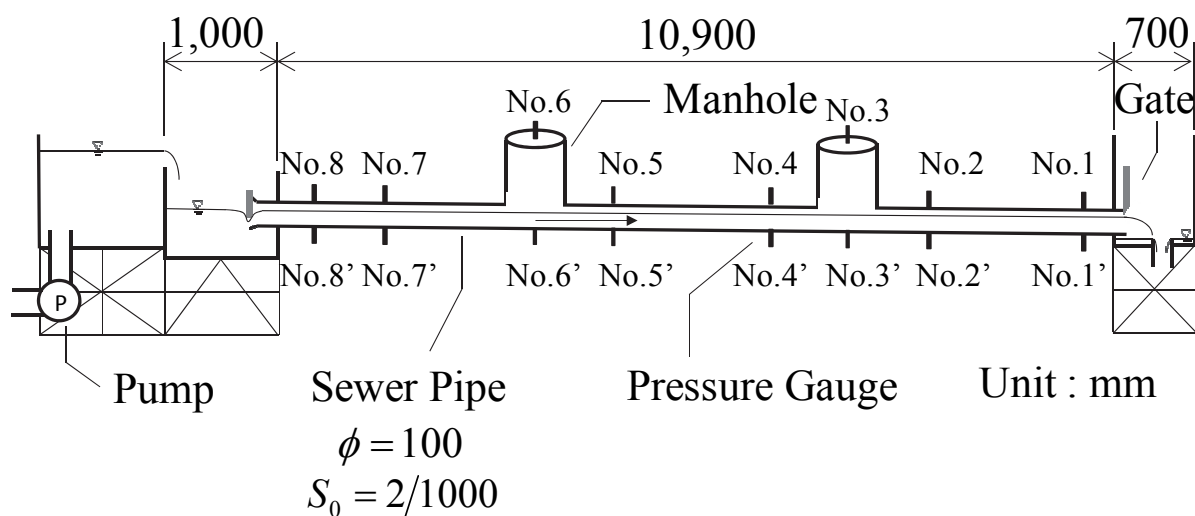


図 4-2 マンホールを有する排水管渠模型概要

4.3 実験方法

4.3.1 取付管を有する模型実験

管渠上部の水槽から一定流量 $Q=1.474\text{ l/s}$ を流している．初期状態では下流端は開放し，上流端射流部で水深 2.0 cm （流速 $V=1.332\text{ m/s}$ ，フルード数 $Fr=3.599$ ）下流の常流部で水深 5.0 cm （流速 $V=0.379\text{ m/s}$ ，フルード数 $Fr=0.611$ ）の定常流とした．その後，図 4-3～図 4-8 の水位縦断面図に示すように，下流端でゲートを急閉塞し（ $t=4.2\text{ s}$ ），背水を生じさせる．背水は上流端へと伝播し，下流端の水位は上昇する．下流端の水位が管渠天端近くになった， $t=26.2\text{ s}$ で下流端ゲートを急開放させ，水位・空気圧の変化を $t=60.0\text{ s}$ まで計測した．

4.3.2 マンホールを有する模型実験

管渠上部の水槽から一定流量 $Q=1.490\text{ l/s}$ を流している．初期状態では下流端は開放し，上流端射流部で水深 2.0 cm （流速 $V=1.332\text{ m/s}$ ，フルード数 $Fr=3.599$ ），下流の常流部で水深 5.0 cm （流速 $V=0.379\text{ m/s}$ ，フルード数 $Fr=0.611$ ）の定常流とした．その後，図 4-9～図 4-14 の水位縦断面図に示すように，下流端でゲートを急閉塞し（ $t=3.9\text{ s}$ ），背水を生じさせる．背水は上流端へと伝播し，下流端の水位は上昇する．下流端の水位が管渠天端近くになった， $t=36.4\text{ s}$ で下流端ゲートを急開放させ，水位・空気圧の変化を $t=79.9\text{ s}$ まで計測した．

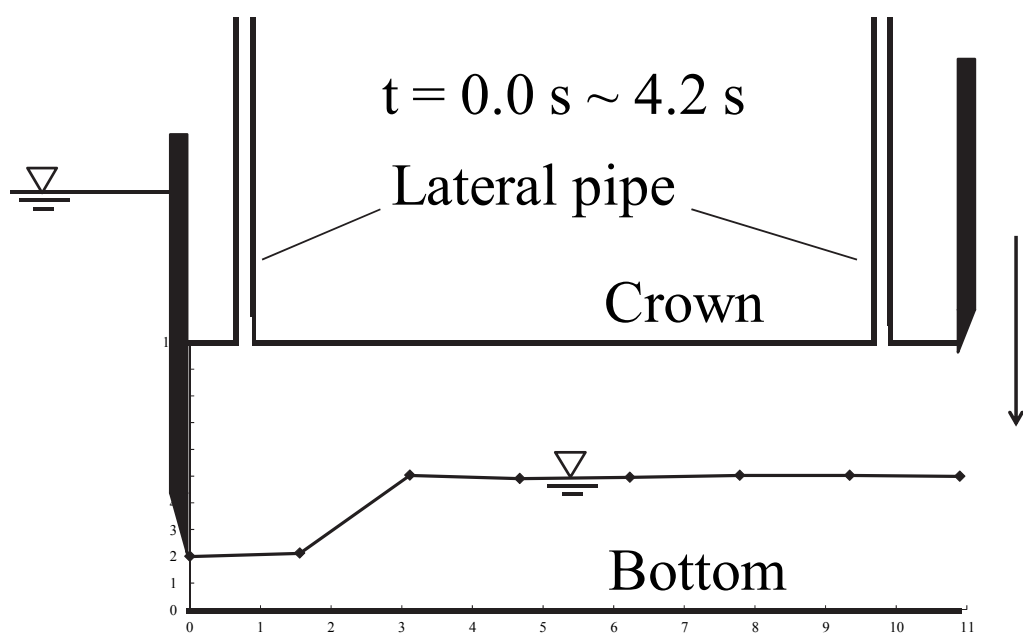


図 4-3 水位縦断面図 ($t = 0.0 \text{ s} \sim 4.2 \text{ s}$)

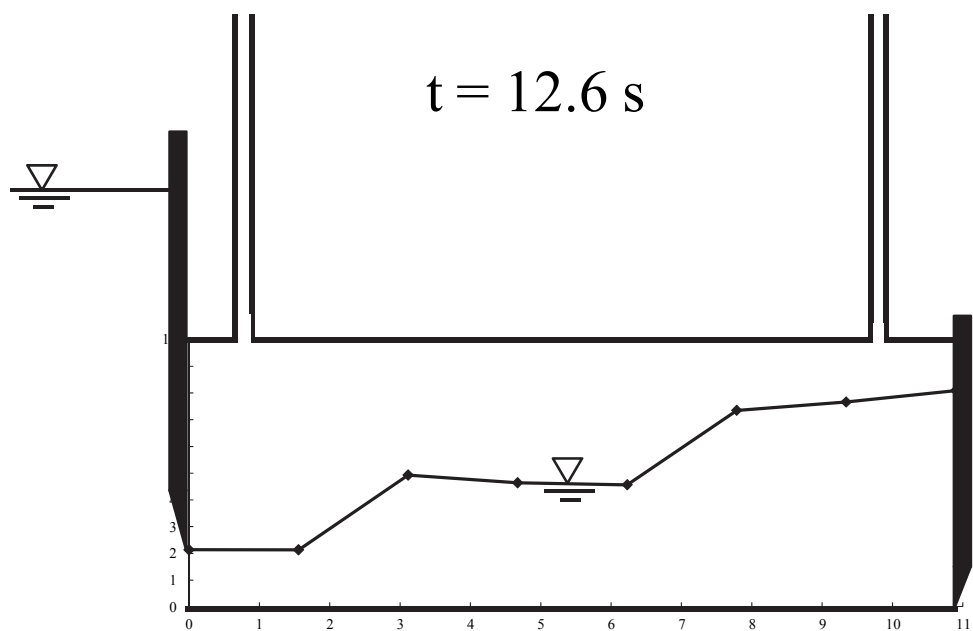


図 4-4 水位縦断面図 ($t = 12.6 \text{ s}$)

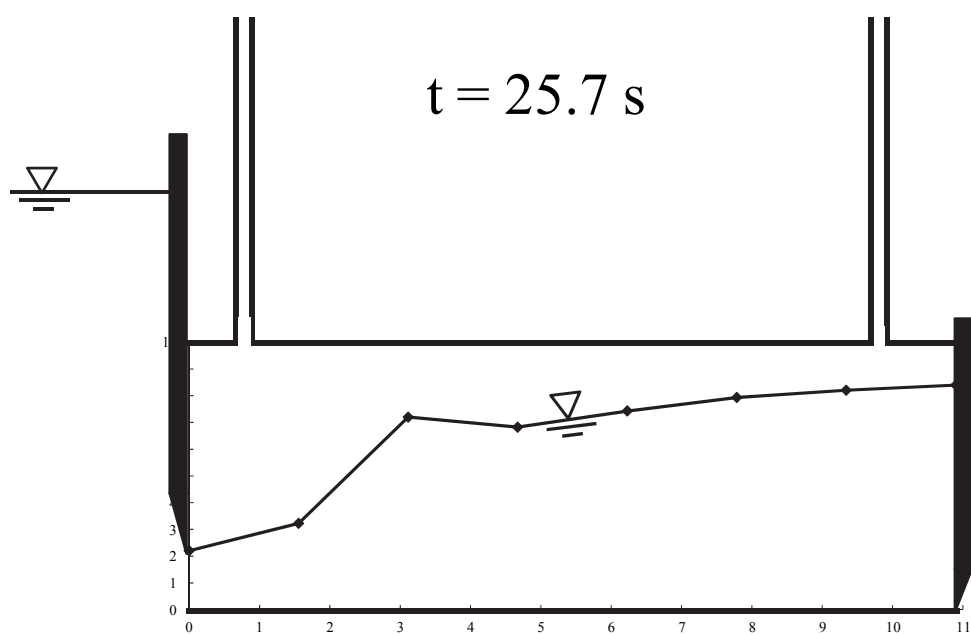


図 4-5 水位縦断面図 ($t = 25.7 \text{ s}$)

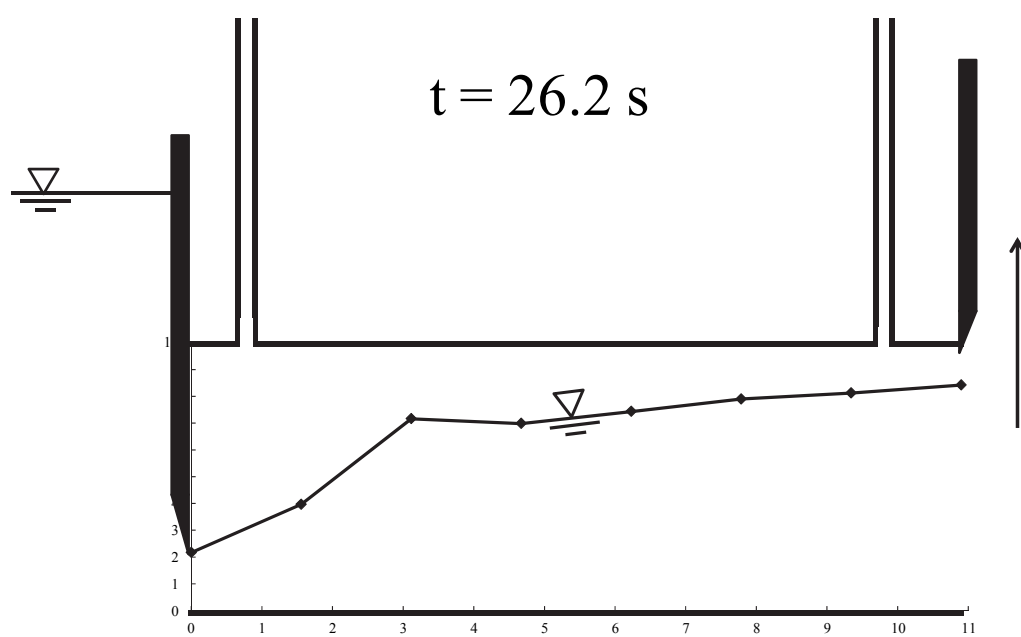


図 4-6 水位縦断面図 ($t = 26.2 \text{ s}$)

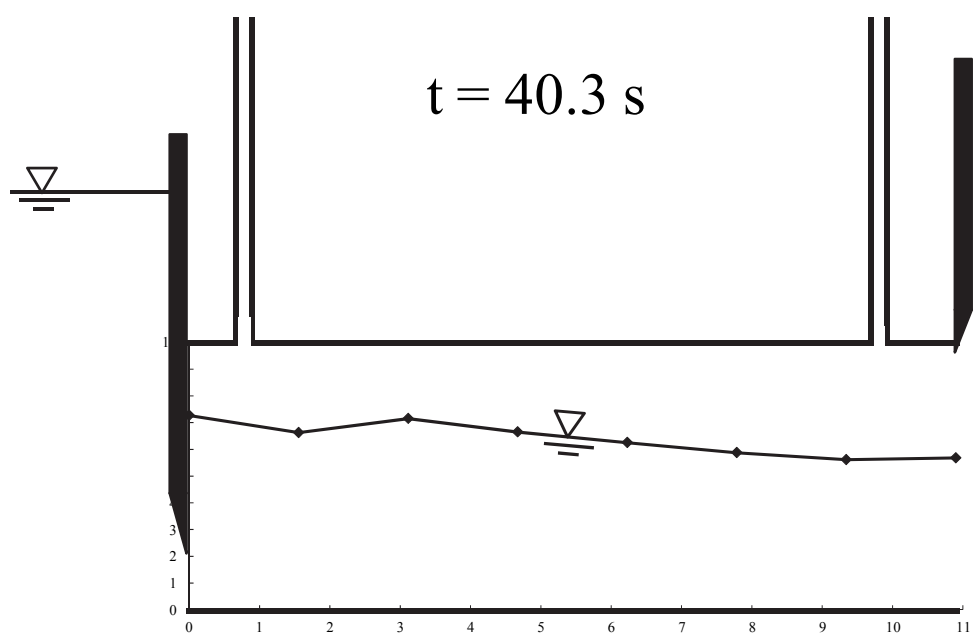


図 4-7 水位縦断面図 ($t = 40.3 \text{ s}$)

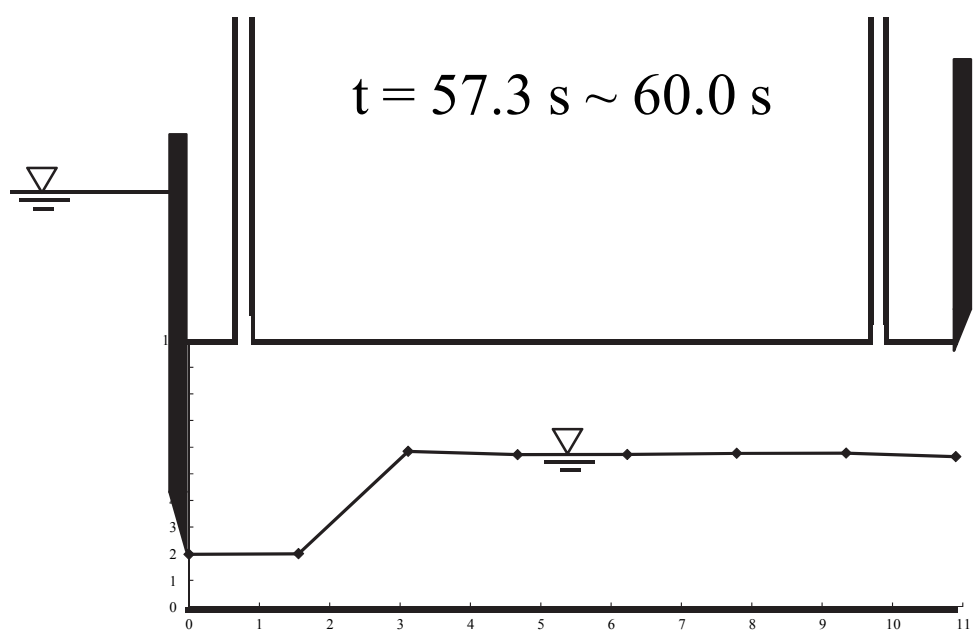


図 4-8 水位縦断面図 ($t = 57.3 \text{ s} \sim 60.0 \text{ s}$)

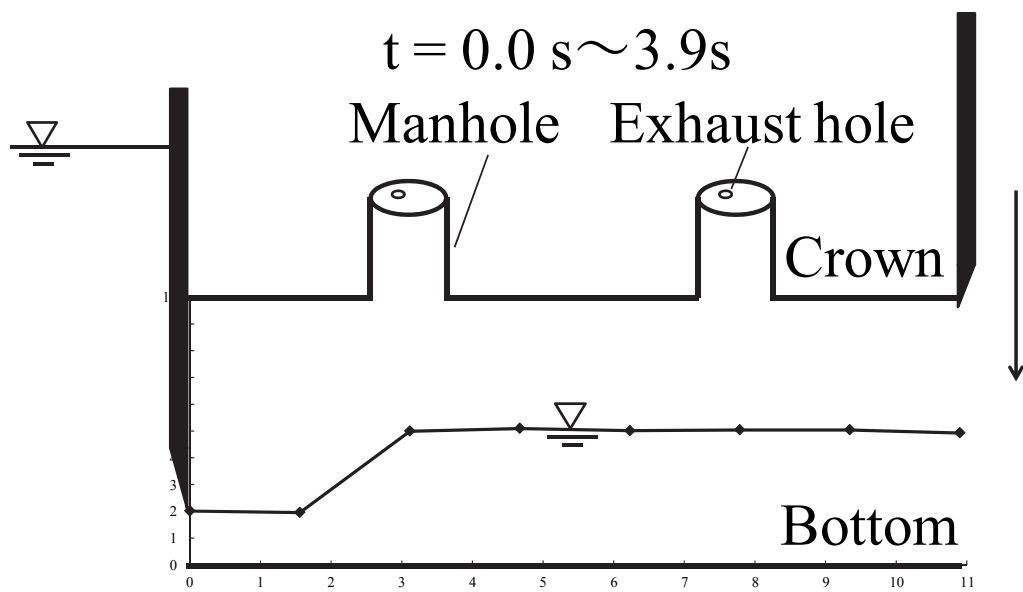


図 4-9 水位縦断面図 ($t = 0.0 \text{ s} \sim 3.9 \text{ s}$)

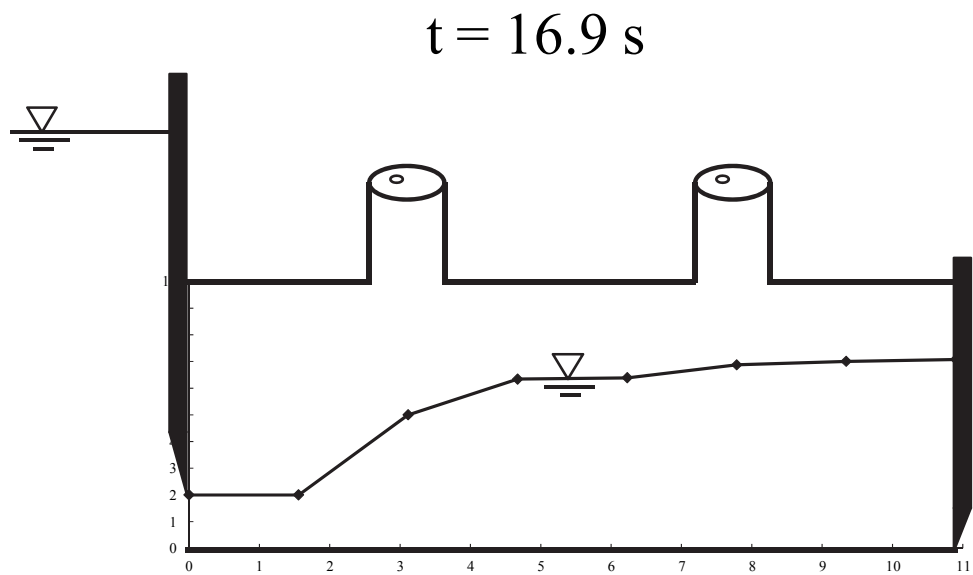


図 4-10 水位縦断面図 ($t = 16.9 \text{ s}$)

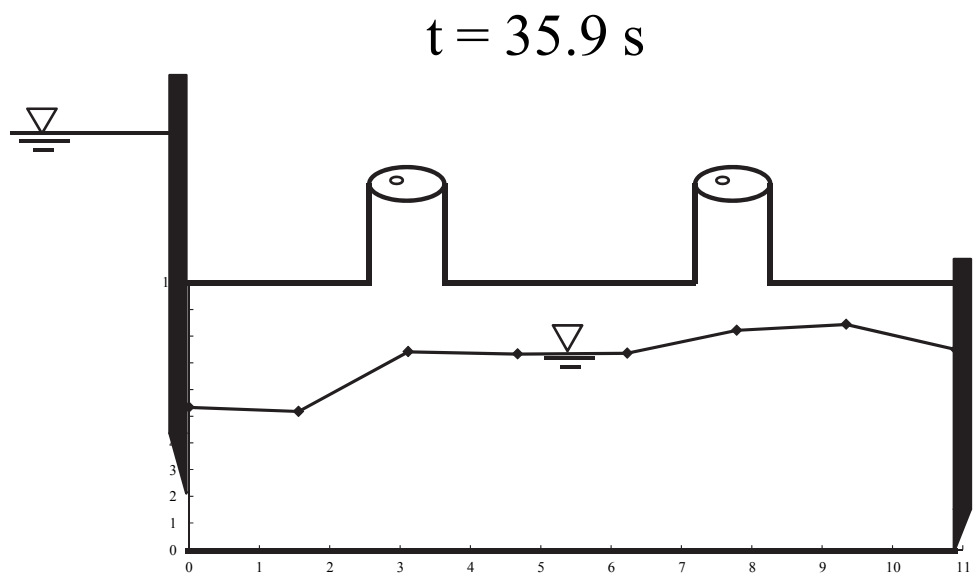


図 4-11 水位縦断面図 ($t = 35.9 \text{ s}$)

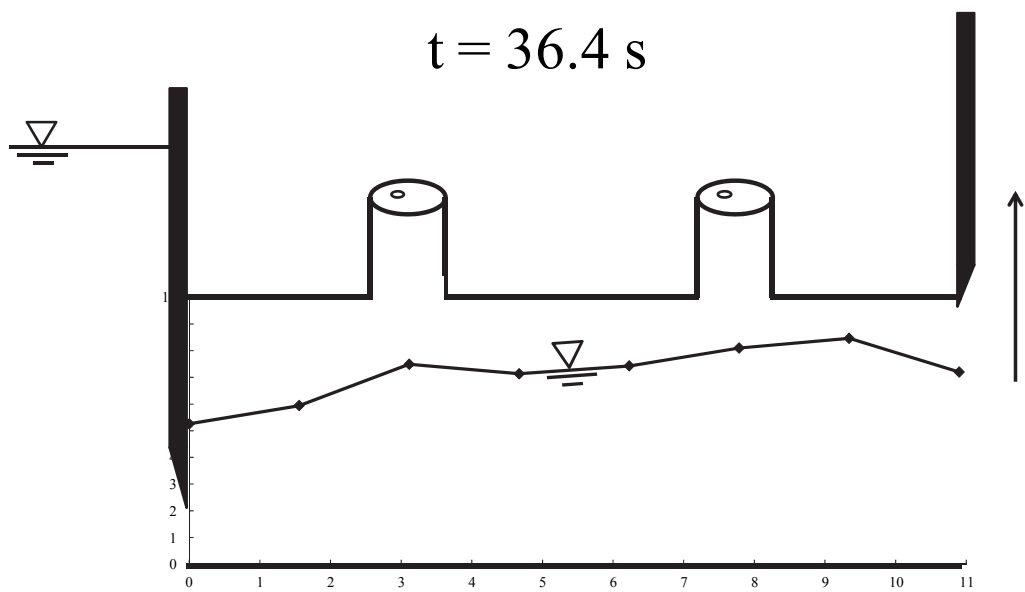


図 4-12 水位縦断面図 ($t = 36.4 \text{ s}$)

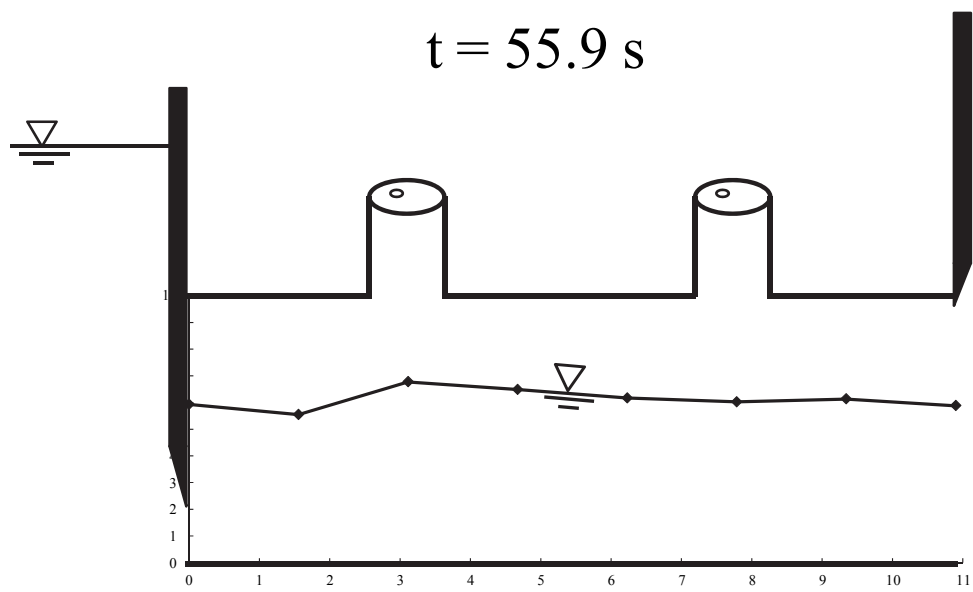


図 4-13 水位縦断図 ($t = 55.9 \text{ s}$)

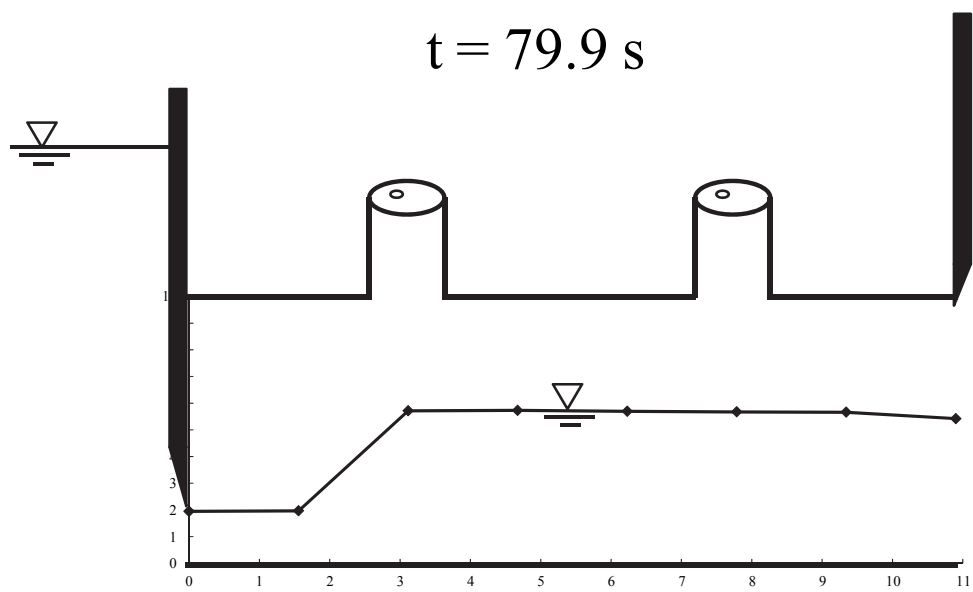


図 4-14 水位縦断図 ($t = 79.9 \text{ s}$)

4.4 数値解析

数値解析は 3 章で提案した，特性曲線法（矩形格子）により求めた．すなわち，管渠を 35 分割した（ $\Delta x=0.3114\text{m}$ ）計算断面について上流端断面，内点断面，下流端断面に区分し，それぞれについて，第 1 ステップから第 3 ステップまで反復計算を行った．

なお， Δt 間の計算の第 1 ステップでは，格子点 p の値は未知であるが，格子点 b の値と同じと仮定している．第 2 ステップおよび第 3 ステップでは，前ステップで算出した格子点 p の値と r 点または s 点との平均値を格子点 p の値として計算を行っている．

ここで，計算時間間隔は C.F.L 条件を考慮して $\Delta t=0.0005\text{sec}$ とした．また，管渠壁面の表面粗さ（絶対粗度） ε は，模型管渠がアクリル製であることより， $\varepsilon=0.05\text{mm}=0.00005\text{m}$ とした．

取付管を有する排水管渠模型実験における境界条件としては，図 4-3 から図 4-8 に示した計測された水位（水深）結果より，図 4-15 に示す計算断面ごとの水位を用いた．なお，図 4-15 には，例として 8 断面を示しているが，計算においては全計算断面ごとの水位を用いている．（計算断面位置は表 4-1 参照）

また，マンホールを有する排水管渠模型実験における境界条件としては，図 4-9 から図 4-14 に示した計測された水位（水深）結果より，図 4-16 に示す計算断面ごとの水位を用いた．なお，図 4-16 には，例として 8 断面を示しているが，計算においては全計算断面ごとの水位を用いている．

なお，大気圧は 1.0atm （ 101325Pa ），また，気温 10°C として，大気圧下の空気の密度 $\rho_0=1.247\text{kg/m}^3$ ，動粘性係数 $\nu=1.421\times 10^{-5}\text{m}^2/\text{s}$ とした．

表 4-1 計算断面とその位置

単位：mm

①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩	⑪	⑫
0	311	623	934	1246	1557	1869	2180	2491	2803	3114	3426
⑬	⑭	⑮	⑯	⑰	⑱	⑲	⑳	㉑	㉒	㉓	㉔
3737	4049	4360	4671	4983	5294	5606	5917	6229	6540	6851	7163
㉕	㉖	㉗	㉘	㉙	㉚	㉛	㉜	㉝	㉞	㉟	㊱
7474	7786	8097	8409	8720	9031	9343	9654	9966	10277	10589	10900

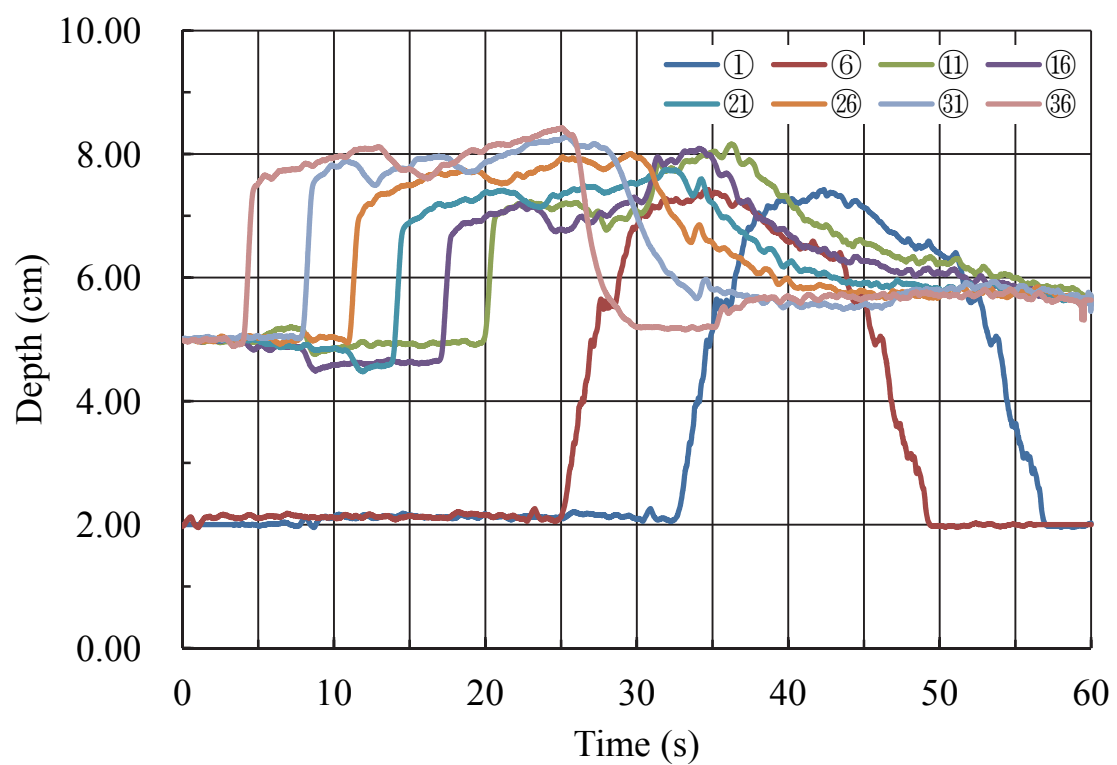
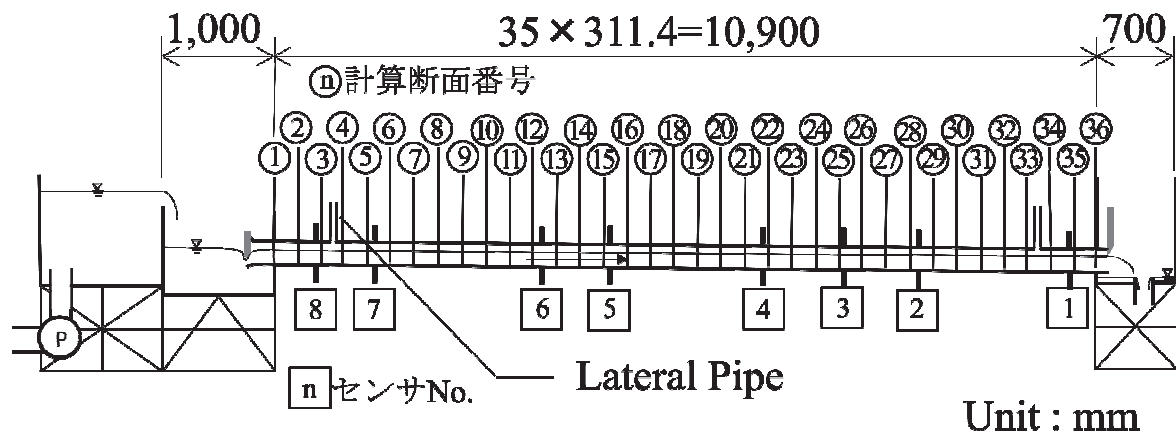


図 4-15 各計算断面における水深図（取付管有り）

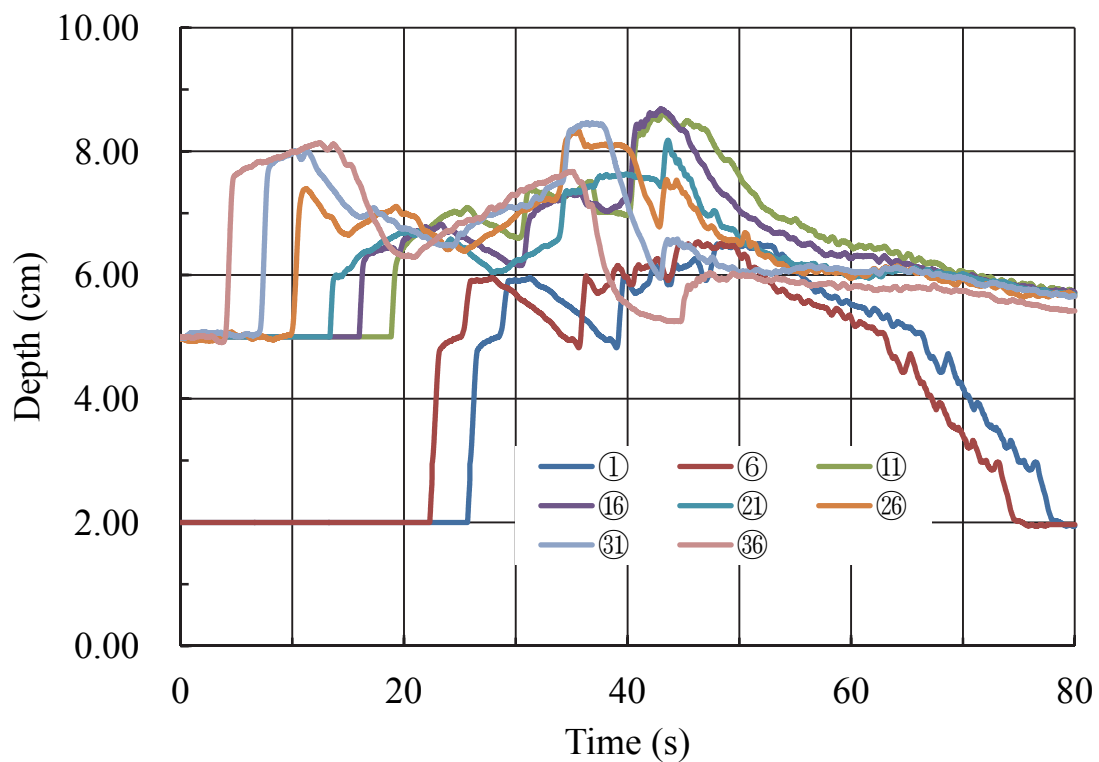
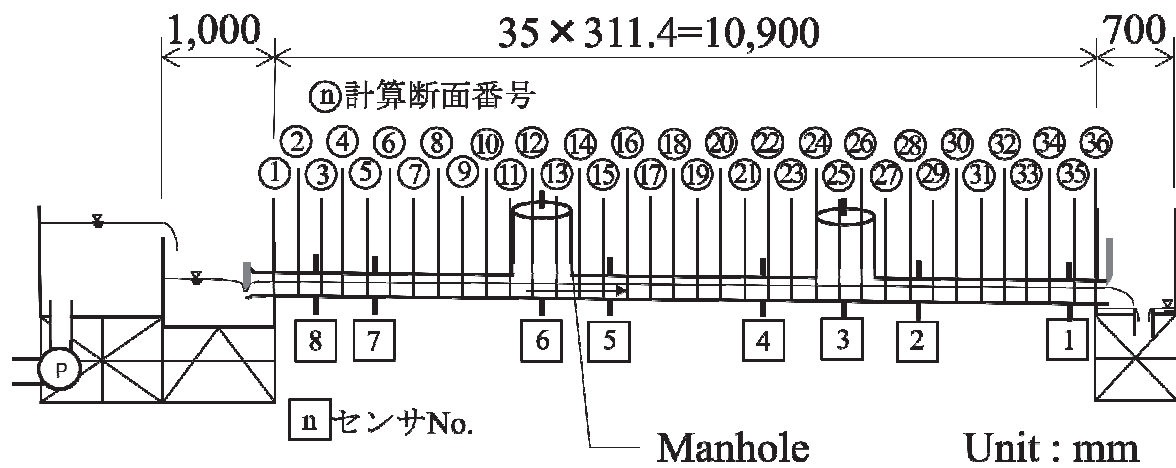


図 4-16 各計算断面における水深図（マンホール有り）

4.5 実験結果と数値解析結果の比較と考察

4.5.1 取付管を有する排水管渠模型実験

図 4-17 は、排水管渠に設置した各センサで計測された空気圧ハイドログラフである。下流端でゲートを急閉塞した $t=4.2\text{s}$ 直後に管渠内の空気圧力は急上昇し、 $t=4.9\text{s}$ には 1.002atm に達している。そして、下流端ゲートを急開放した $t=26.2\text{s}$ 直後に空気圧力は急低下し、 $t=27.0\text{s}$ には大気圧 (1atm) にまで戻っている。空気圧力の上昇、および低下は $0.7\sim 0.8\text{sec}$ の微小時間であり、空気圧変化の応答は非常に速いといえる。

また、空気圧力上昇後の各センサの圧力差は 0.0002atm 程度であり、管渠全長に亘り、概ね同一の空気圧変動を示していることが確認された。

図 4-18～図 4-34 は、各断面における実験観測値と数値解析結果の空気圧・気流速度ハイドログラフの比較を示している。この図からは、数値解析結果の空気圧ハイドログラフに大きな攪乱が見られる。この理由としては、数値解析計算では C.F.L 条件より $\Delta t=0.0005\text{sec}$ としているが、実験での水位の観測は 0.001sec と Δt の 2 倍の間隔のため、計算に用いた水位は補間値を用いており、結果として、水面変動に非常に敏感に空気圧が応答したこと、および水の流れが上流で射流（フルード数 $Fr=3.599$ ）、下流で常流（フルード数 $Fr=0.611$ ）のため、跳水が発生し、微小な水面変動が生じたが、位置的にセンサで計測されなかったことも一因と考えられる。

しかしながら、空気圧の急激な上昇や全般的な変動傾向については実験観測値を良く再現しているといえる。なお、気流速度は、上流側取付管下流の④断面で、ゲート閉鎖直後に、上流方向に $V=-0.8\text{m/s}$ 程度の値がゲート開放まで継続し、空気圧が負圧になると同調して下流方向に排気されている。しかし、図 4-23（⑪断面）～図 4-33（⑳断面）に示したように、ゲート閉鎖直後の上流方向の気流速度は、その値はやや増大する（ $V=-0.26\text{m/s}$ ）が継続時間は下

流ほど短くなっている．この理由としては，上流側の取付管の排気が $t=25.2\text{s}$ まで継続しており，それが解析結果に反映されたと考えられる．ただし，取付管の排気の影響は下流ほど弱いことも確認された．また，下流方向への排気は，空気圧と水深の影響を受けていると考えられる．

図 4-35，図 4-36 に，上下流の取付管の気流速度と，管渠の空気圧および気流速度のハイドログラフを示す．この図からは，上下流とも取付管の気流速度は，管渠内の空気圧と同調していることが明瞭である．したがって，雨水排水管渠内の空気の流れの解析にあたっては，取付管を考慮することが不可欠であるといえる．

また，図 4-37 に，空気圧が最大となる $t=20.09\text{s}$ の空気圧，気流速度，および水深の縦断図を示す．この図からは，空気圧は縦断方向にはほぼ一定であり，解析結果と一致している．また，気流速度は解析結果のみではあるが，水深と同調しており，本解析モデルは微細な水位変動に対しても適用性を示していると考えられる．なお，管渠内の気流速度の最大値は，㉓断面 ($x=9.966\text{m}$) で発生しており，その値は，気流速度 $V=0.444\text{m/s}$ ，レイノルズ数 $Re=836$ で，層流である．

次に，図 4-38 に，下流端ゲート開放後で最大気流速度となる， $t=30.19\text{s}$ の空気圧，気流速度，および水深の縦断図を示す．この図からも，気流速度は水深と同調しており，水深の微変動を反映した解析結果となっていることが，確認された．なお，気流速度の最大値は，㉔断面 ($x=7.163\text{m}$) で発生しており，その値は，気流速度 $V=1.974\text{m/s}$ ，レイノルズ数 $Re=3728$ で，乱流である．

図 4-39 に管渠内の空気体積ハイドログラフを，図 4-40 に再度，管渠中央付近の㉕断面の空気圧ハイドログラフを示す．これらの図から，管渠内の空気体積の微細な減少率の変化（例えば， $20\text{s}\sim 24\text{s}$ ）が，空気圧の急激な上昇・低下となっていることが確認され，局所的な水面変動よりも，管渠内の空気体積が空気圧の変動の要因となっていることが分かった．

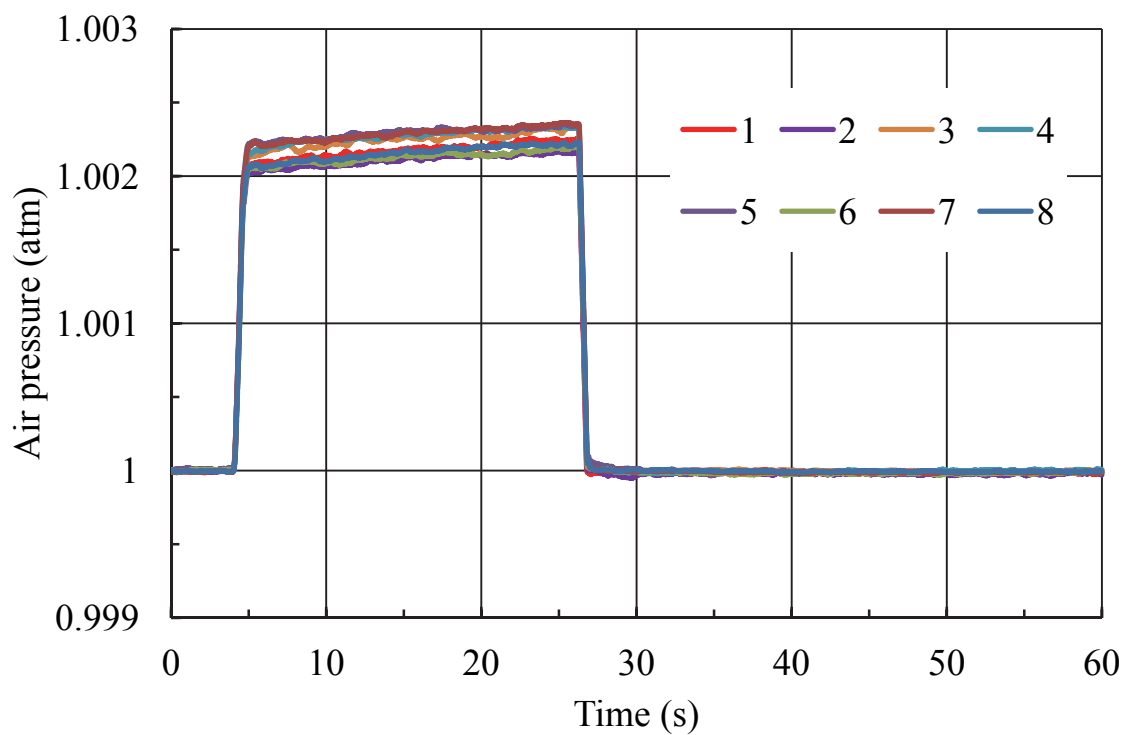
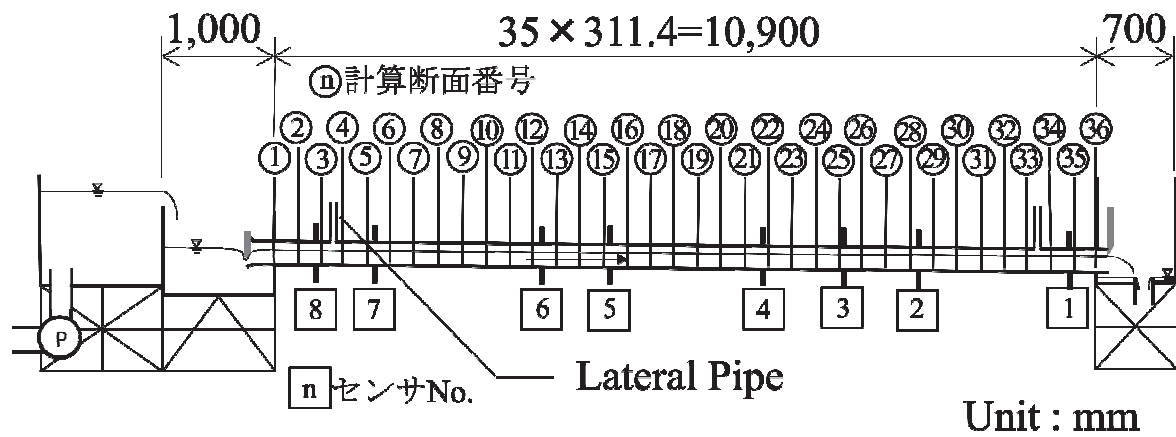


図 4-17 各センサで計測された空気圧（取付管有り）

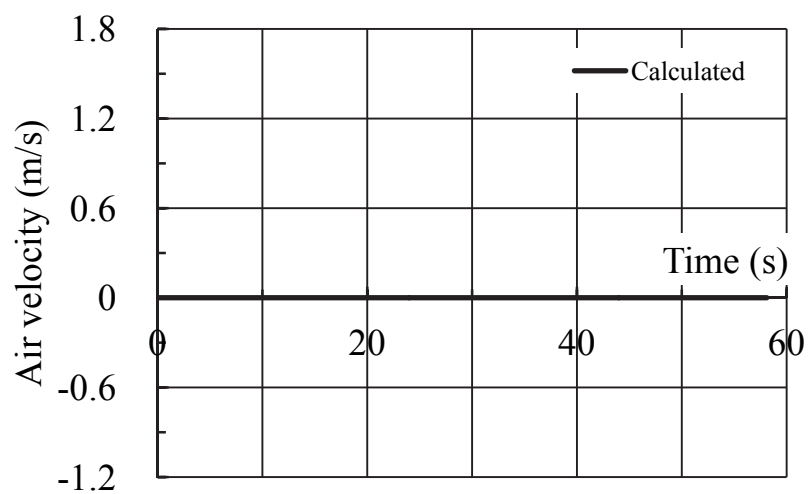
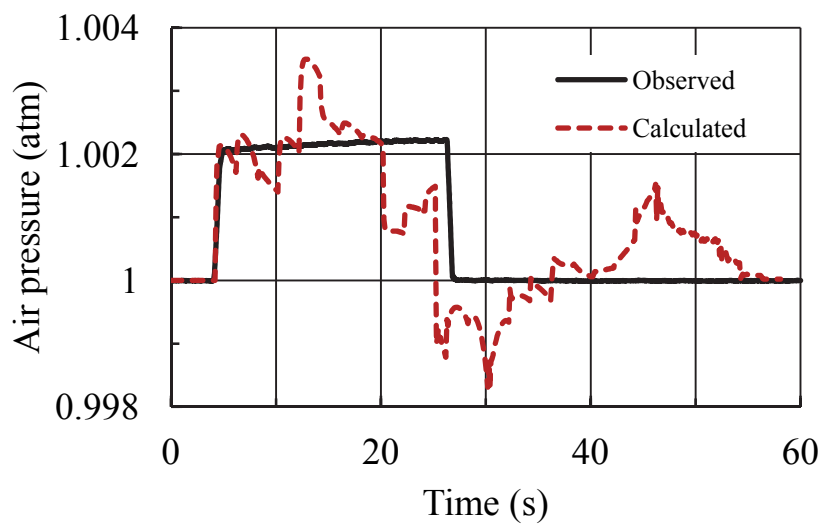
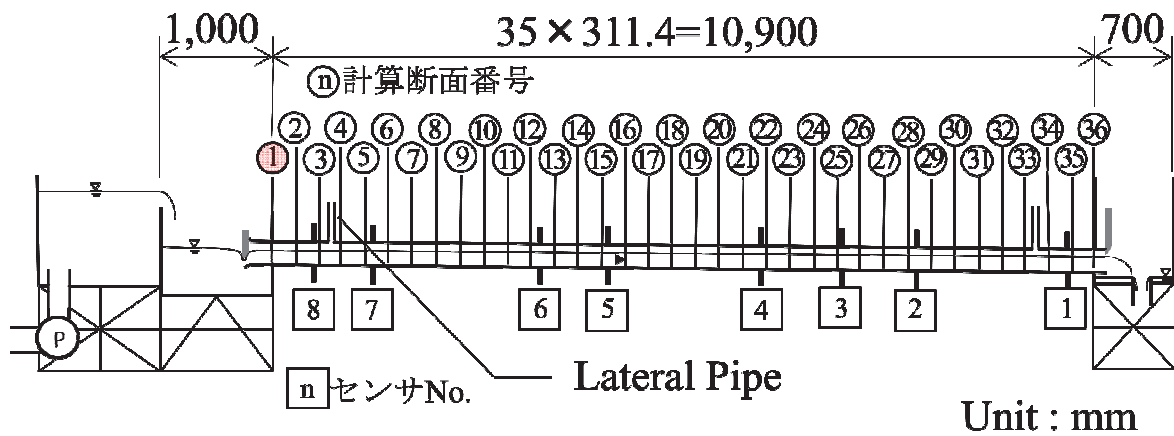


図 4-18 空気圧・気流速度ハイドログラフ：①断面

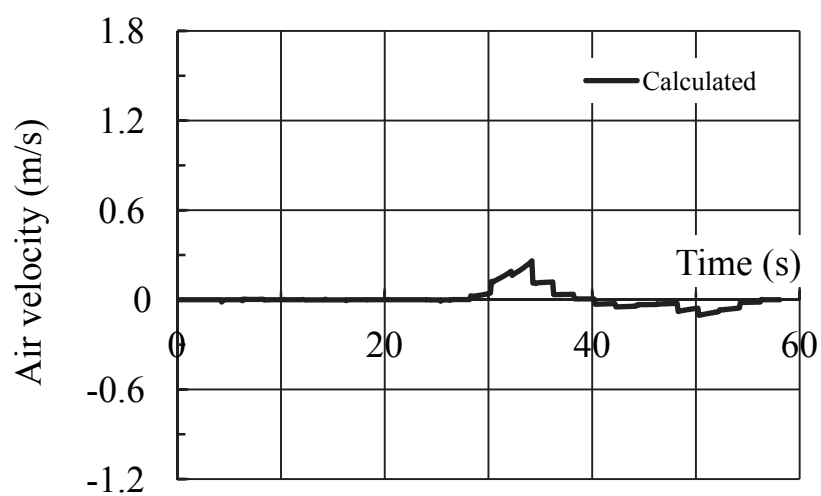
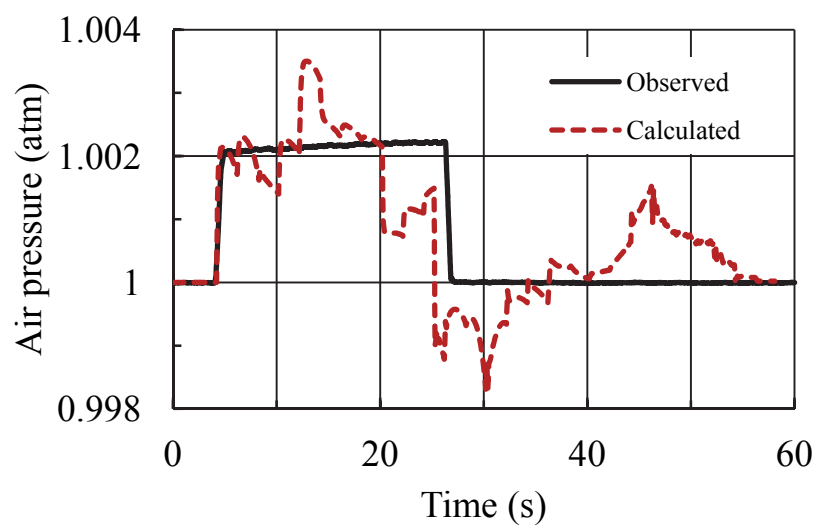
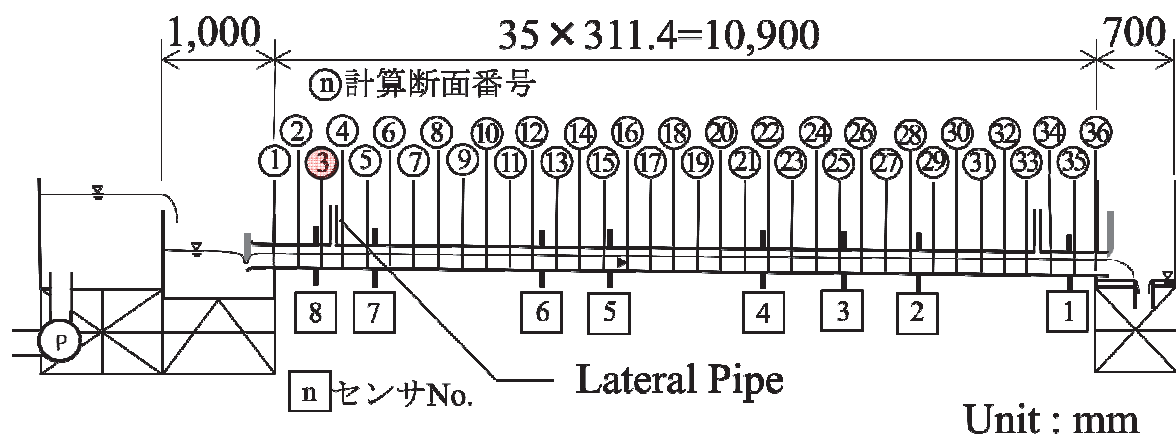


図 4-19 空気圧・気流速度ハイドログラフ：③断面

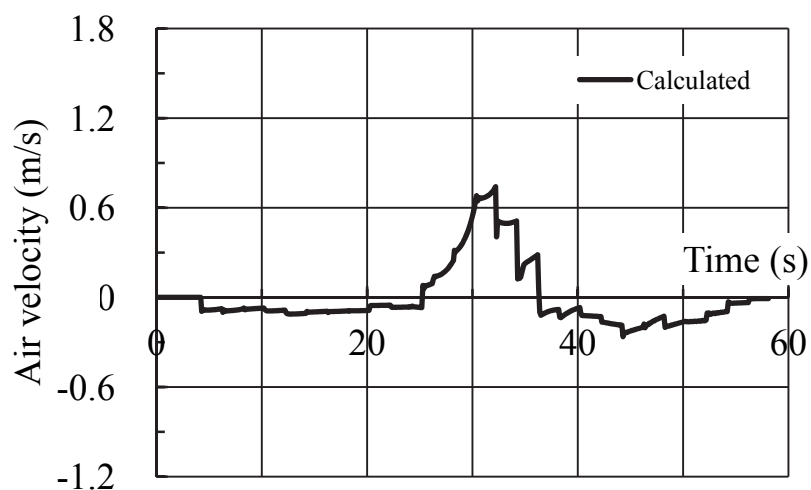
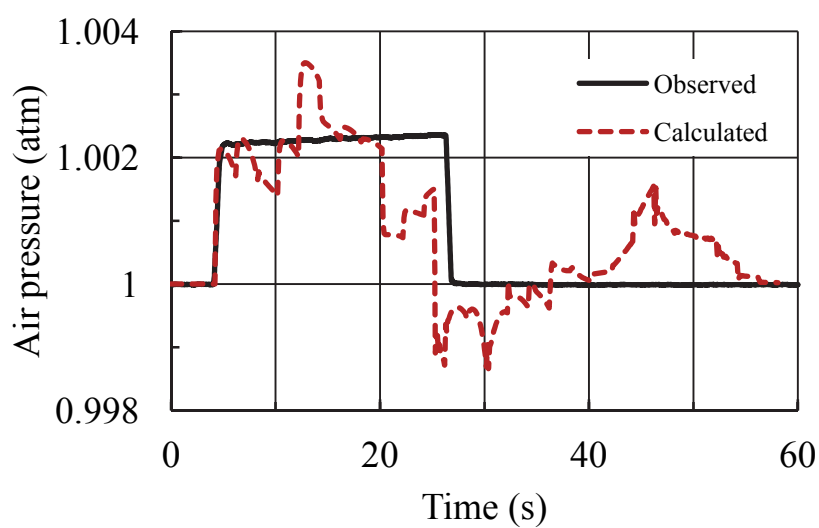
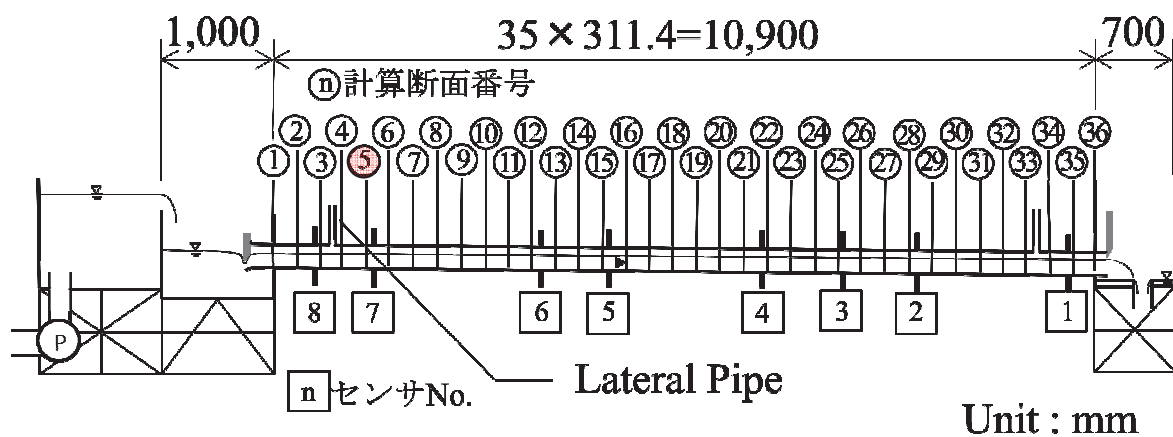


図 4-21 空気圧・気流速度ハイドログラフ：⑤断面

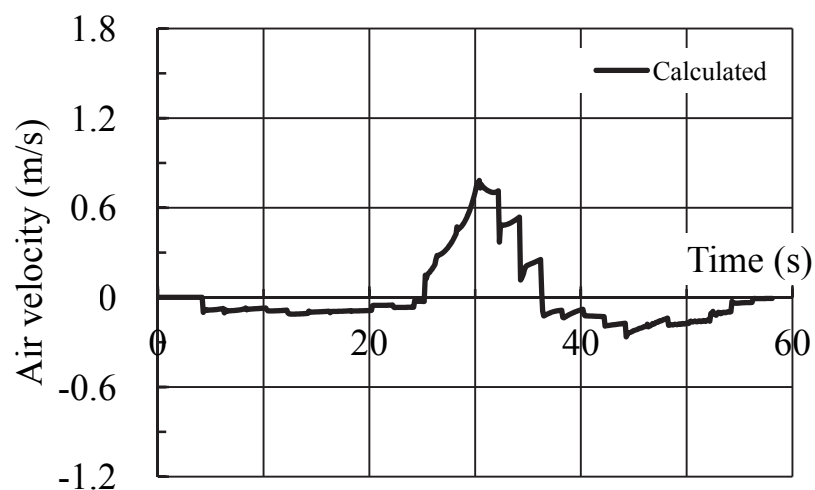
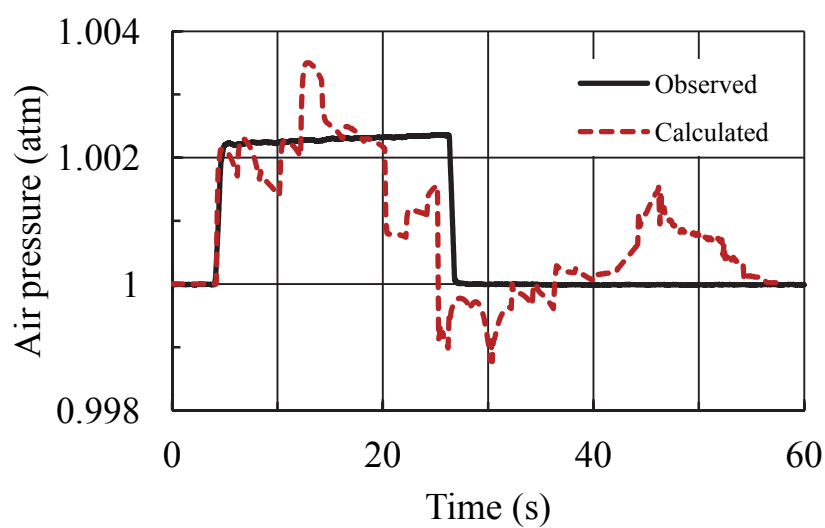
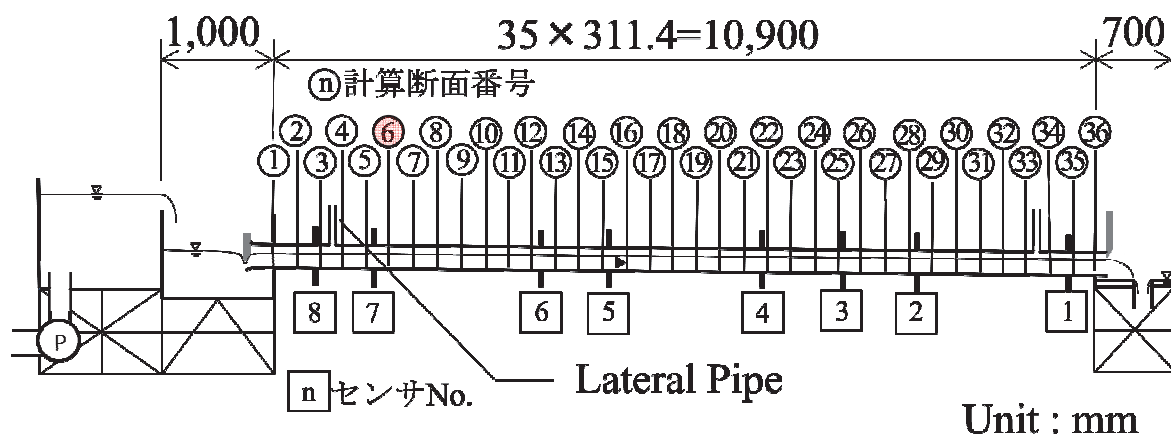


図 4-22 空気圧・気流速度ハイドログラフ：⑥断面

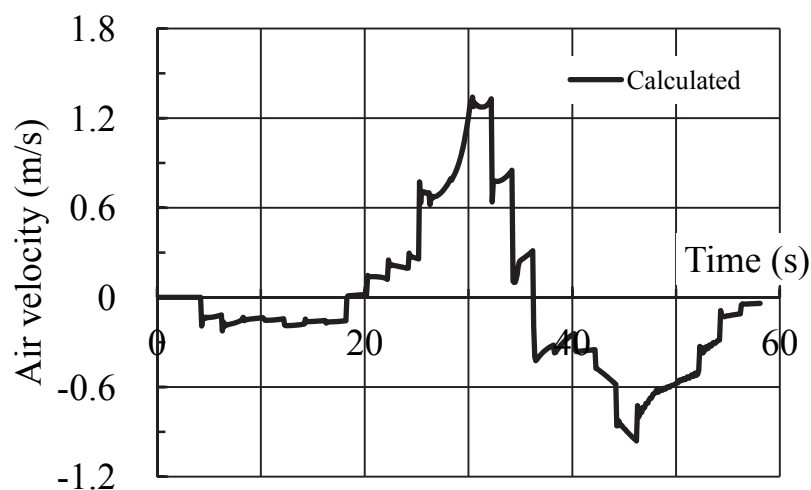
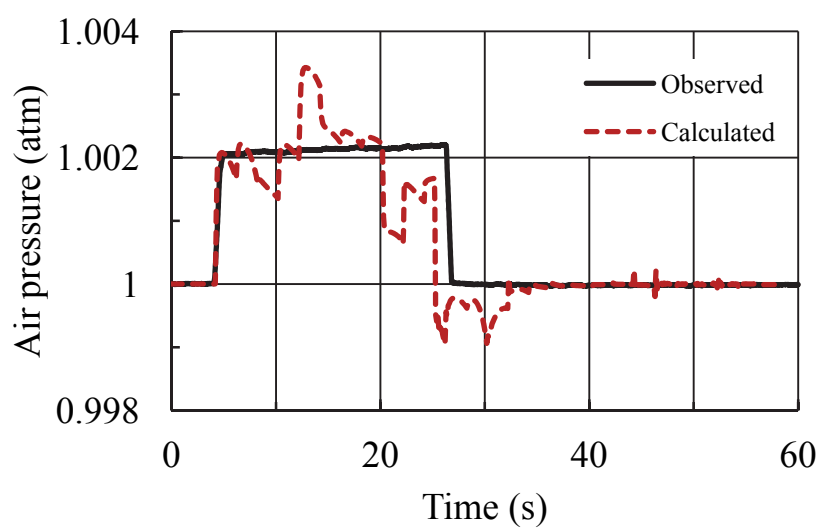
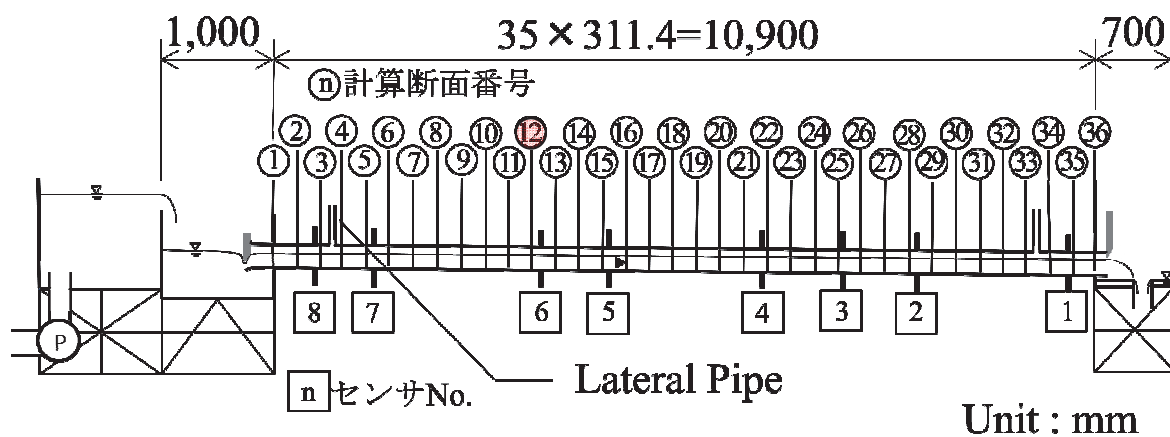


図 4-24 空気圧・気流速度ハイドログラフ：⑫断面

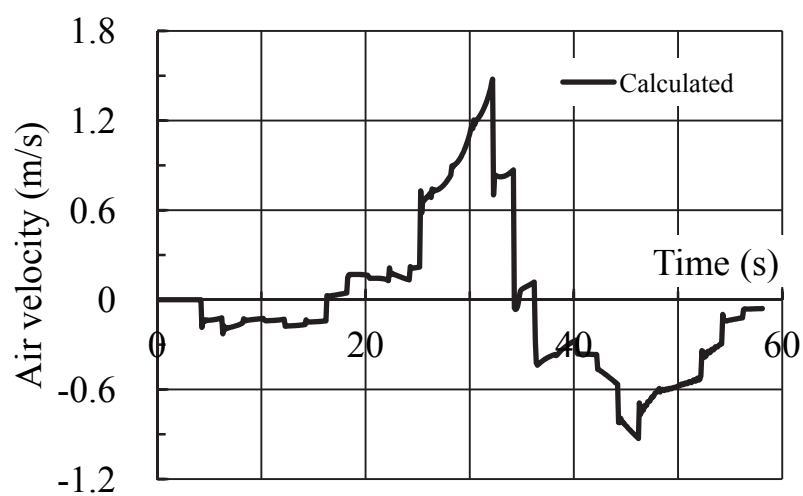
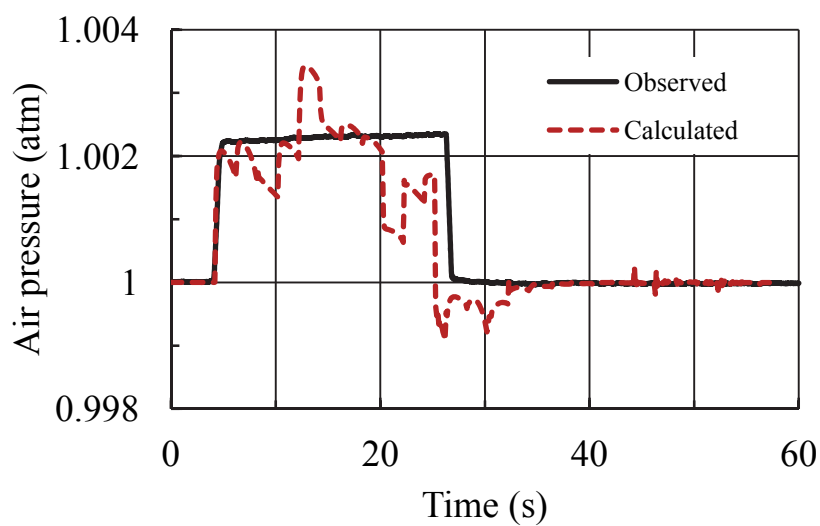
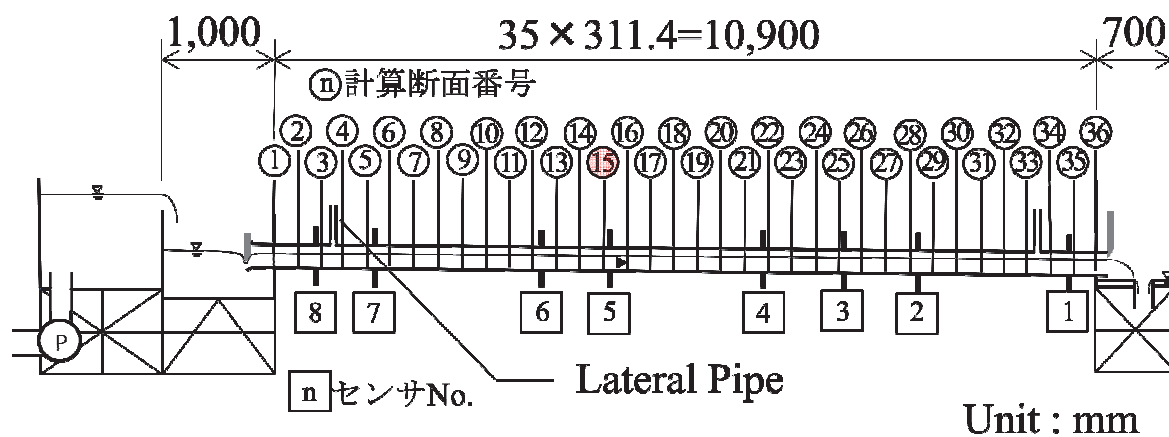


図 4-25 空気圧・気流速度ハイドログラフ：⑮断面

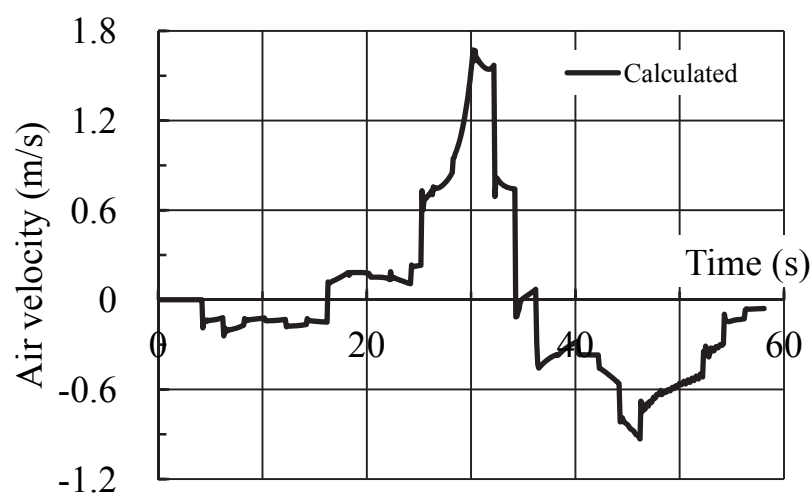
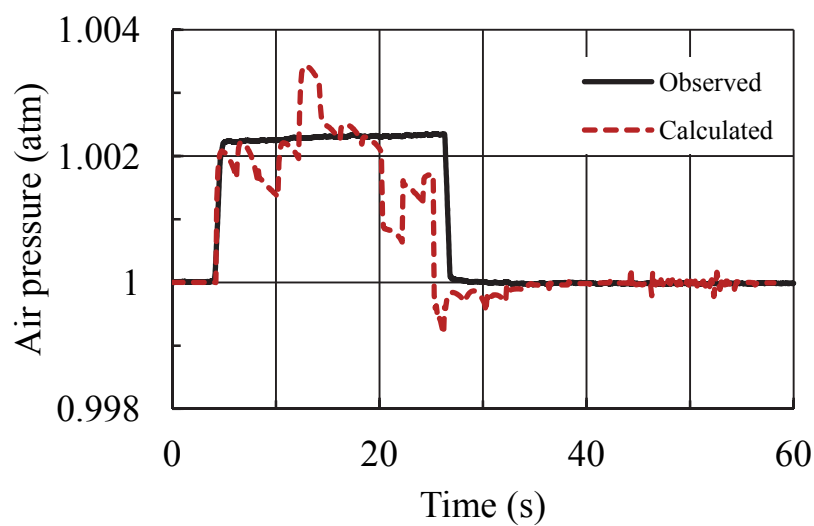
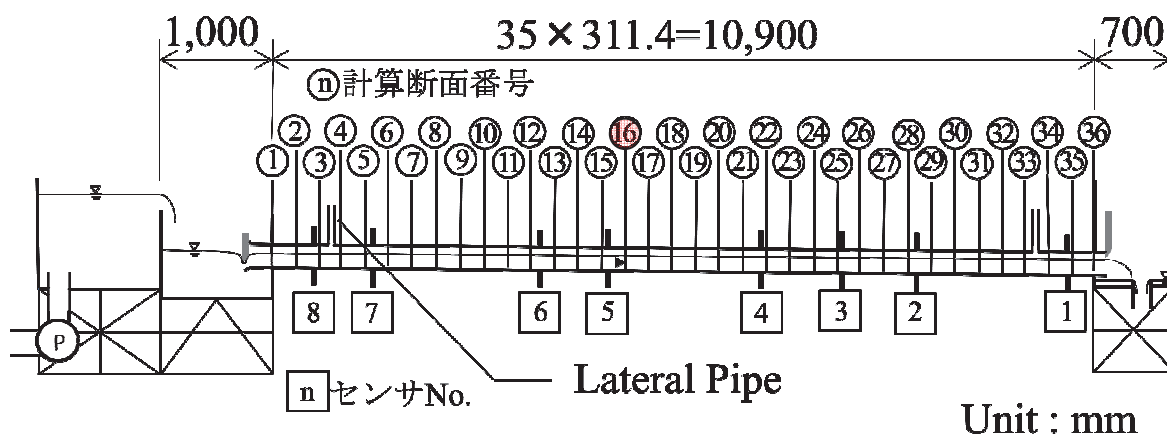


図 4-26 空気圧・気流速度ハイドログラフ：①⑥断面

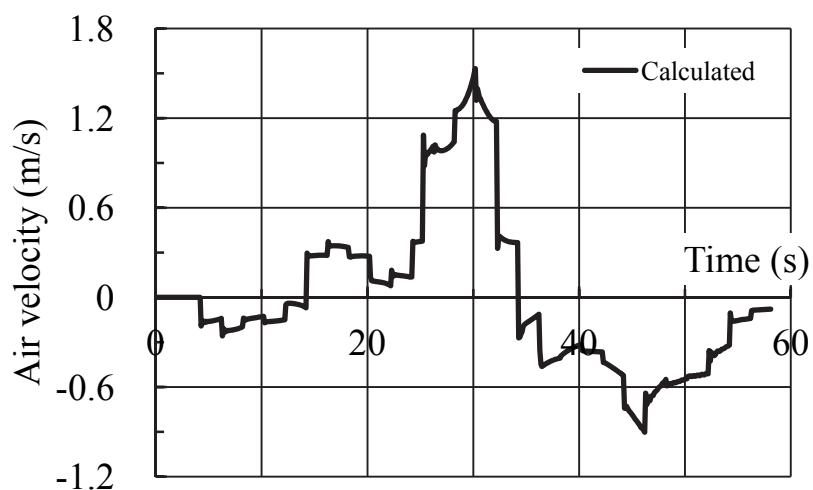
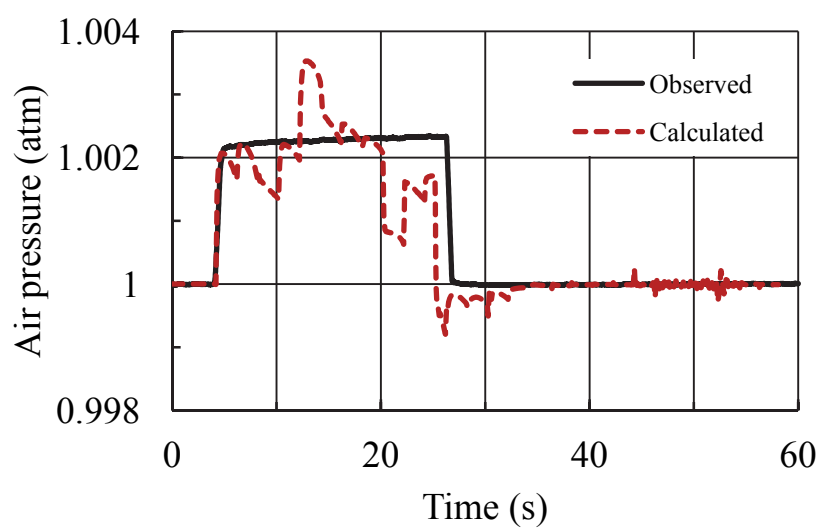
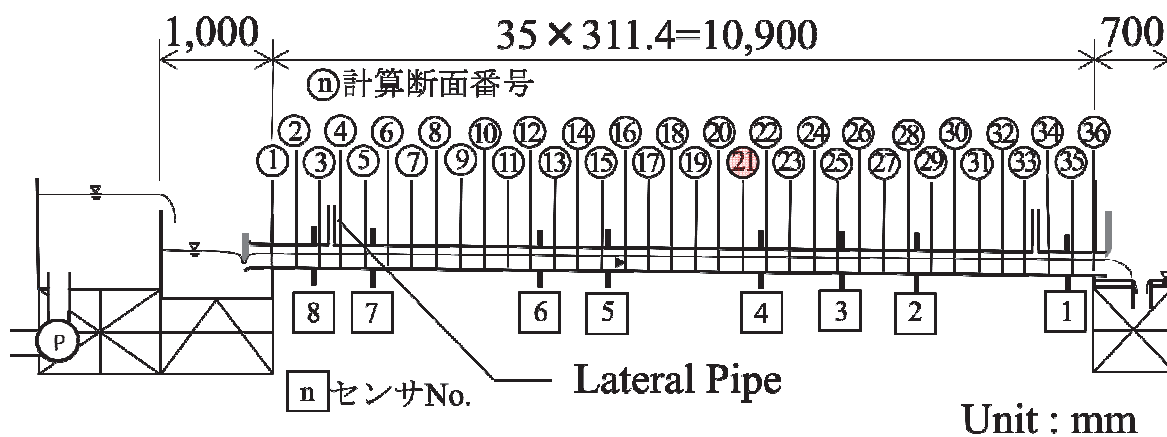


図 4-27 空気圧・気流速度ハイドログラフ：②断面

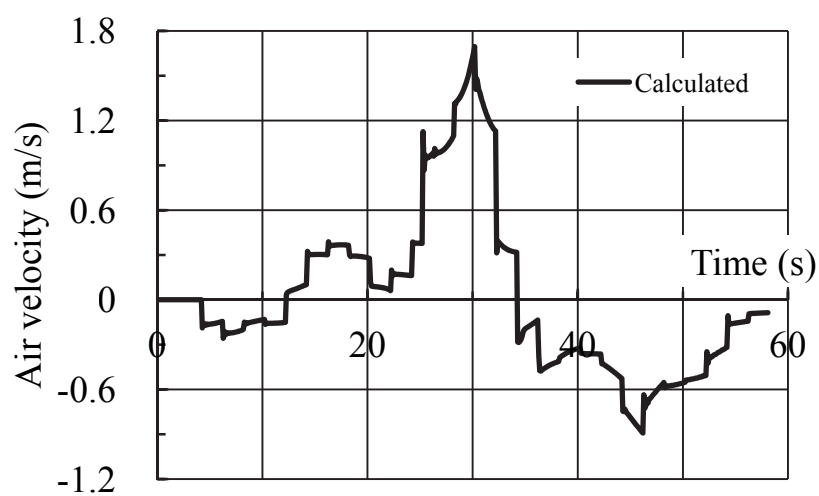
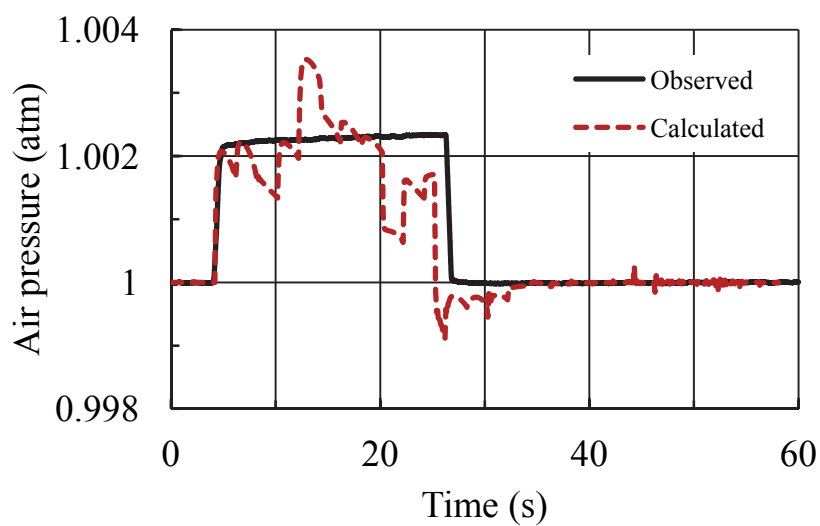
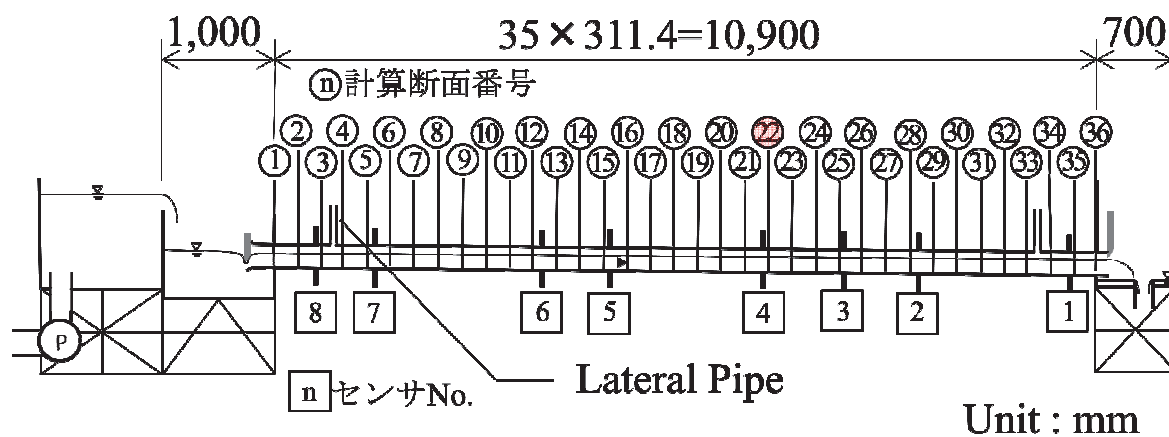


図 4-28 空気圧・気流速度ハイドログラフ：②断面

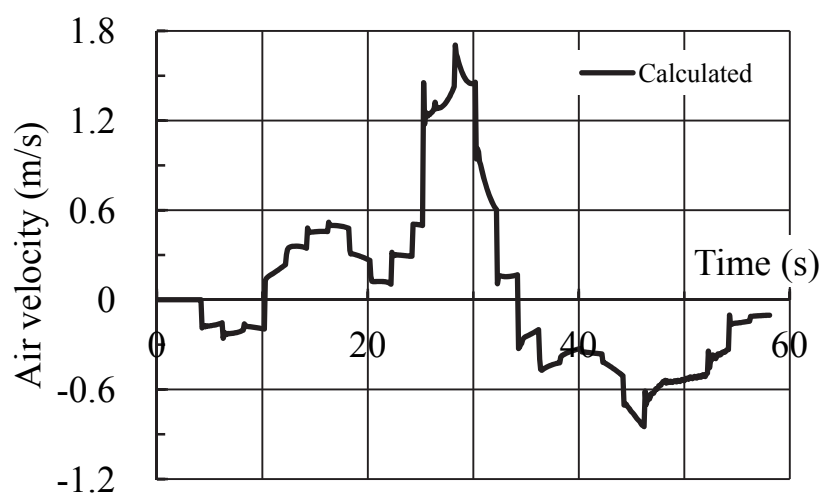
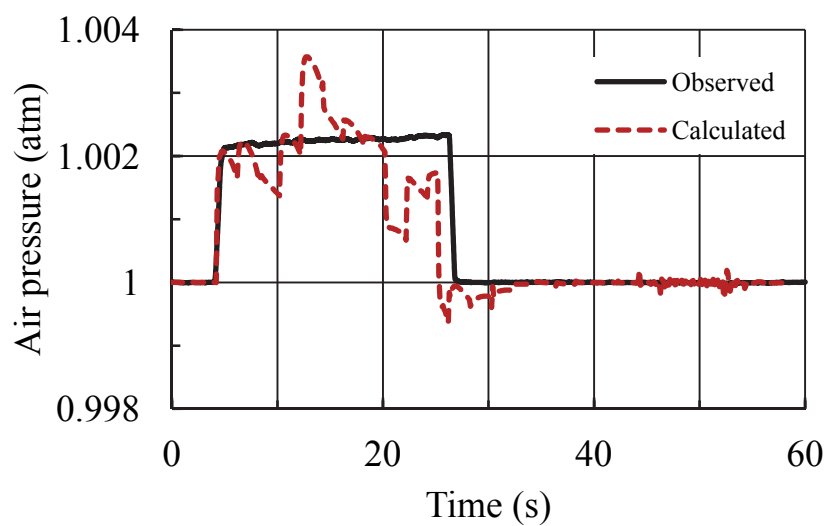
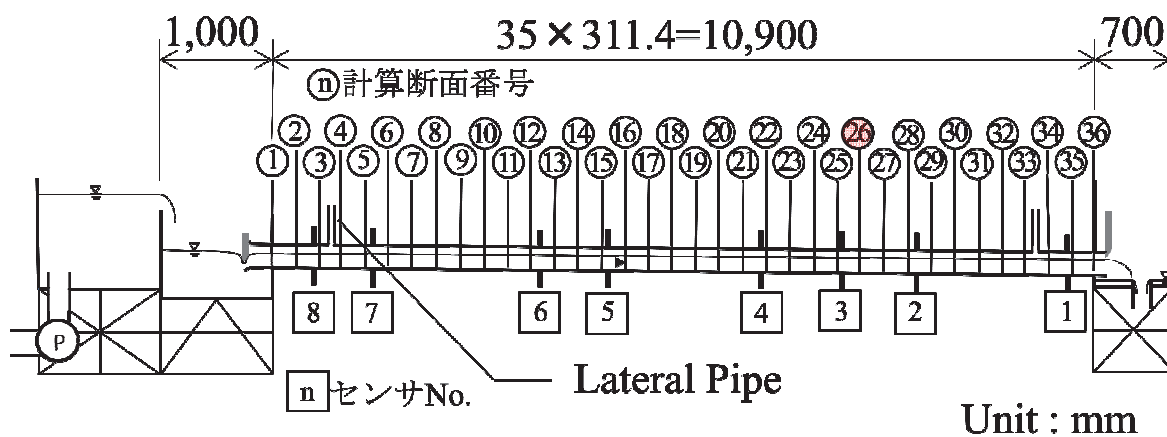


図 4-30 空気圧・気流速度ハイドログラフ：②⑥断面

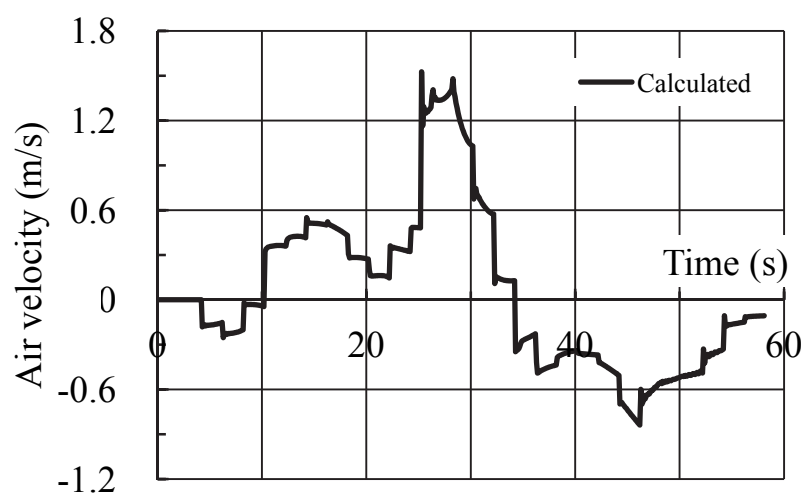
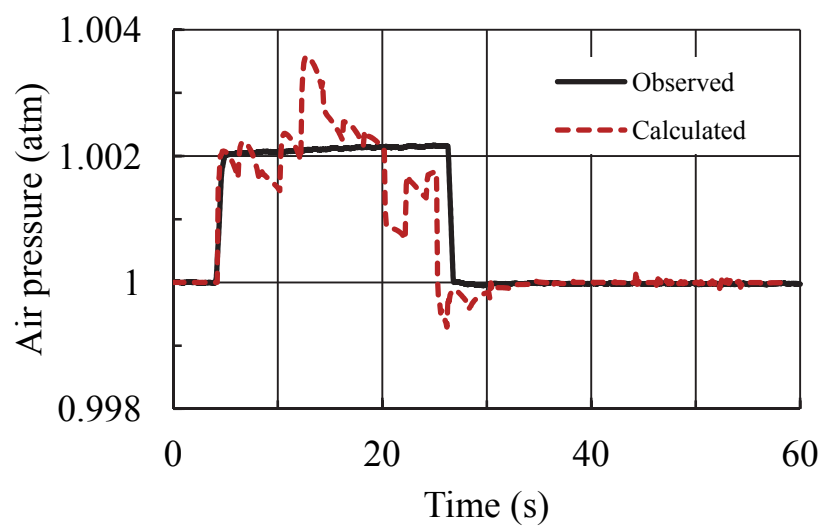
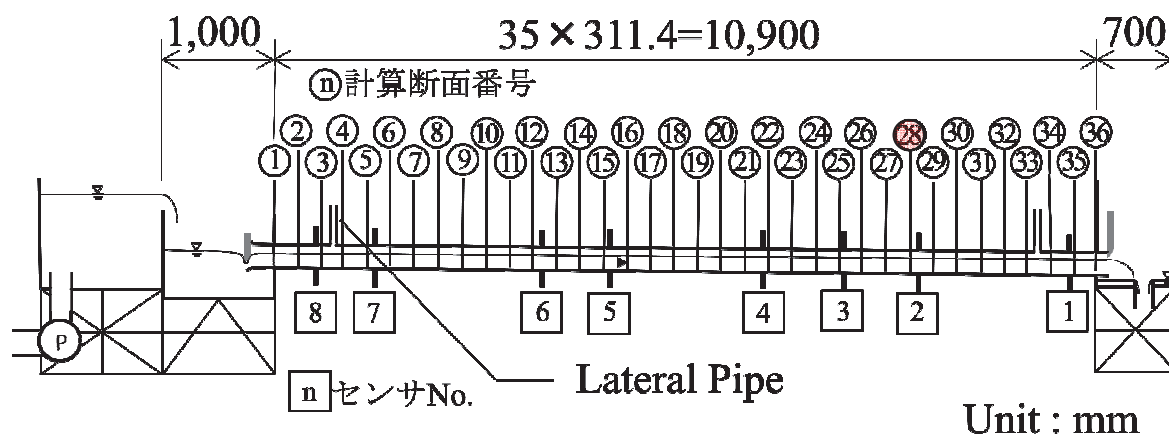


図 4-31 空気圧・気流速度ハイドログラフ：②⑧断面

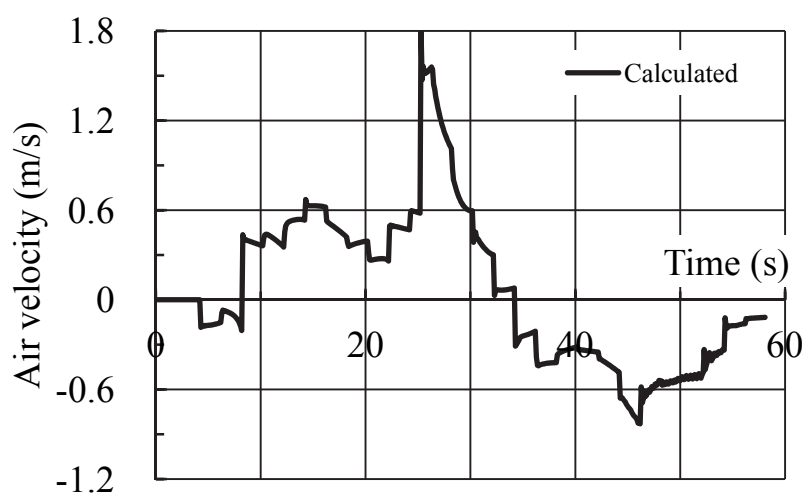
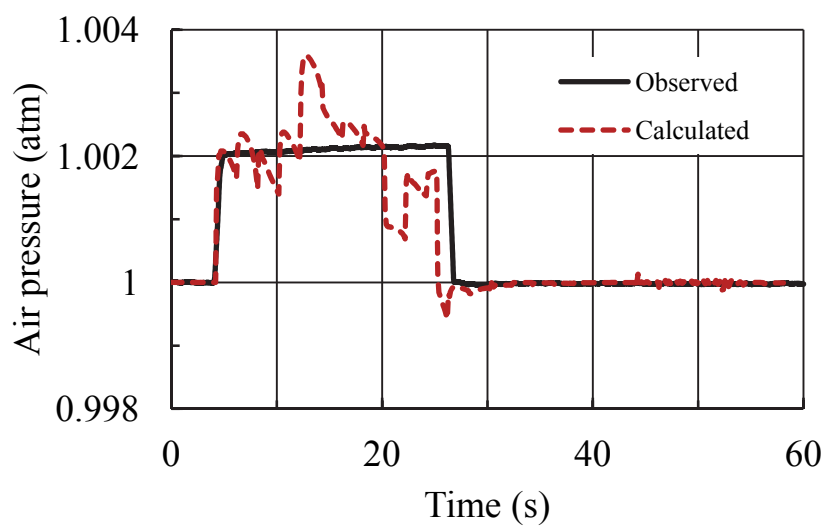
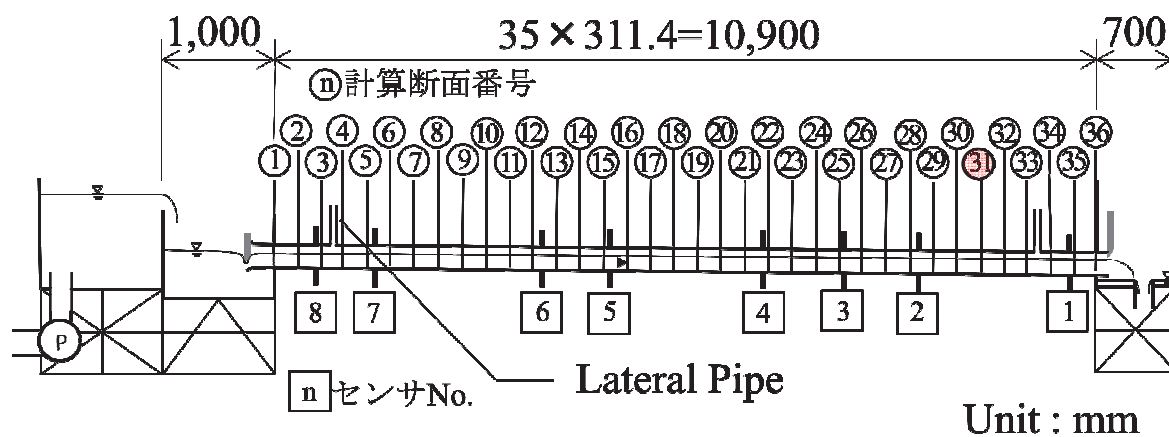


図 4-32 空気圧・気流速度ハイドログラフ：③①断面

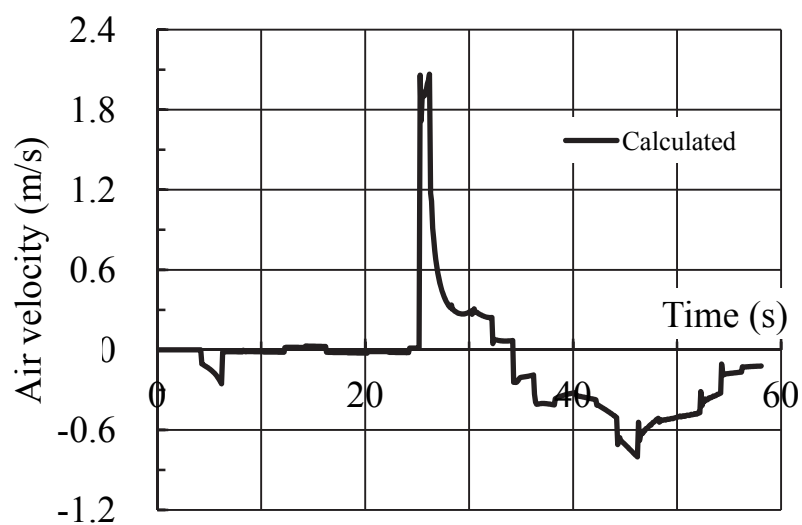
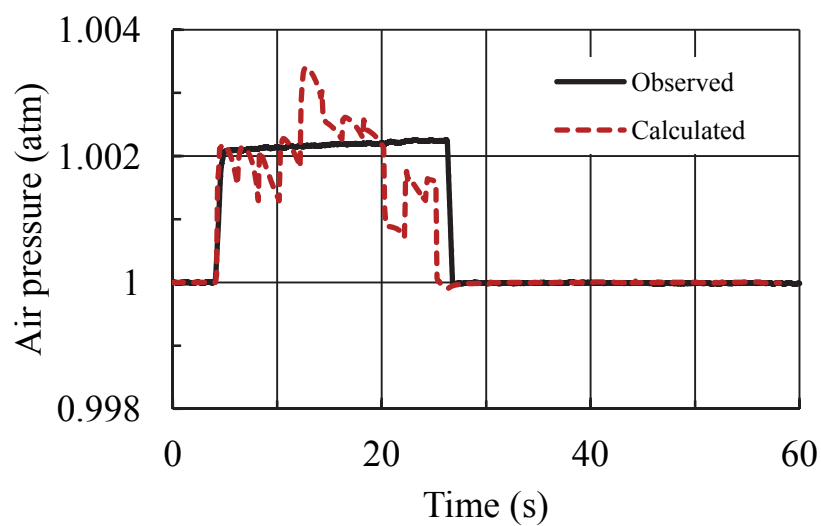
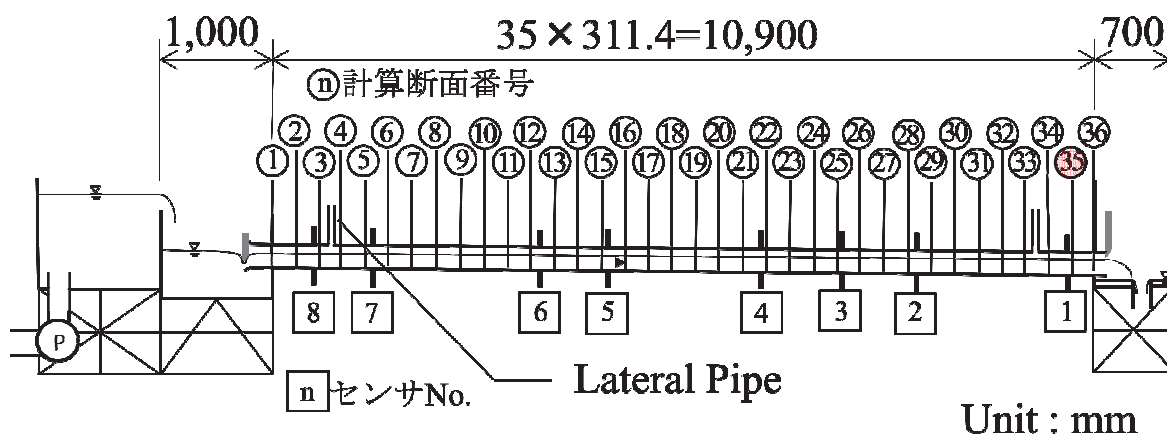


図 4-33 空気圧・気流速度ハイドログラフ：③⑤断面

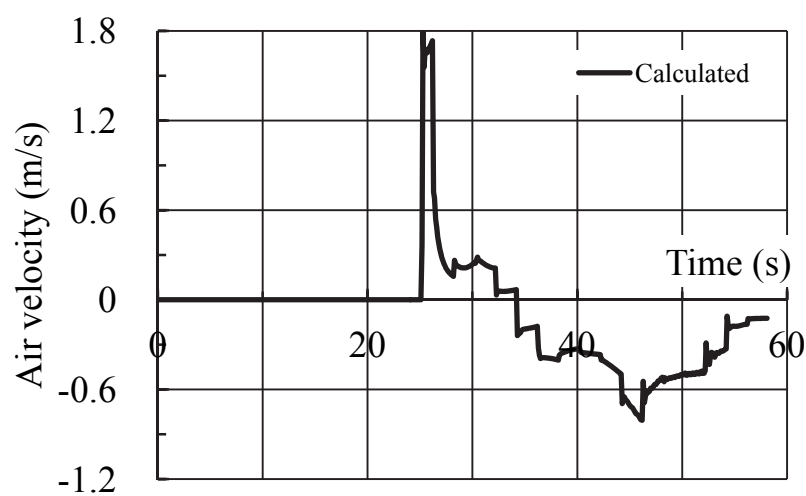
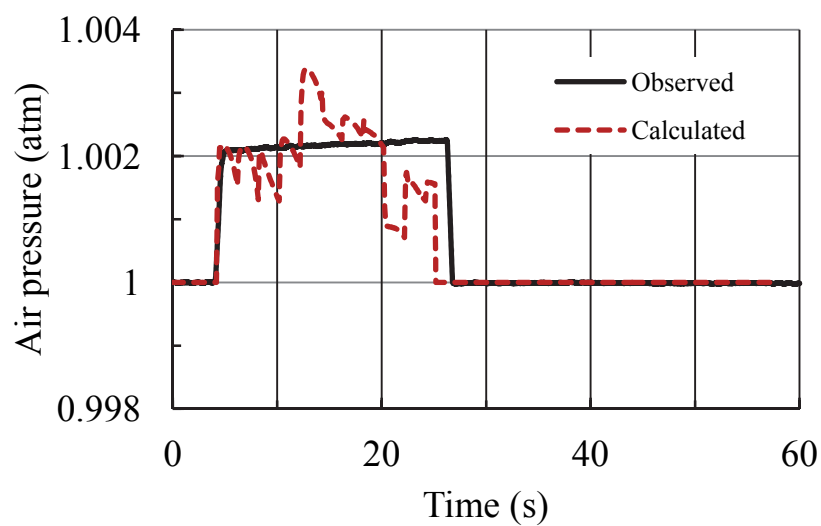
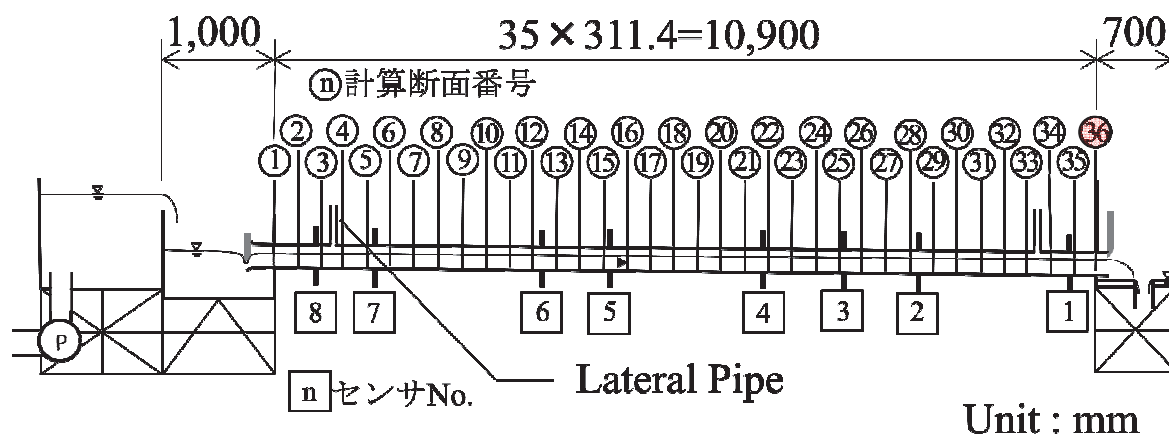


図 4-34 空気圧・気流速度ハイドログラフ：③⑥断面

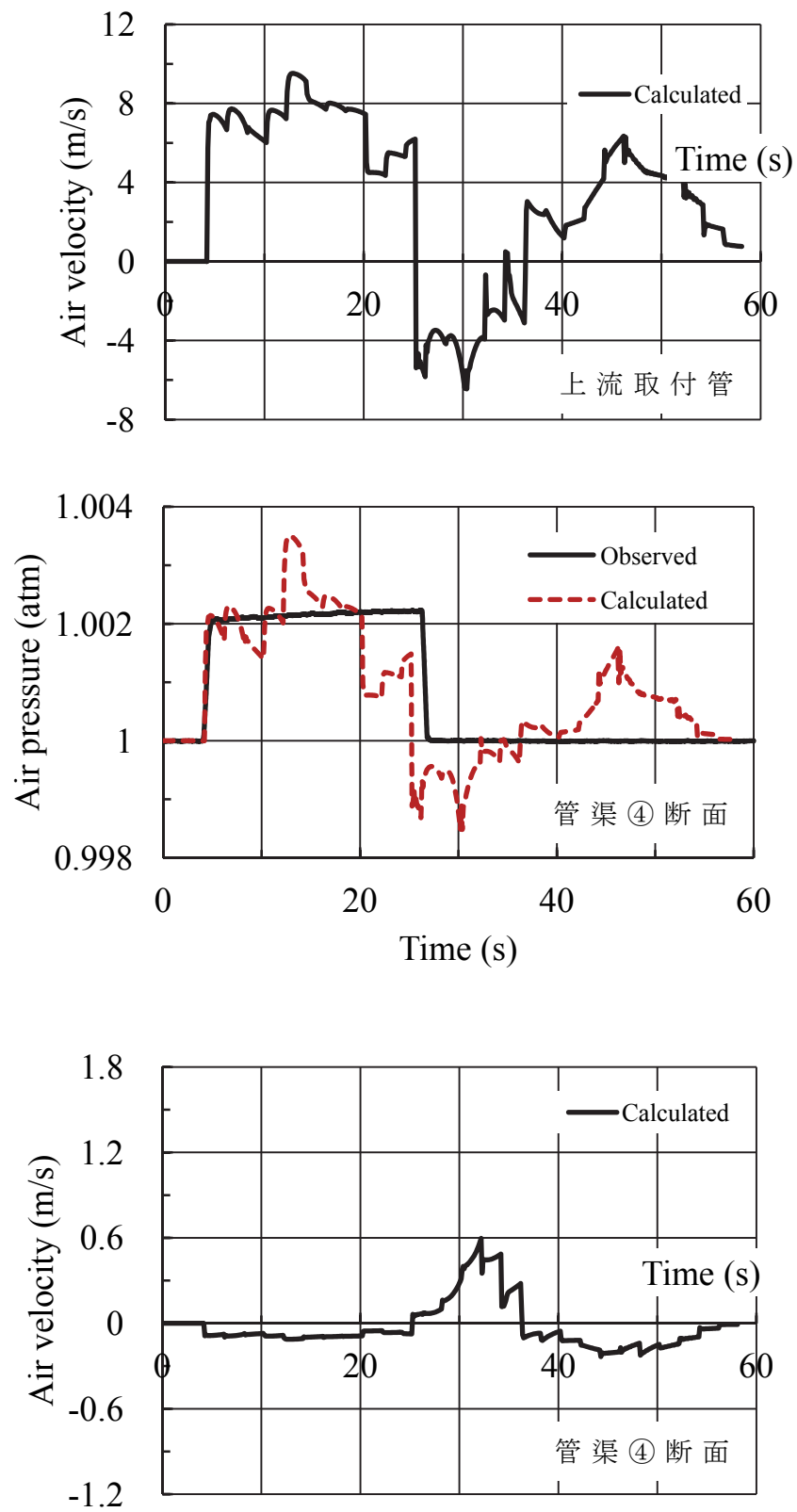


図 4-35 上流取付管の気流速度および管渠の空気圧・気流速度

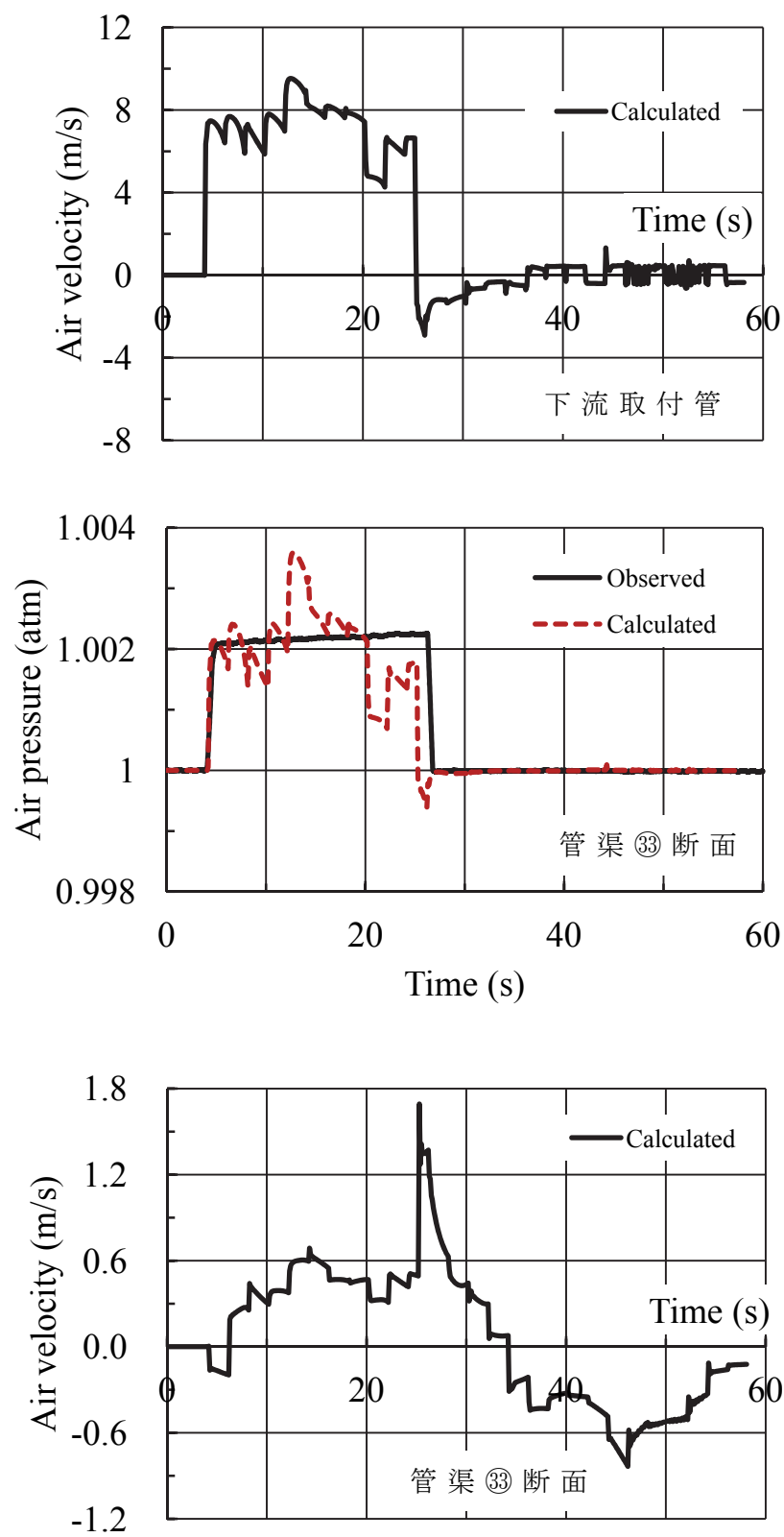


図 4-36 下流取付管の気流速度および管渠の空気圧・気流速度

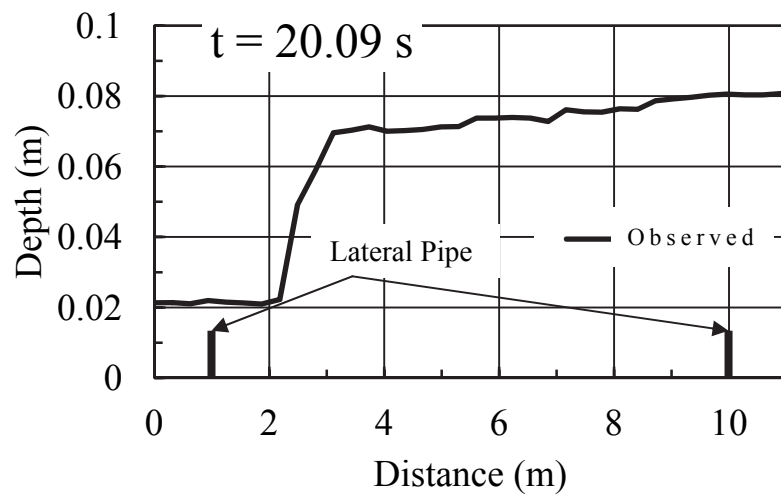
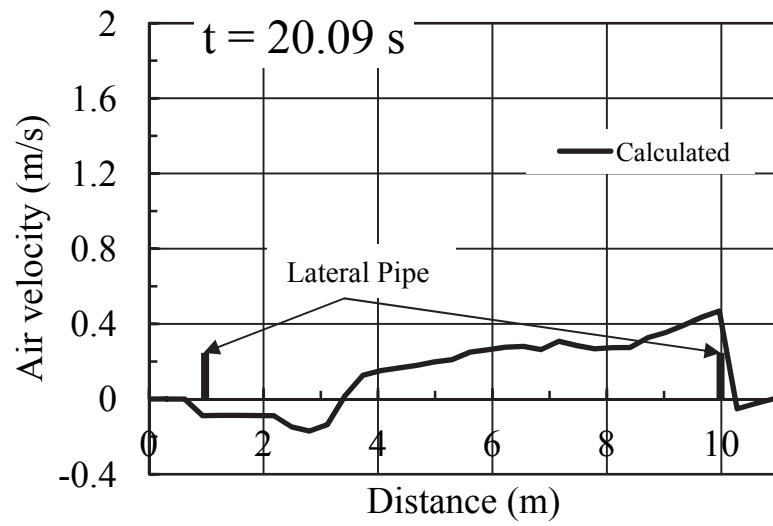
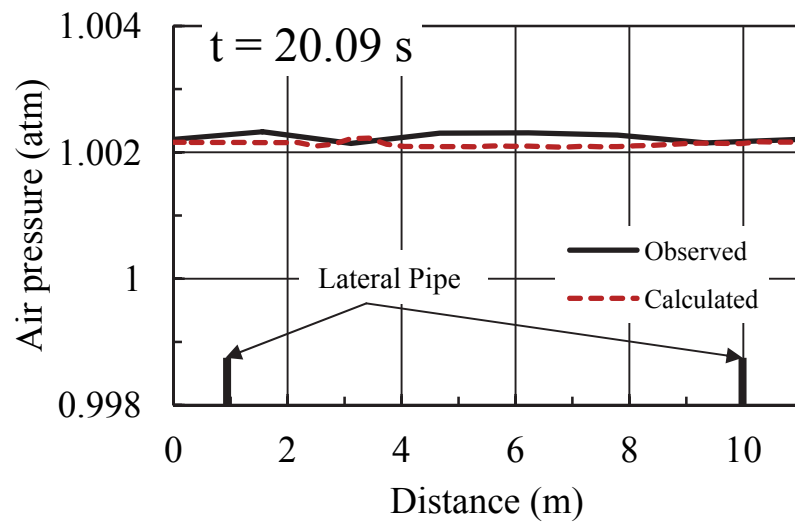


図 4-37 空気圧・気流速度・水深縦断面図： $t=20.09$ s

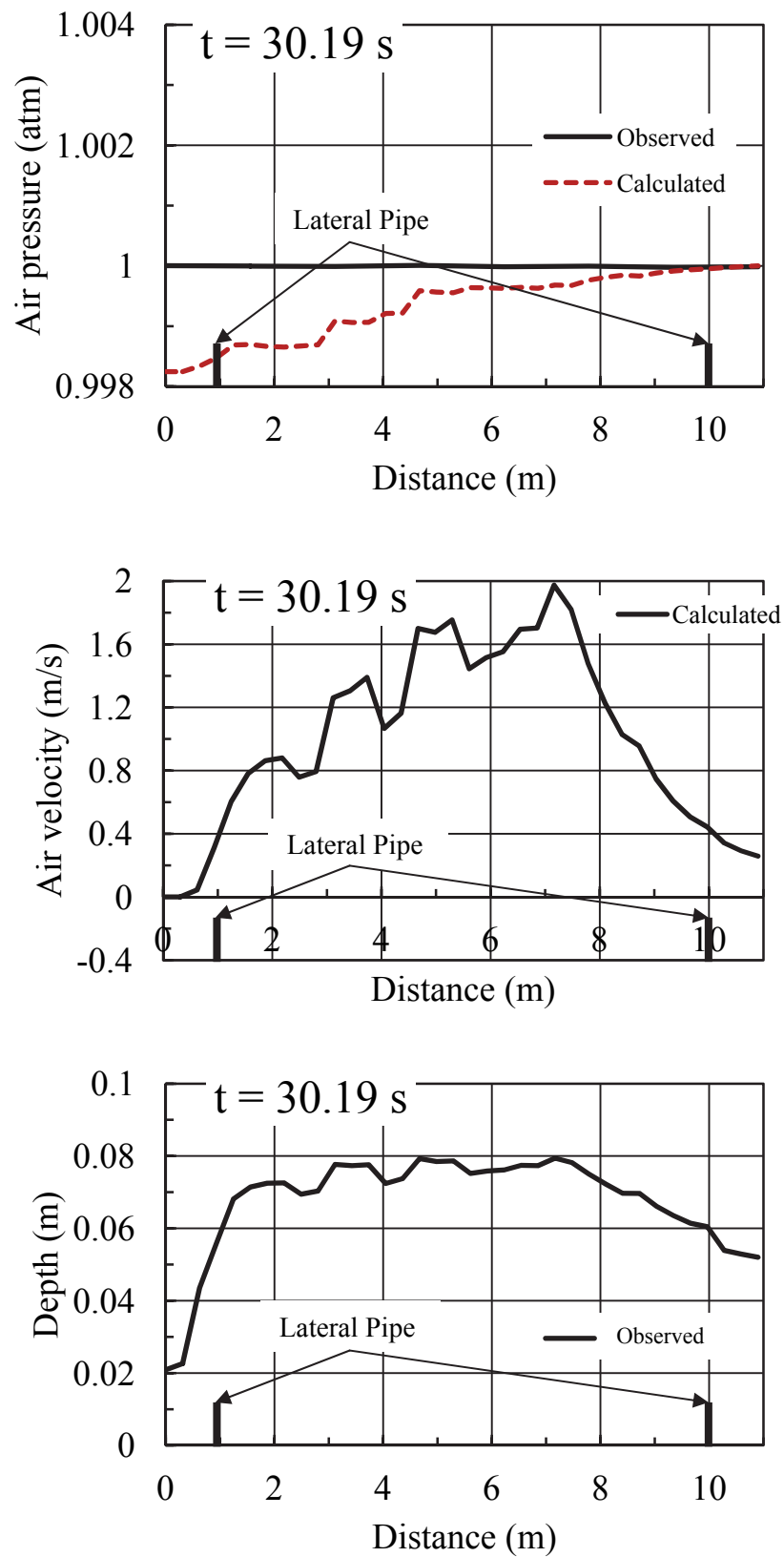


図 4-38 空気圧・気流速度・水深縦断面図： $t=30.19\text{ s}$

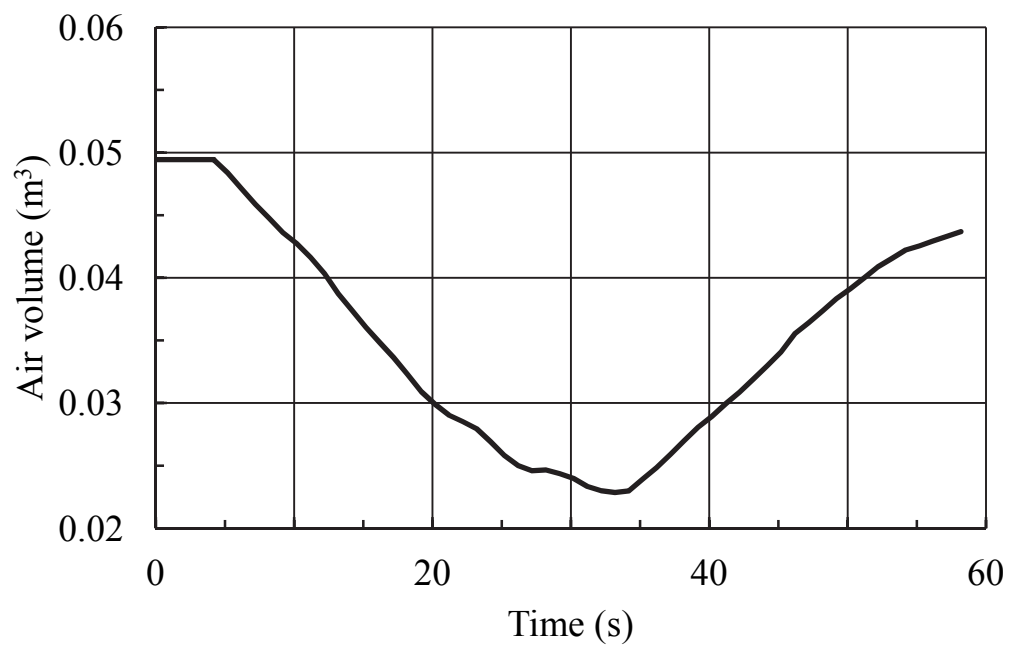


図 4-39 空気体積ハイドログラフ

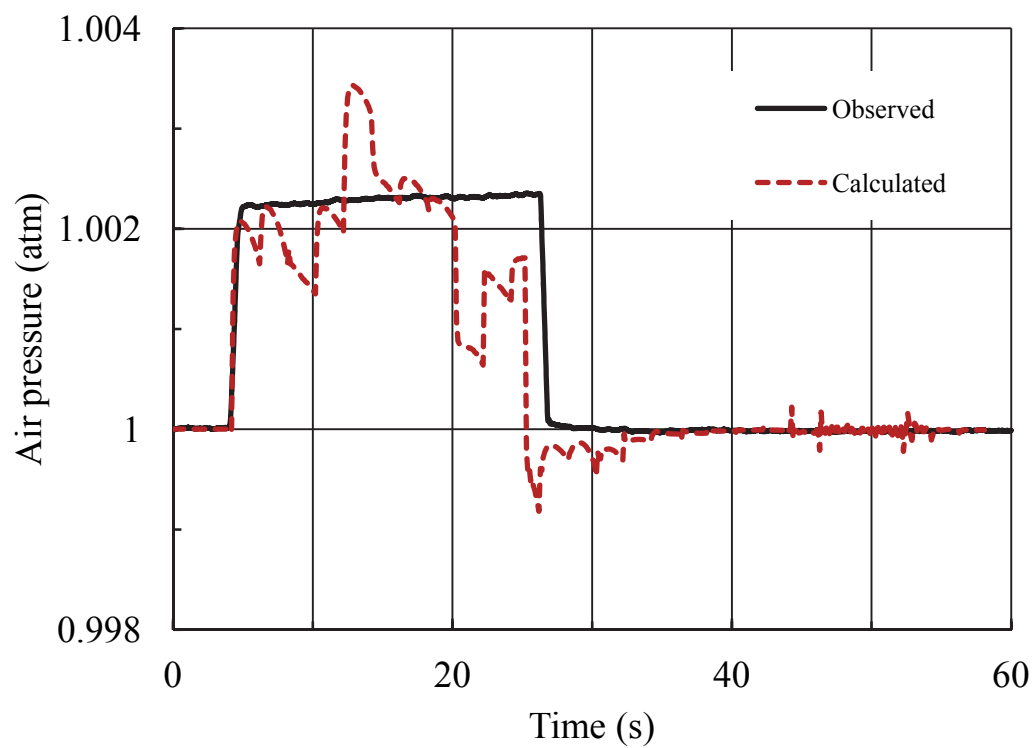


図 4-40 空気圧ハイドログラフ：⑩断面

4.5.2 マンホールを有する排水管渠模型実験

図 4-41 は、マンホールを有する排水管渠に設置した各センサで計測された空気圧ハイドログラフである。下流端でゲートを急閉塞した $t=3.9\text{s}$ 直後に管渠内の空気圧力は急上昇し、 $t=4.8\text{s}$ には 1.0035atm に達している。そして、下流端ゲートを急開放した $t=36.4\text{s}$ 直後に空気圧力は急低下し、 $t=37.0\text{s}$ には大気圧 (1atm) にまで戻っている。空気圧の上昇、および低下は $0.6\sim 0.9\text{sec}$ の微小時間であり、空気圧変化の応答は非常に速いといえる。

また、空気圧力上昇後の各センサの圧力差は、マンホール位置のセンサ No.6 を除くと、 0.0001atm 程度であり、管渠全長に亘り、概ね同一の空気圧変動を示していることが確認された。

図 4-42～図 4-57 は、各断面における実験観測値と数値解析結果の空気圧・気流速度ハイドログラフの比較を示している。この図からは、数値解析結果の空気圧ハイドログラフに空気圧の急上昇部が、 $t=17\text{s}$ 付近に見られる。この理由としては、数値解析計算では C.F.L 条件より $\Delta t=0.0005\text{sec}$ としているが、実験での水位の観測は 0.001sec と Δt の 2 倍の間隔のため、計算に用いた水位は補間値を用いており、結果として、水面変動に非常に敏感に空気圧が応答したこと、および水の流れが上流で射流 (フルード数 $Fr=3.599$)、下流で常流 (フルード数 $Fr=0.611$) のため、跳水が発生し、微小な水面変動が生じたが、位置的にセンサで計測されなかったことも一因と考えられる。

しかしながら、空気圧の急激な上昇や全般的な変動傾向については実験観測値を良く再現しているといえる。なお、気流速度は、ゲート閉鎖直後に、1 秒程度、上流方向の気流変動がみられるが、これを除くと、気流速度は、ゲート開放まで微小な値で推移している。

また、ゲート開放直後から、最大で $V=0.8\text{m/s}$ 程度の下流方向の気流速度が 9 秒程度生じるが、その後は、最大で $V=-1.2\text{m/s}$ 程度の上流方向の気流となり、取付管を有する実験と同じ傾向を示してい

る．しかし，気流速の応答は，取付管を有する実験ほどは明瞭ではない．この理由としては，マンホールの空気孔面積は， $F_A=0.20\text{ cm}^2$ で取付管（ $F_{IA}=0.79\text{ cm}^2$ ）の 1/4 程度しかないため，と考えられる．図 4-58，図 4-59 に，上下流のマンホールの気流速と，管渠の空気圧および気流速のハイドログラフを示す．この図からは，上下流ともマンホールの気流速は，取付管の場合と同様に，管渠内の空気圧と同調していることが明瞭である．ただし，取付管の場合は最大気流速が $V=9.522\text{ m/s}$ であったのに対し，マンホールの場合は，最大気流速が $V=26.447\text{ m/s}$ と約 2.5 倍と大きいことが挙げられる．したがって，雨水排水管渠内の空気の流れの解析にあたっては，マンホールを考慮することが不可欠であるといえる．また，図 4-60 に，空気圧が最大となる $t=24.87\text{ s}$ の空気圧，気流速，および水深の縦断図を示す．この図からは，空気圧は縦断方向にはほぼ一定であり，解析結果と一致している．また，気流速は， $V=0.2\text{ m/s}$ 以下で微小ではあるが，マンホール位置で低下しており，本解析モデルはマンホールに対しても適用性を示していると考えられる．なお，気流速の最大値は，㉔断面（ $x=7.786\text{ m}$ ）で発生しており，その値は，気流速 $V=0.194\text{ m/s}$ ，レイノルズ数 $Re=607$ で，層流である．

次に，図 4-61 に，下流端ゲート開放後の， $t=40.57\text{ s}$ の空気圧，気流速，および水深の縦断図を示す．この図からは，気流速は水深と同調しており，水深の微変動を反映した解析結果となっていることが確認された．なお，気流速の最大値は，㉑断面（ $x=3.114\text{ m}$ ）で発生しており，その値は，気流速 $V=0.191\text{ m/s}$ ，レイノルズ数 $Re=346$ で，層流である．

図 4-62 に管渠内の空気体積ハイドログラフを，図 4-63 に，管渠中央付近の㉒断面の空気圧ハイドログラフを示す．これらの図から，管渠内の空気体積の微細な減少率の変化が，空気圧の急激な上昇・低下となっていることが確認され，局所的な水面変動よりも，管渠内の空気体積が空気圧の変動の要因となっていることが分かった．

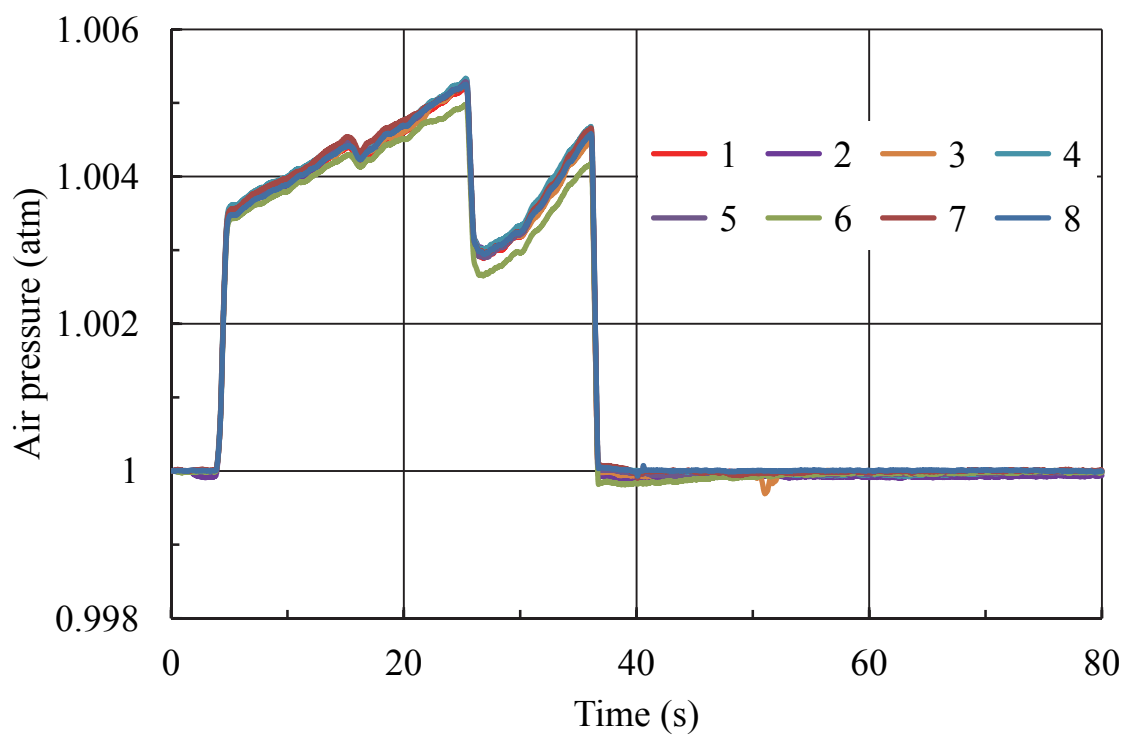
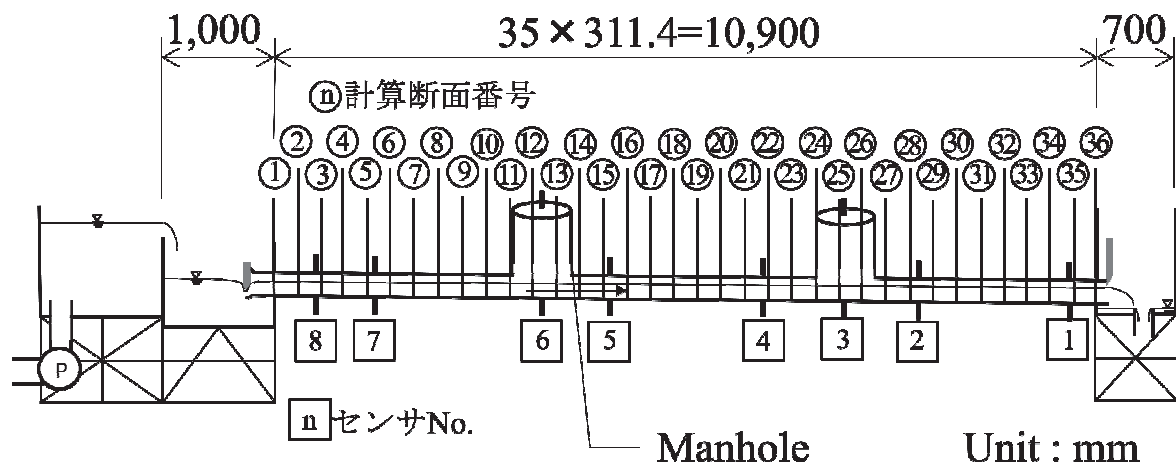


図 4-41 各センサで計測された空気圧（マンホール有り）

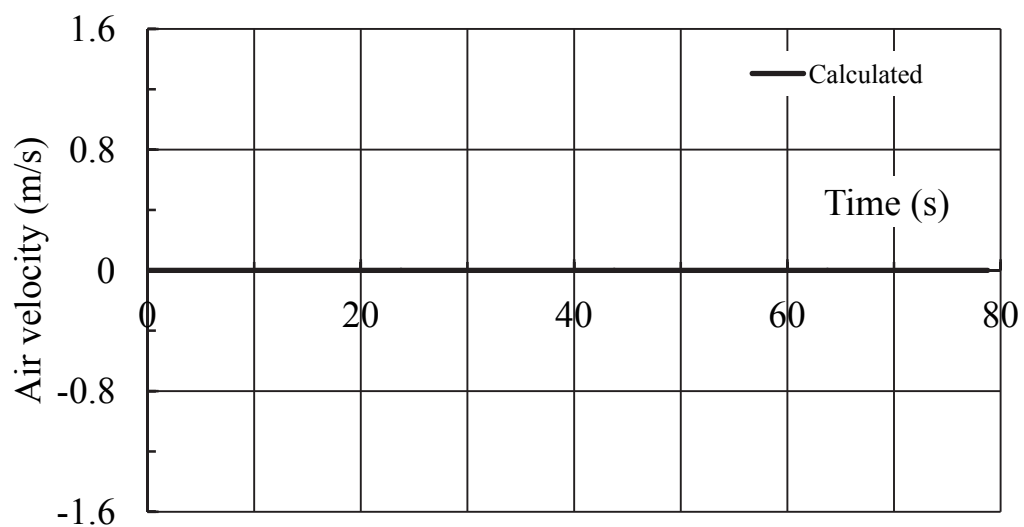
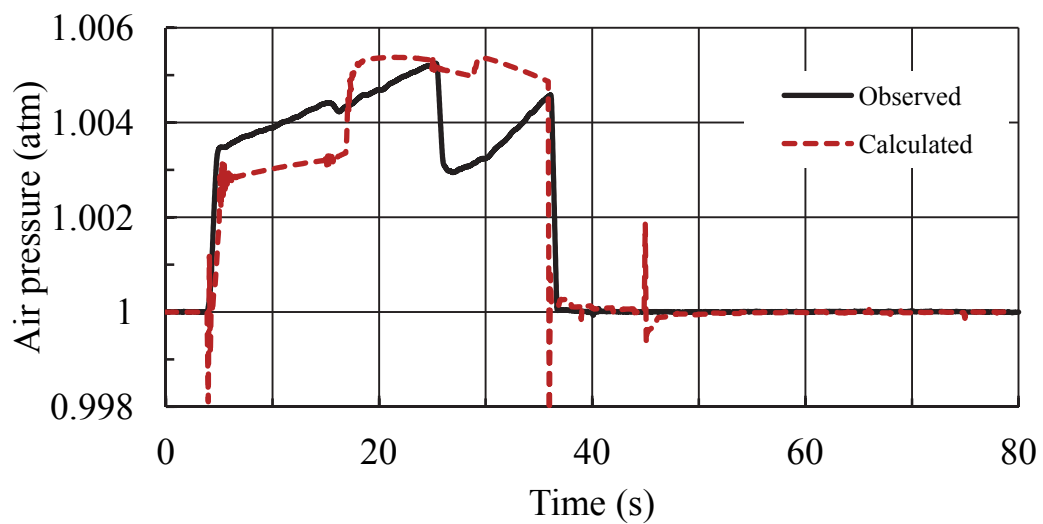
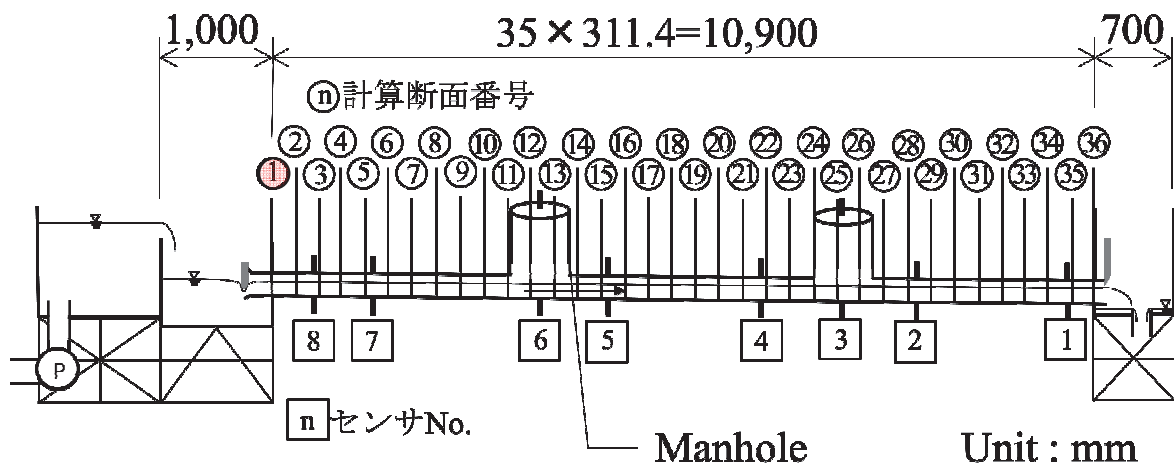


図 4-42 空気圧・気流速度ハイドログラフ：①断面

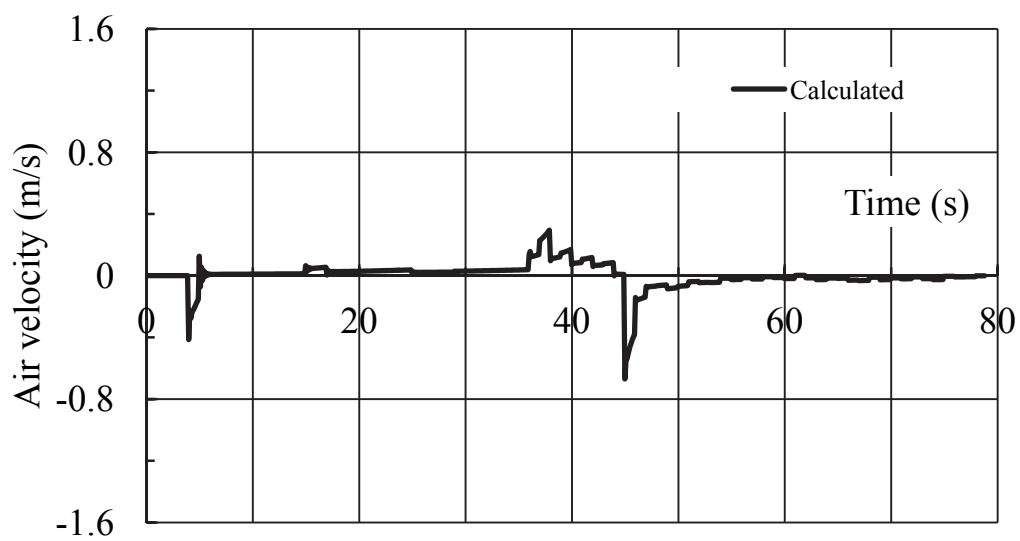
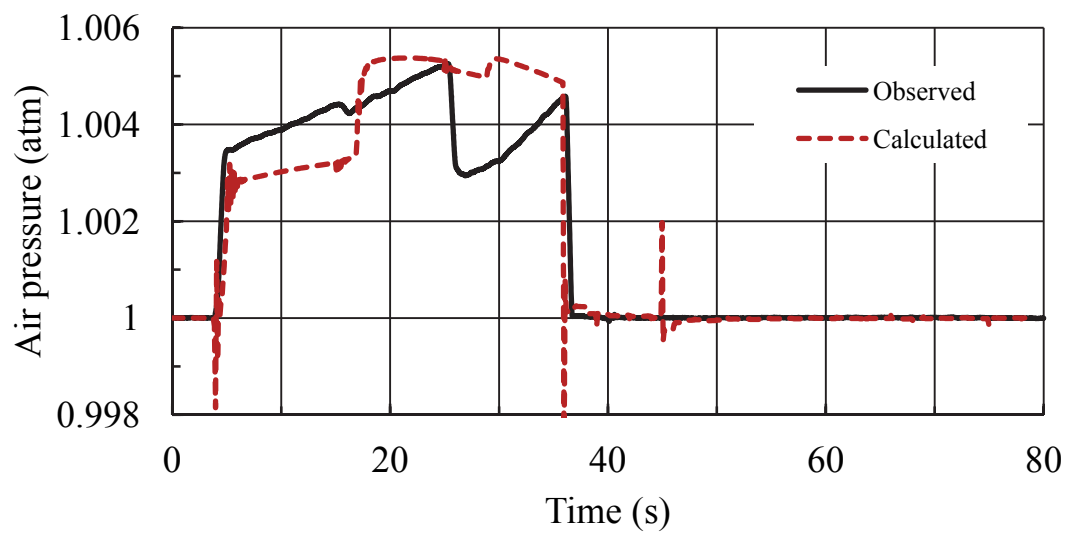
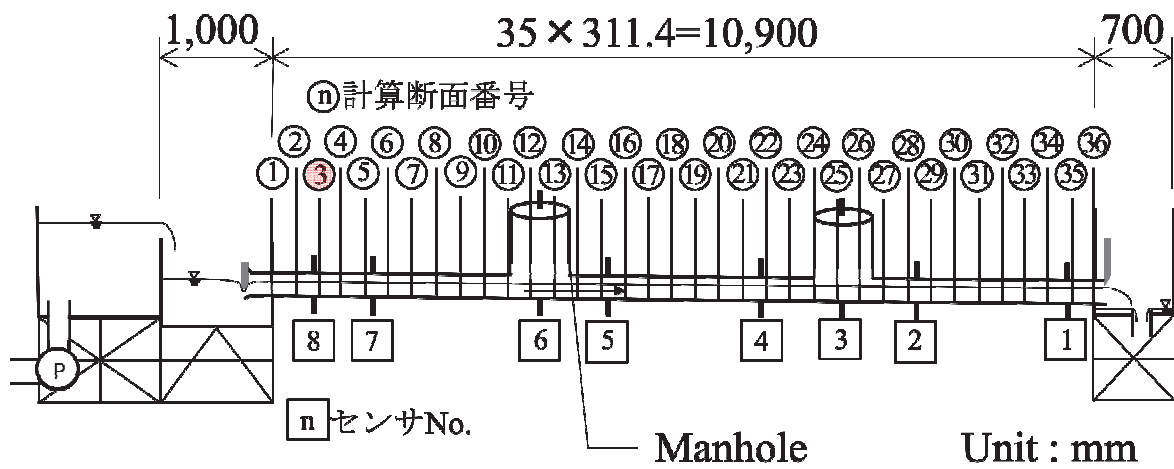


図 4-43 空気圧・気流速度ハイドログラフ：③断面

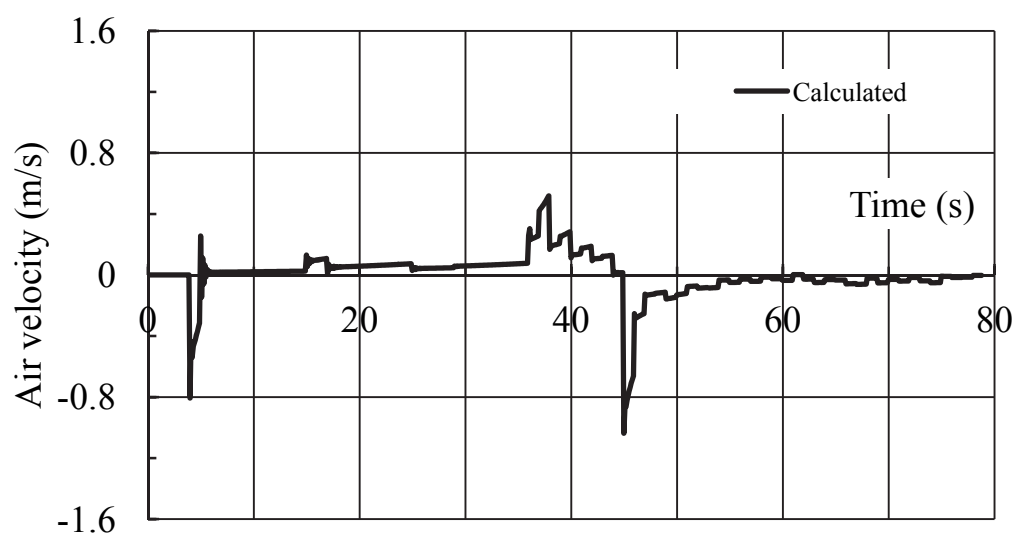
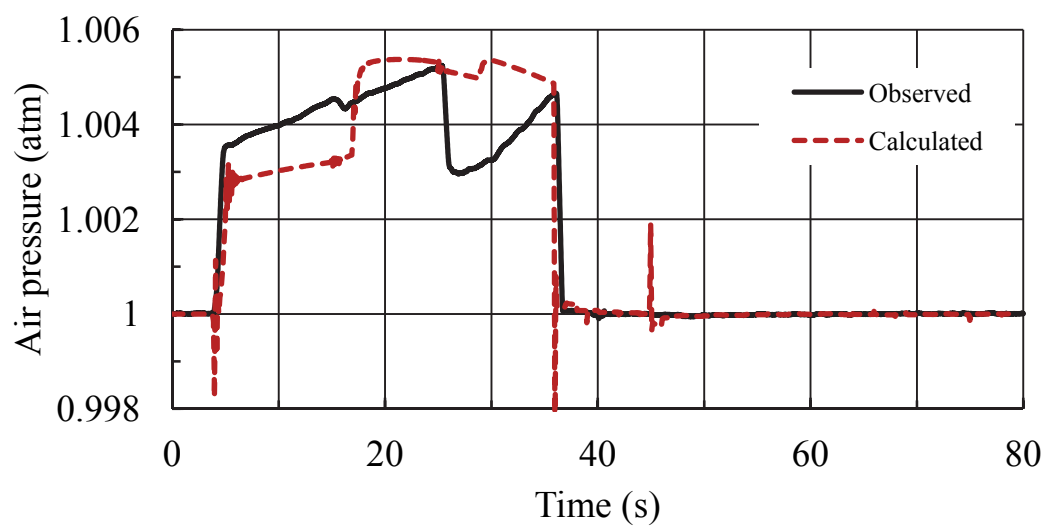
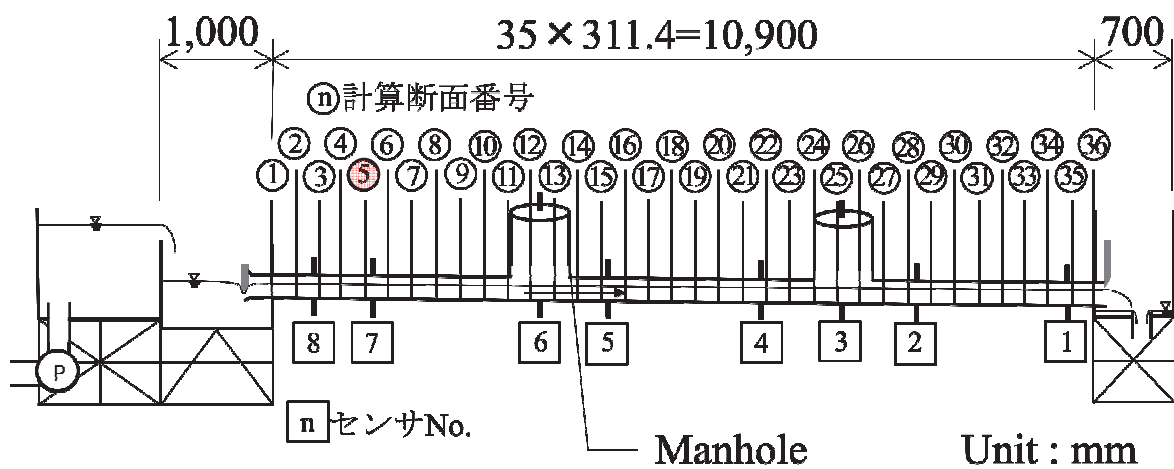


図 4-44 空気圧・気流速度ハイドログラフ：⑤断面

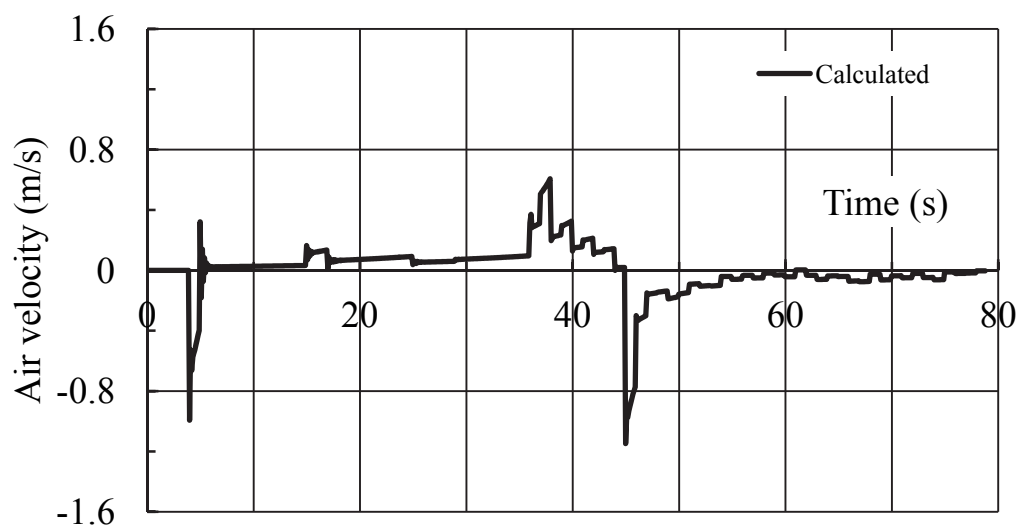
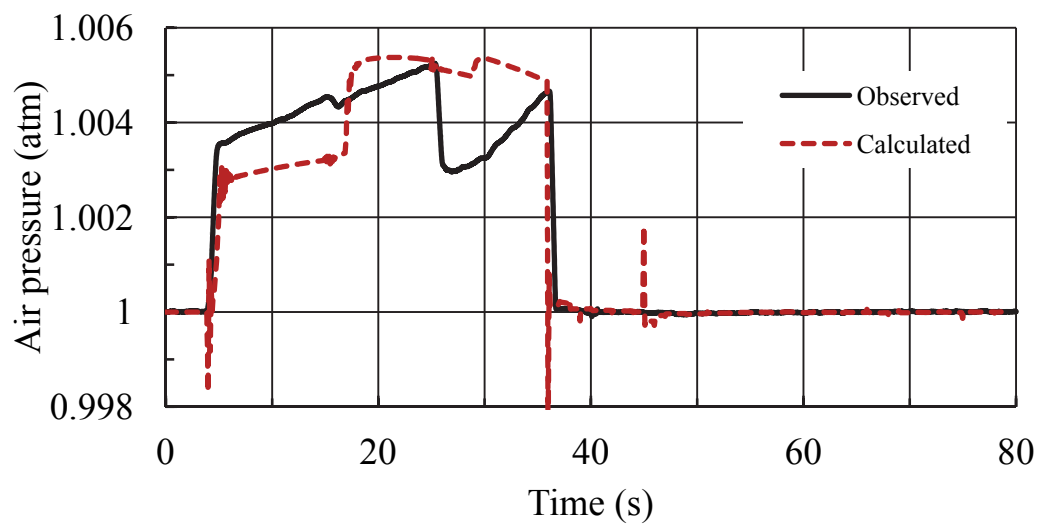
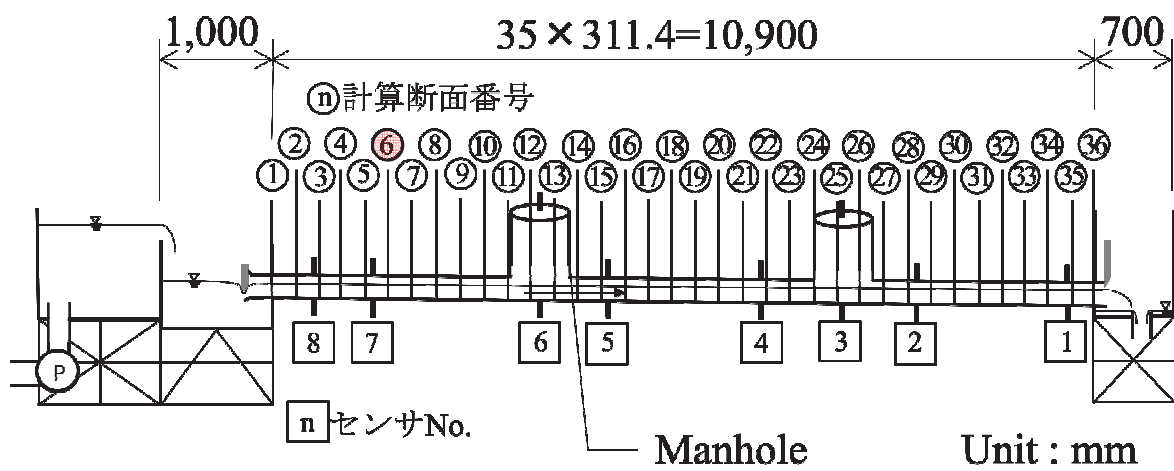


図 4-45 空気圧・気流速度ハイドログラフ：⑥断面

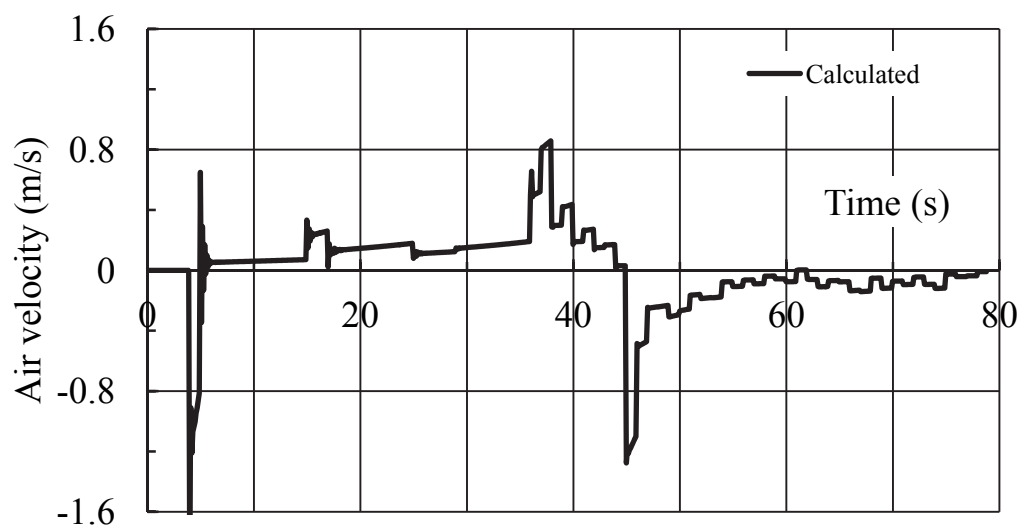
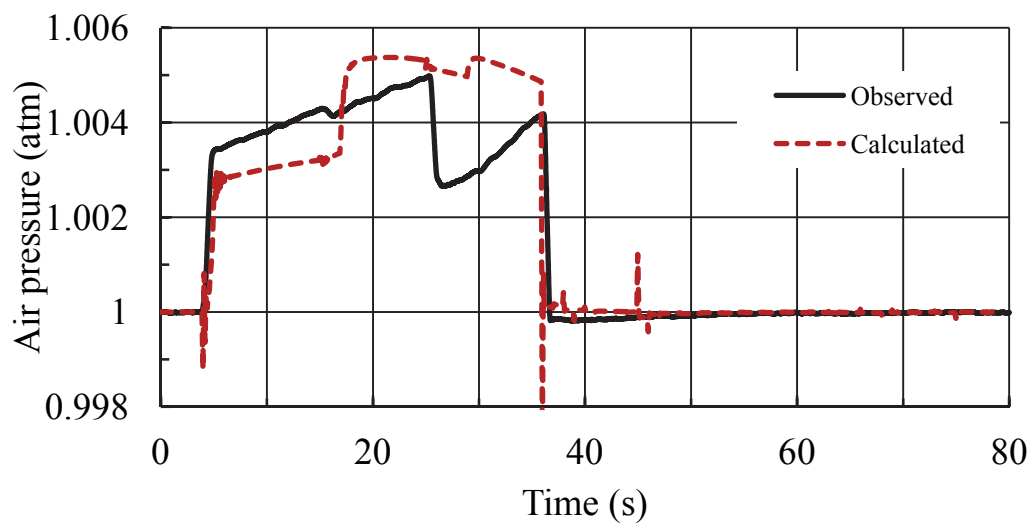
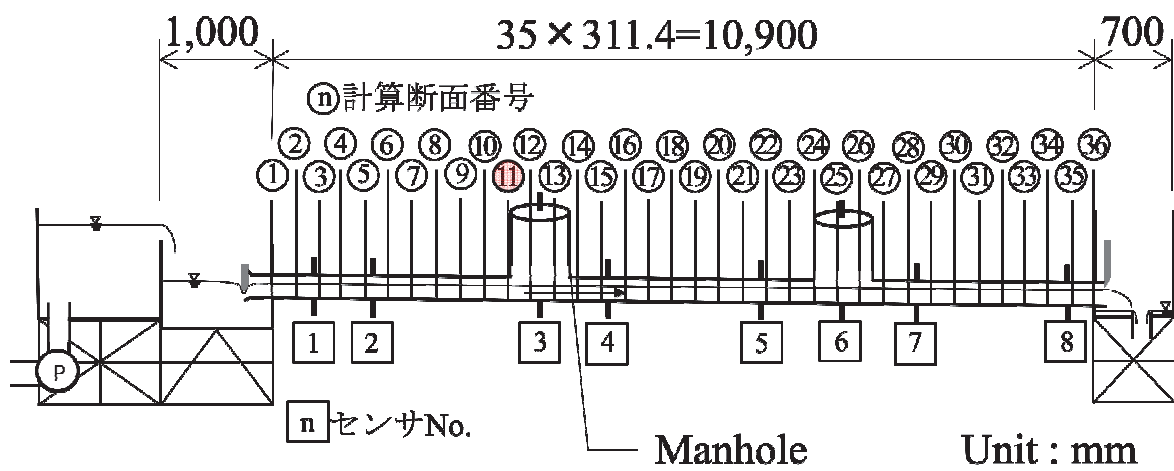


図 4-46 空気圧・気流速度ハイドログラフ：⑪断面

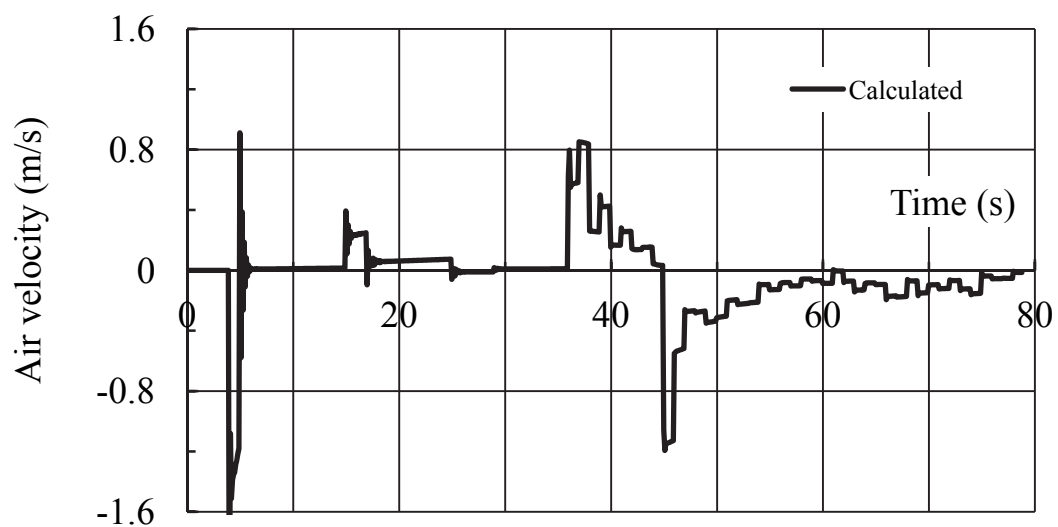
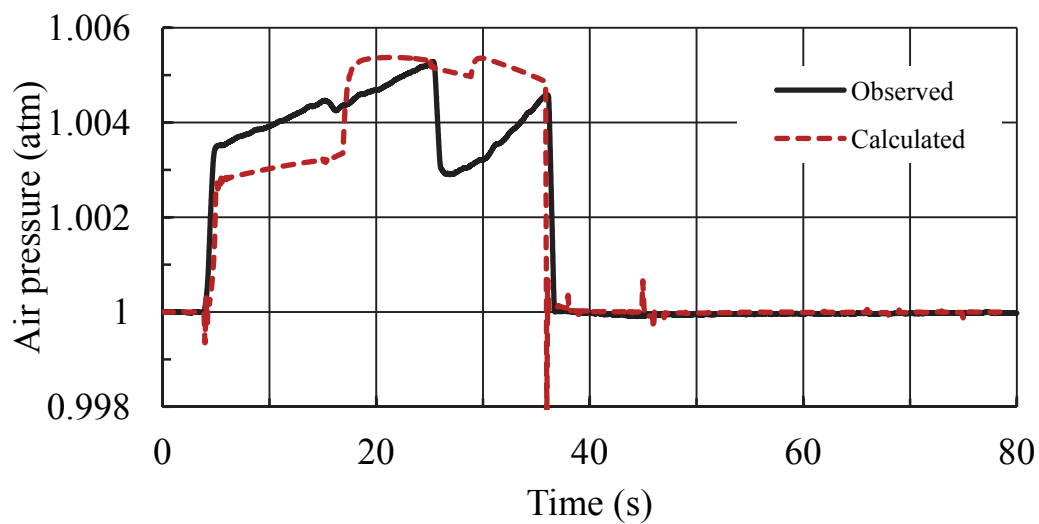
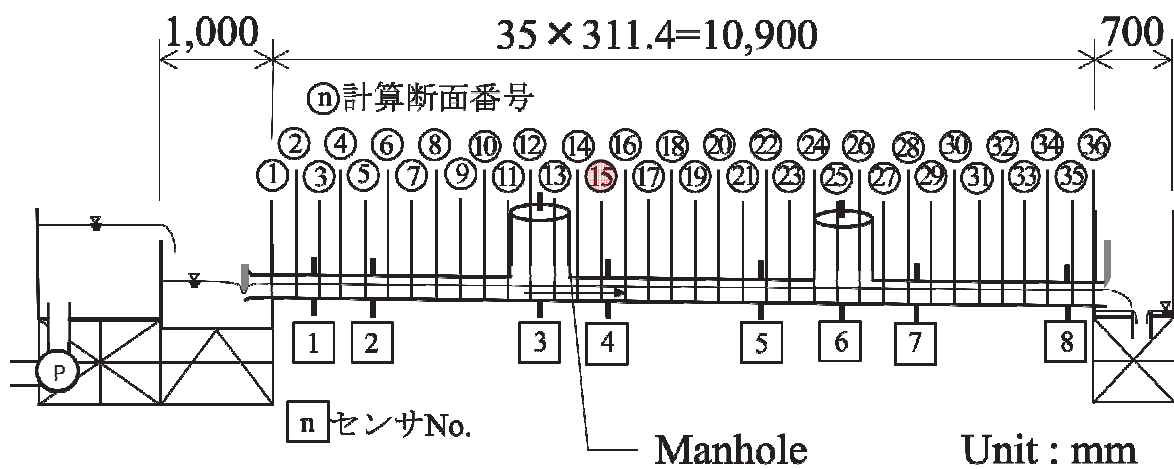


図 4-48 空気圧・気流速度ハイドログラフ：⑮断面

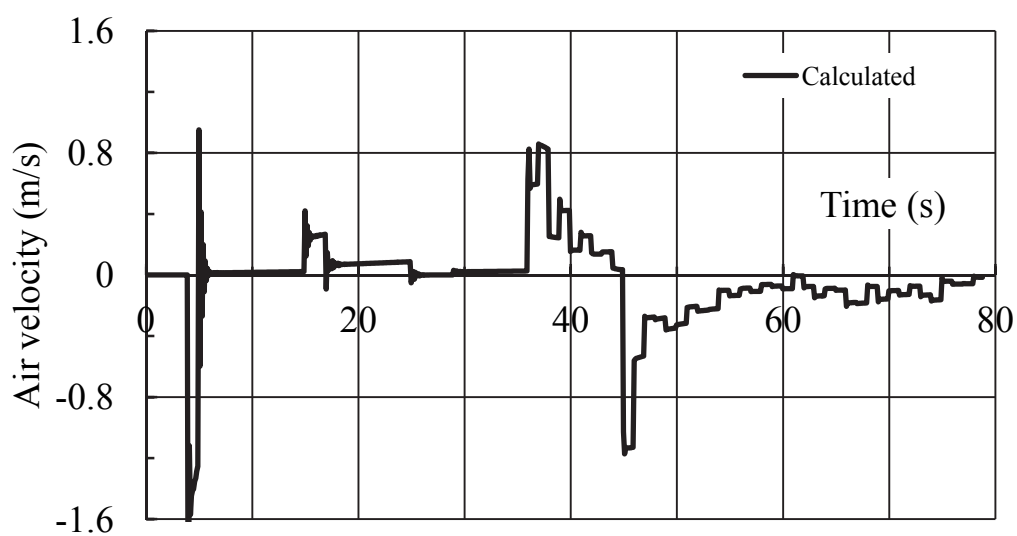
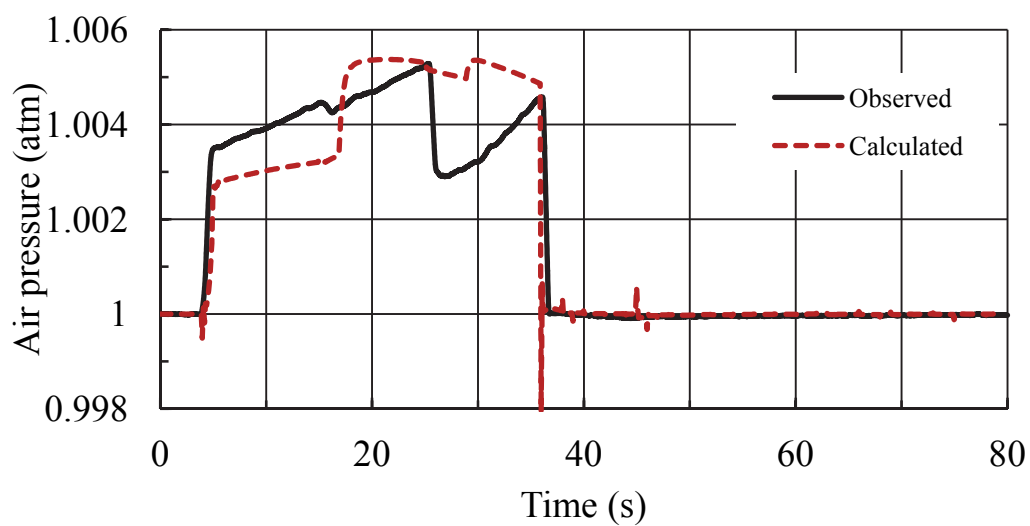
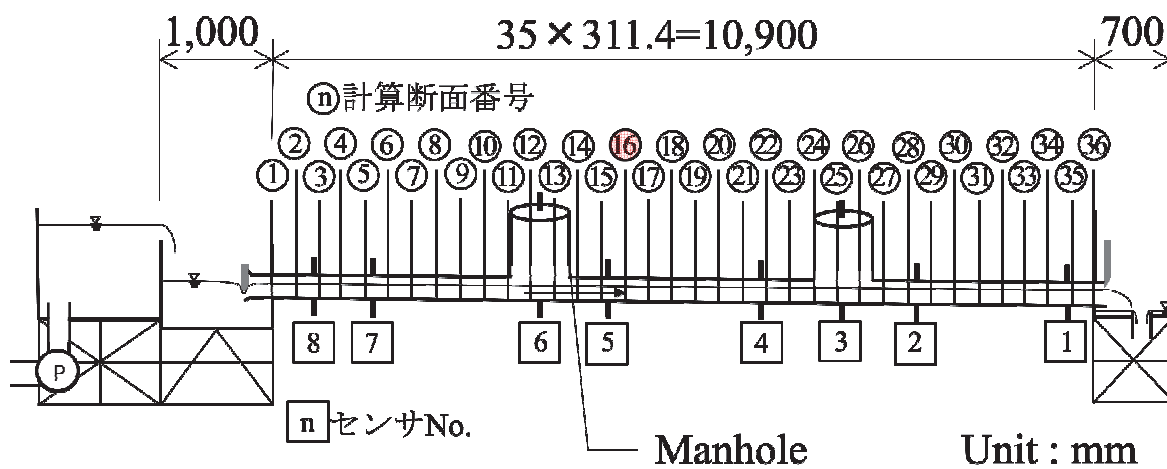


図 4-49 空気圧・気流速度ハイドログラフ：⑩断面

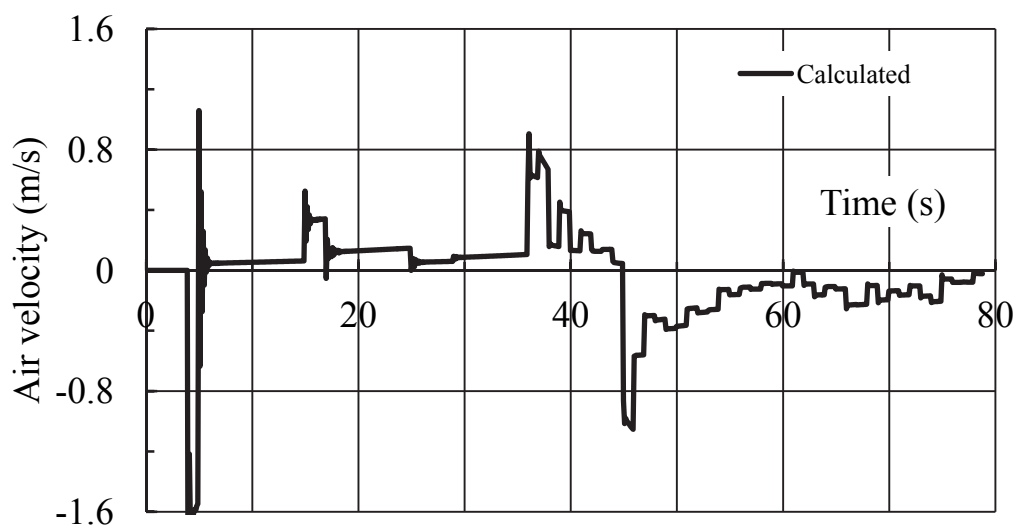
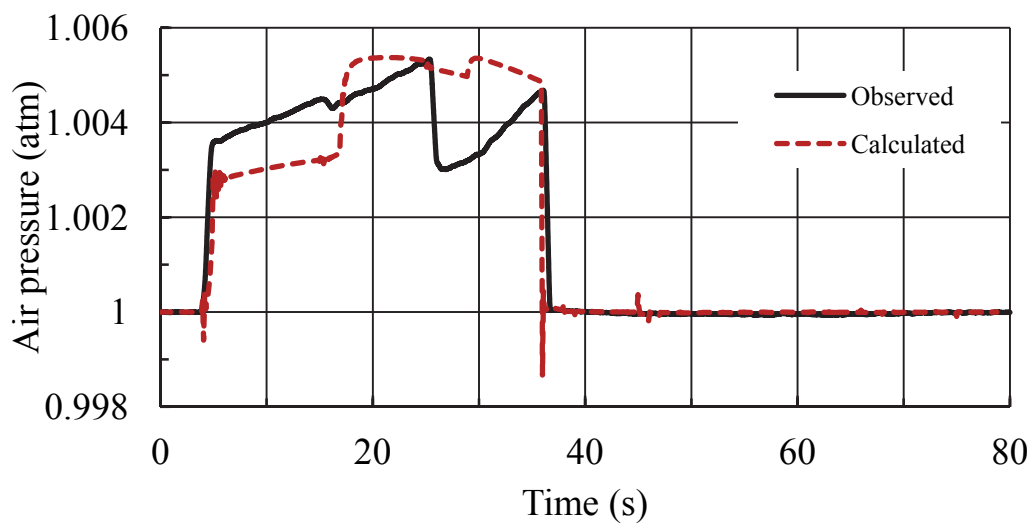
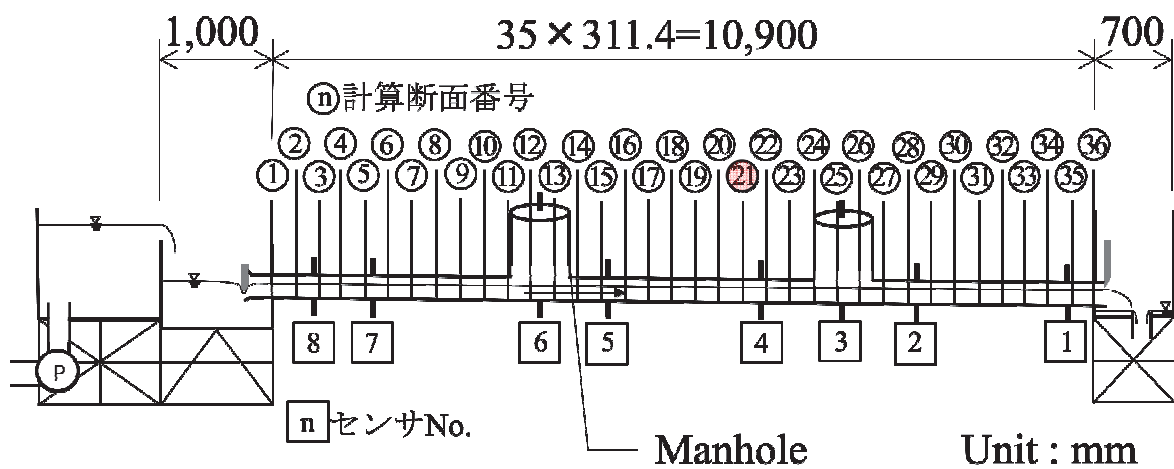


図 4-50 空気圧・気流速度ハイドログラフ：②①断面

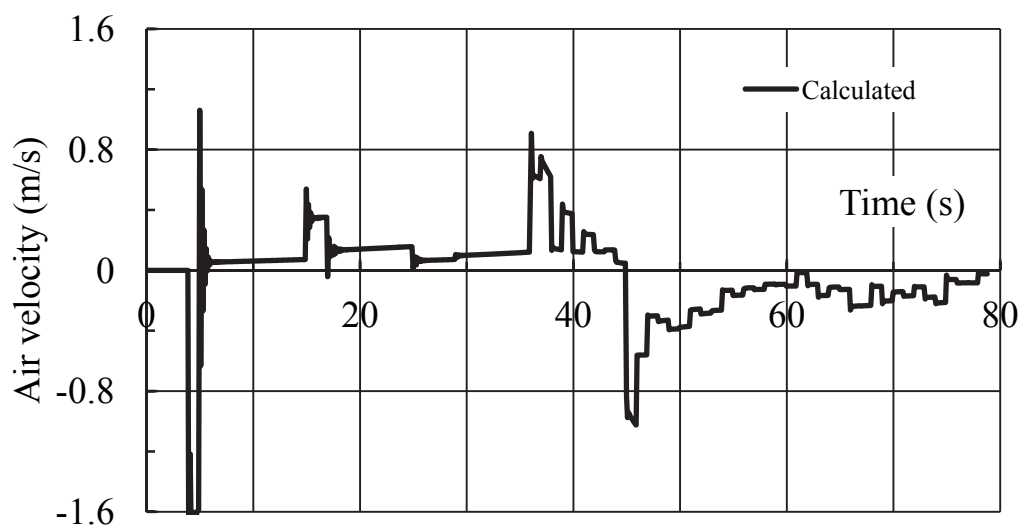
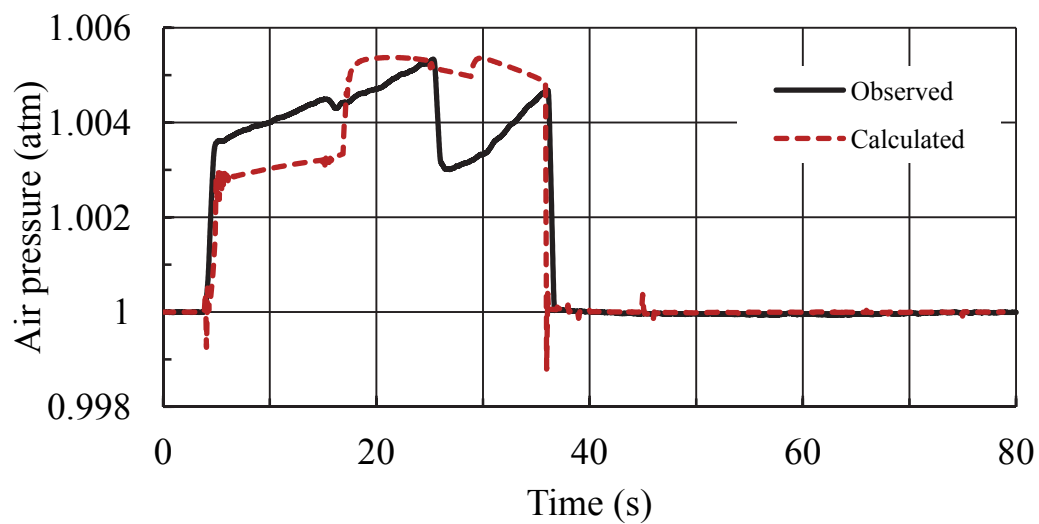
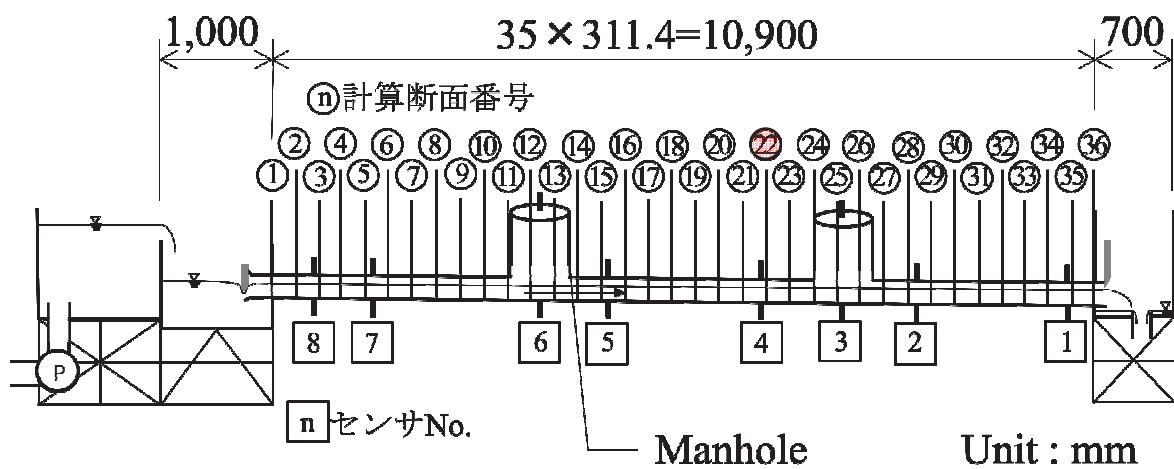


図 4-51 空気圧・気流速度ハイドログラフ：㉒断面

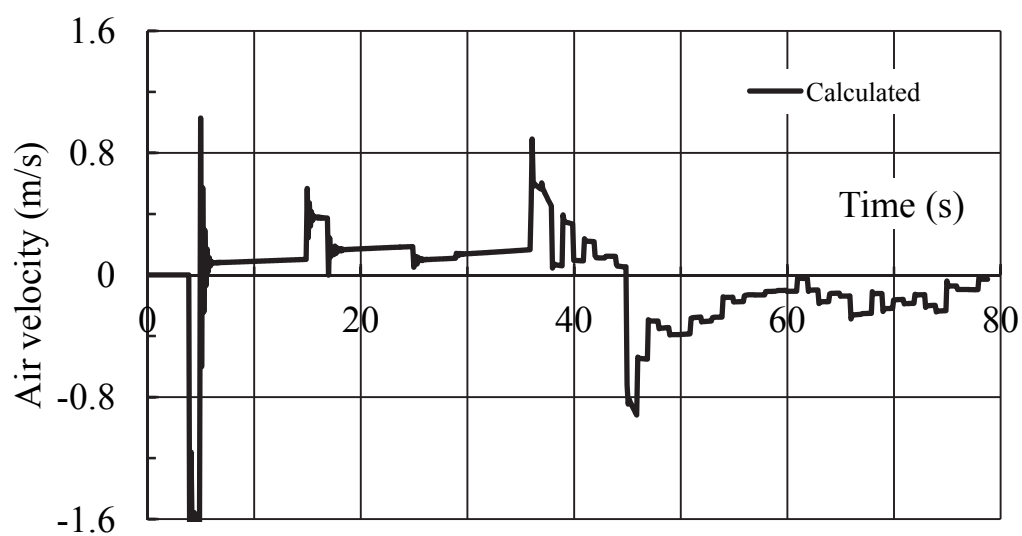
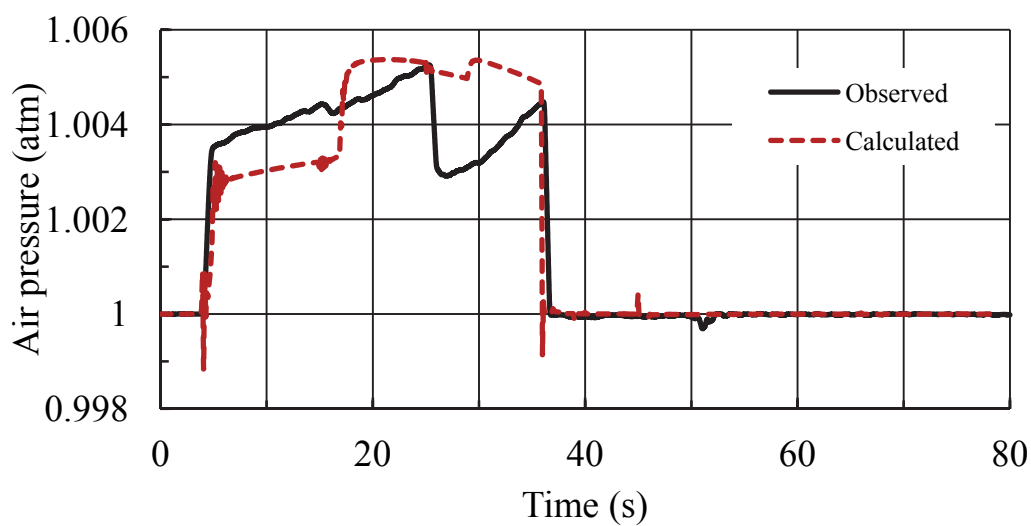
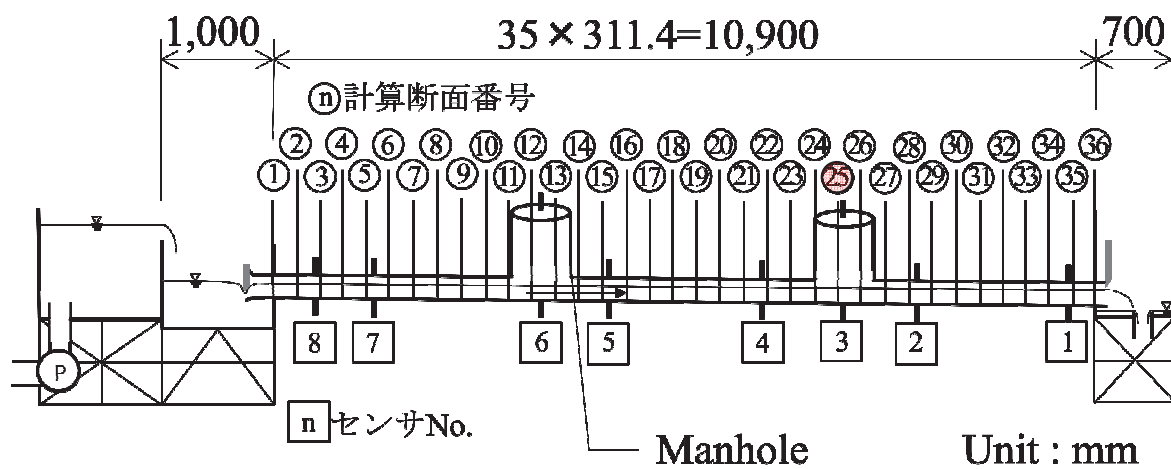


図 4-52 空気圧・気流速度ハイドログラフ：②断面

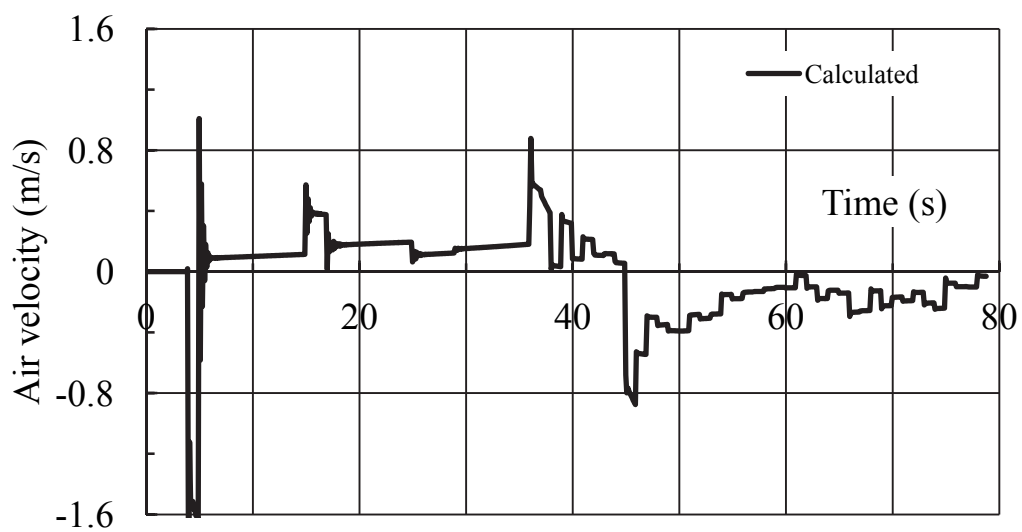
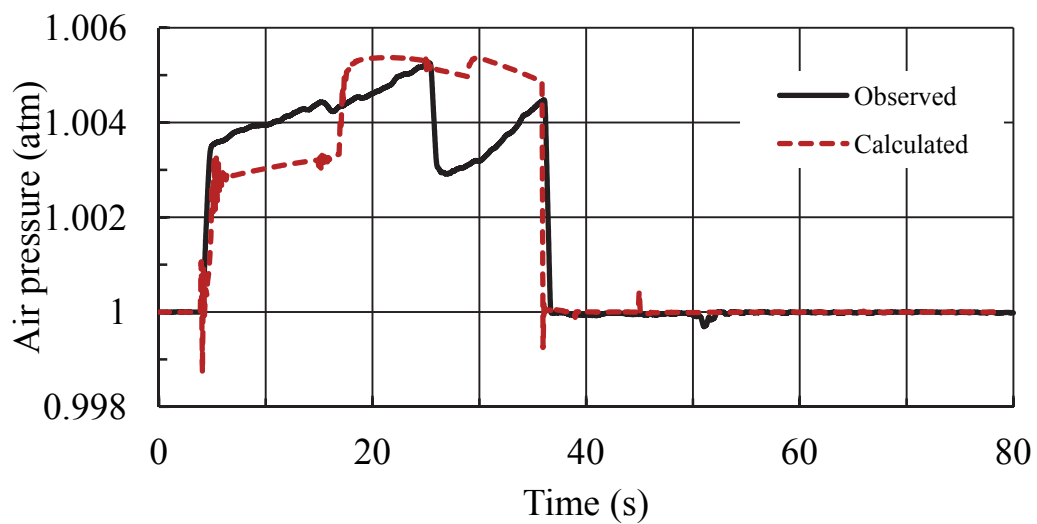
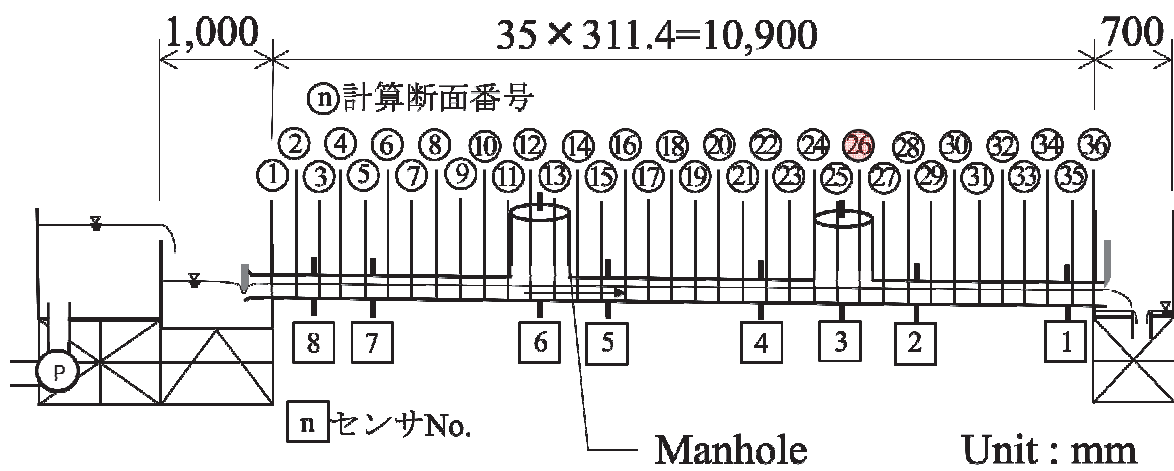


図 4-53 空気圧・気流速度ハイドログラフ：②⑥断面

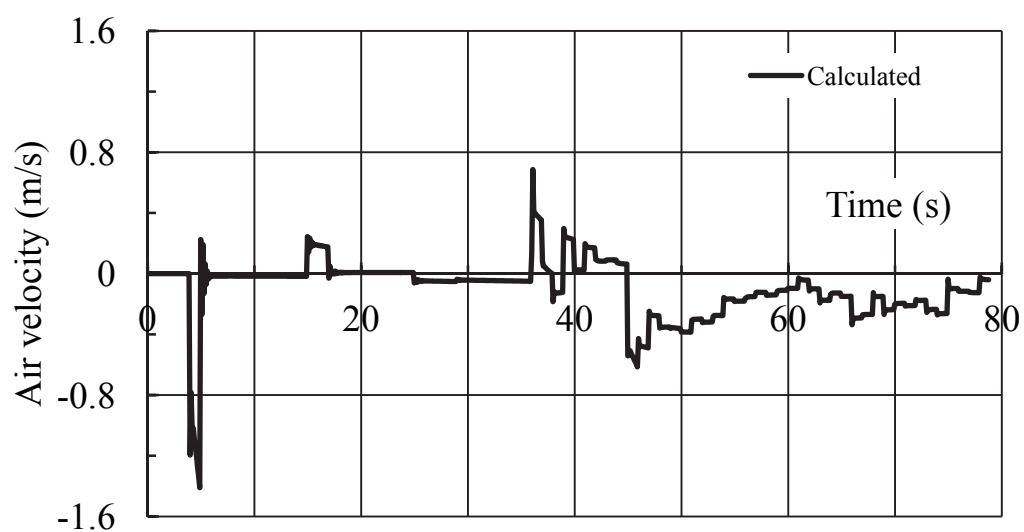
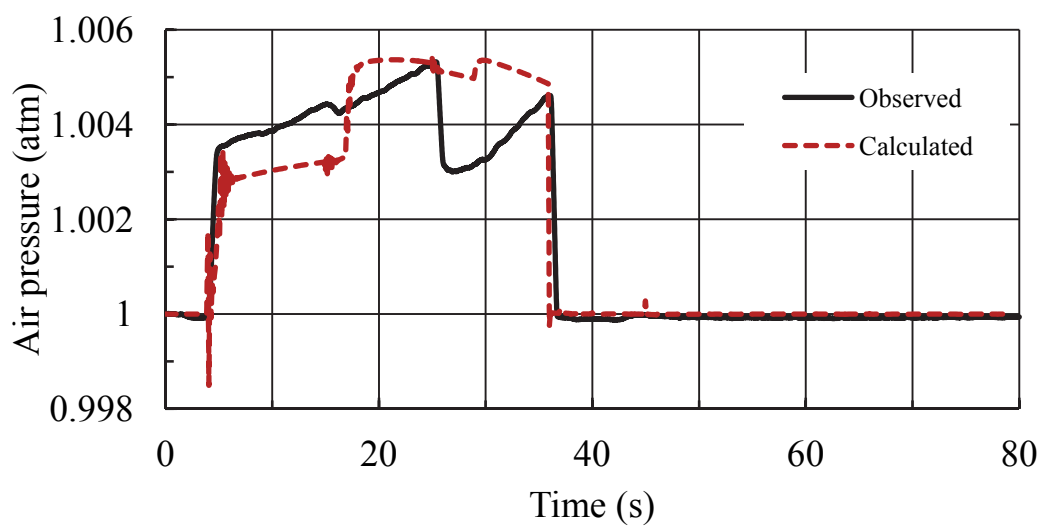
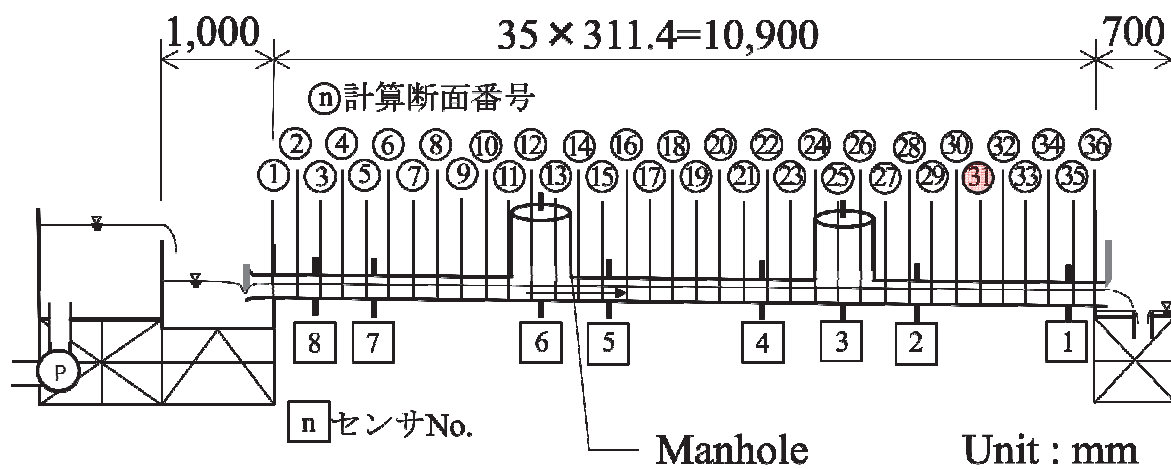


図 4-55 空気圧・気流速度ハイドログラフ：③①断面

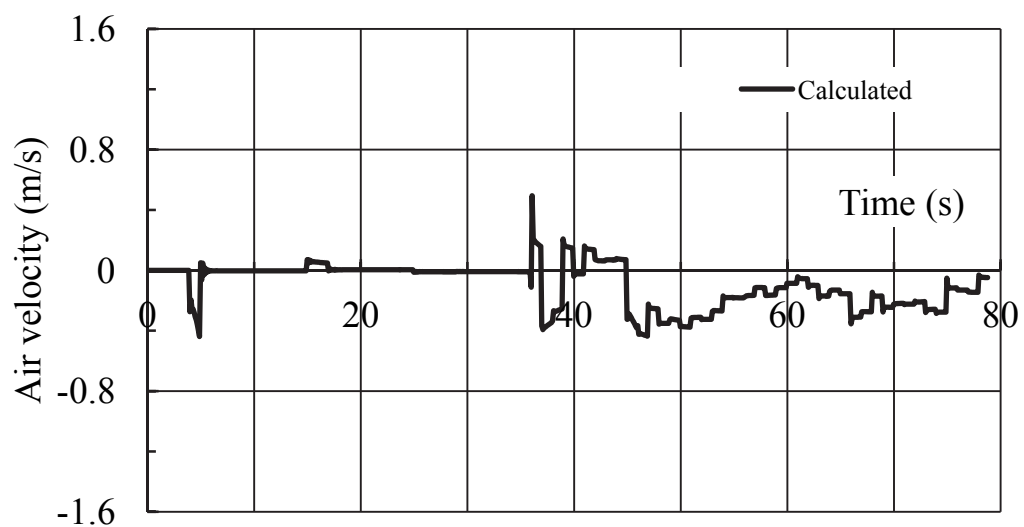
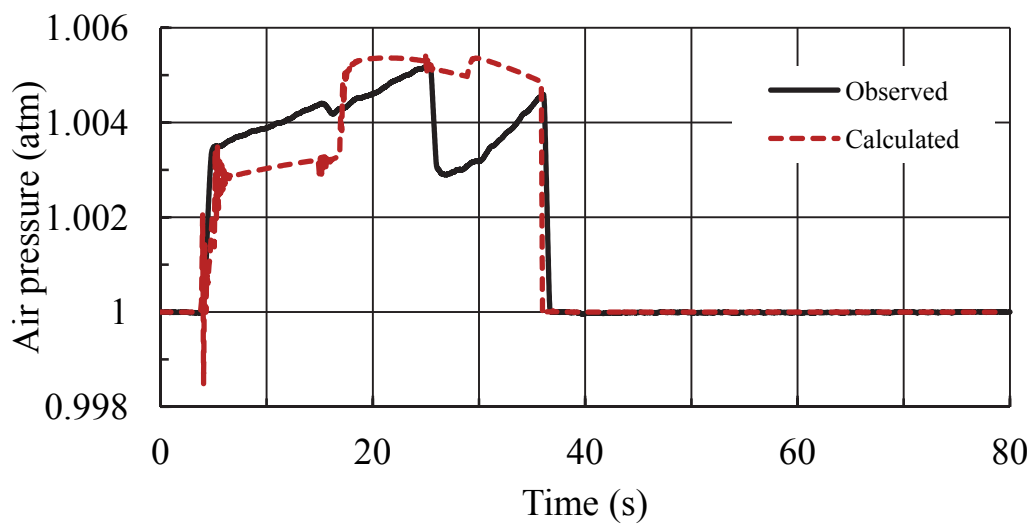
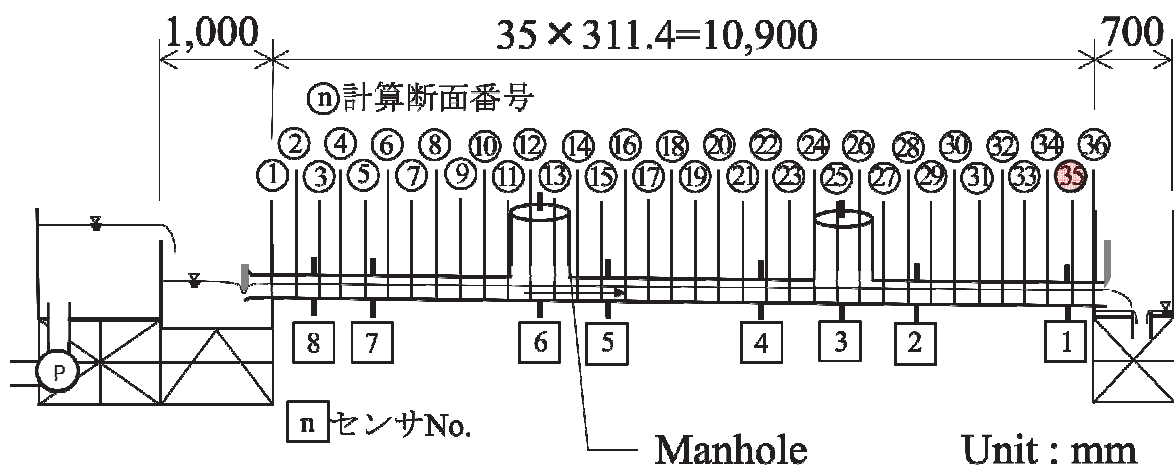


図 4-56 空気圧・気流速度ハイドログラフ：⑤断面

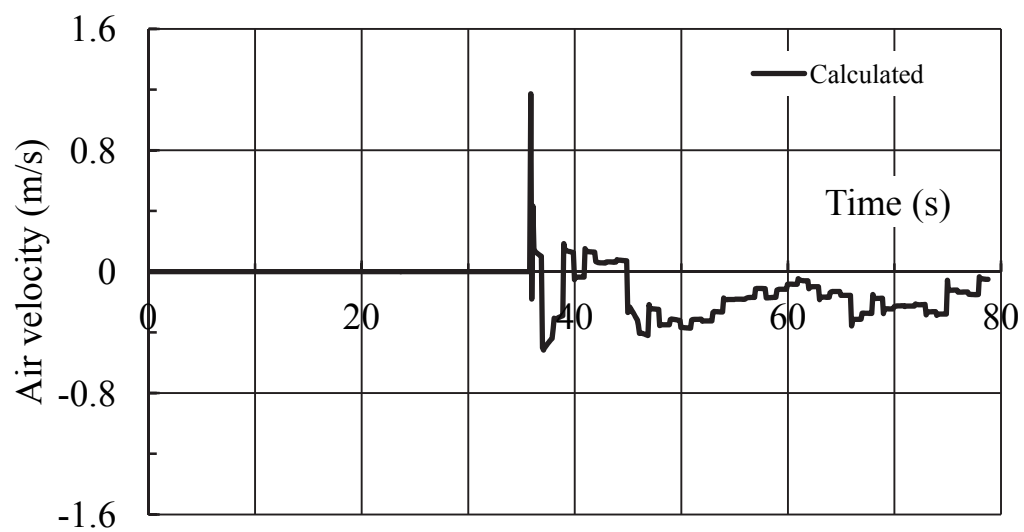
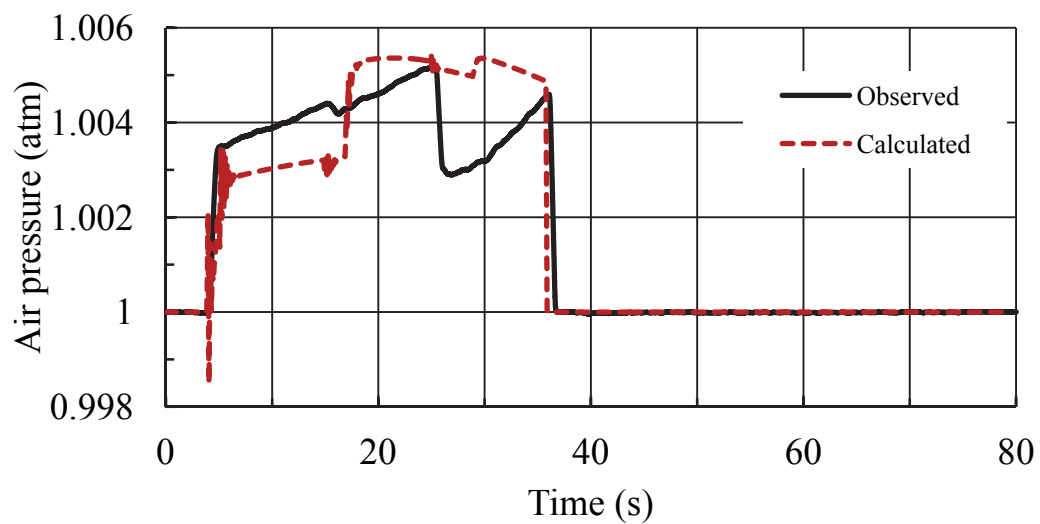
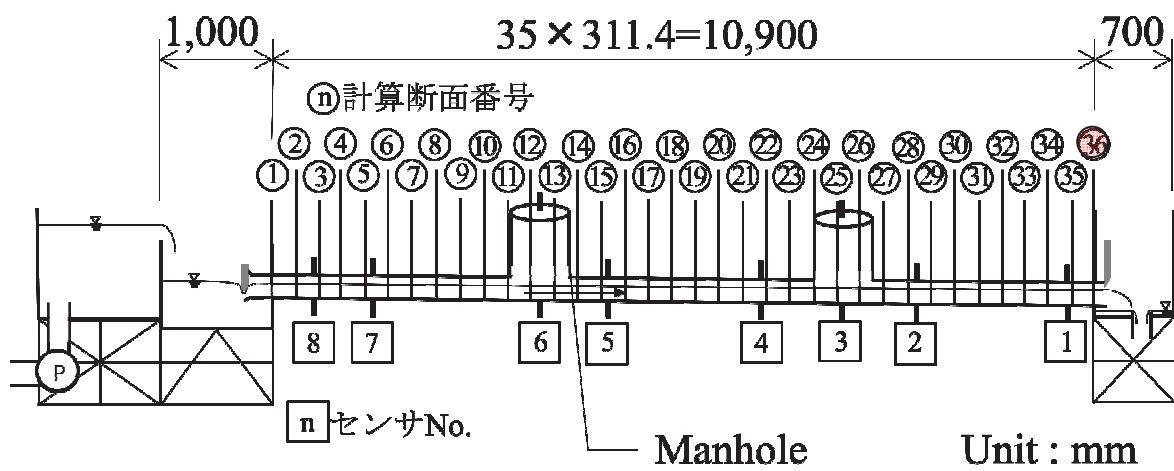


図 4-57 空気圧・気流速度ハイドログラフ：③⑥断面

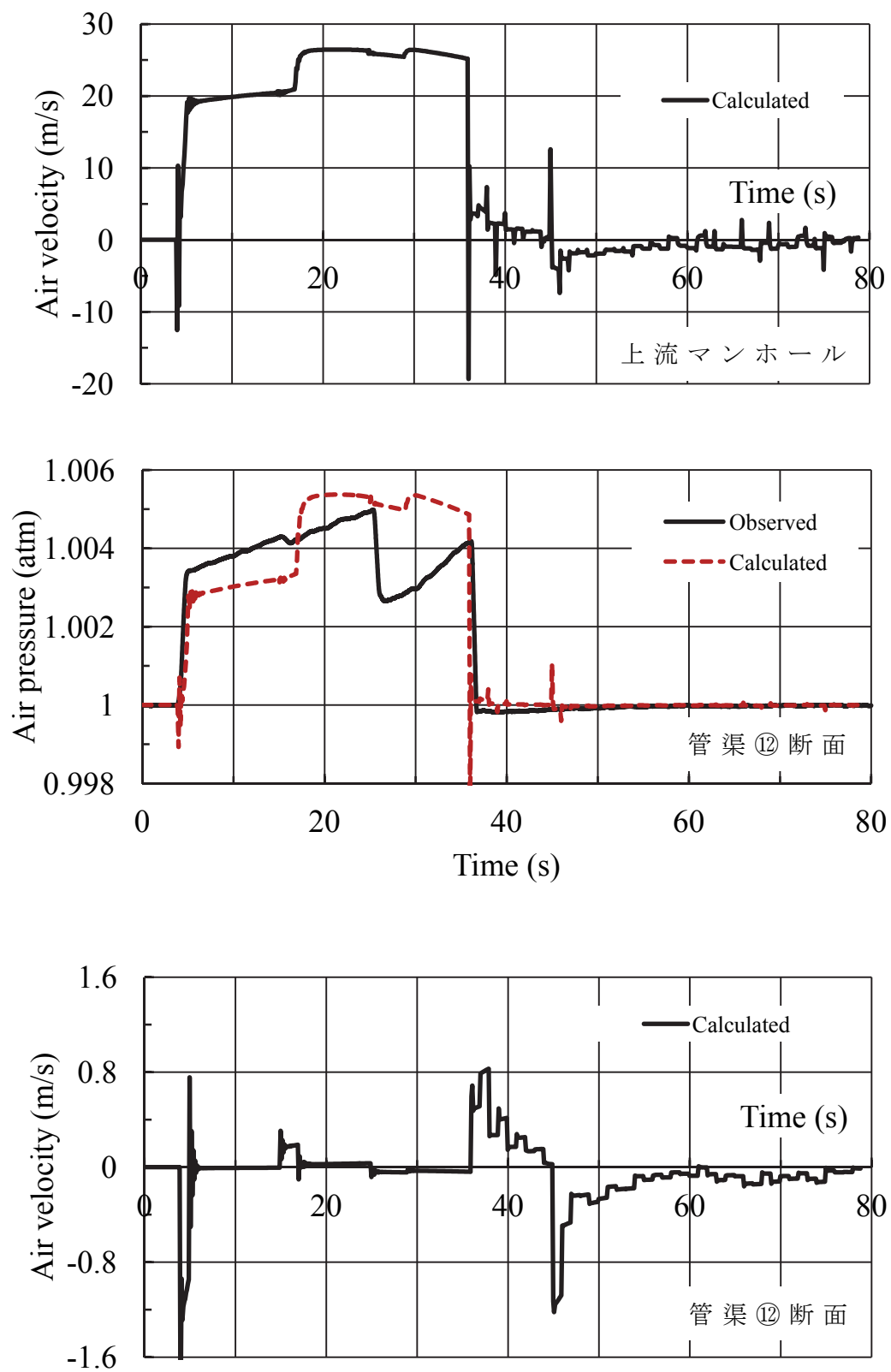


図 4-58 上流マンホールの気流速度および管渠の空気圧・気流速度

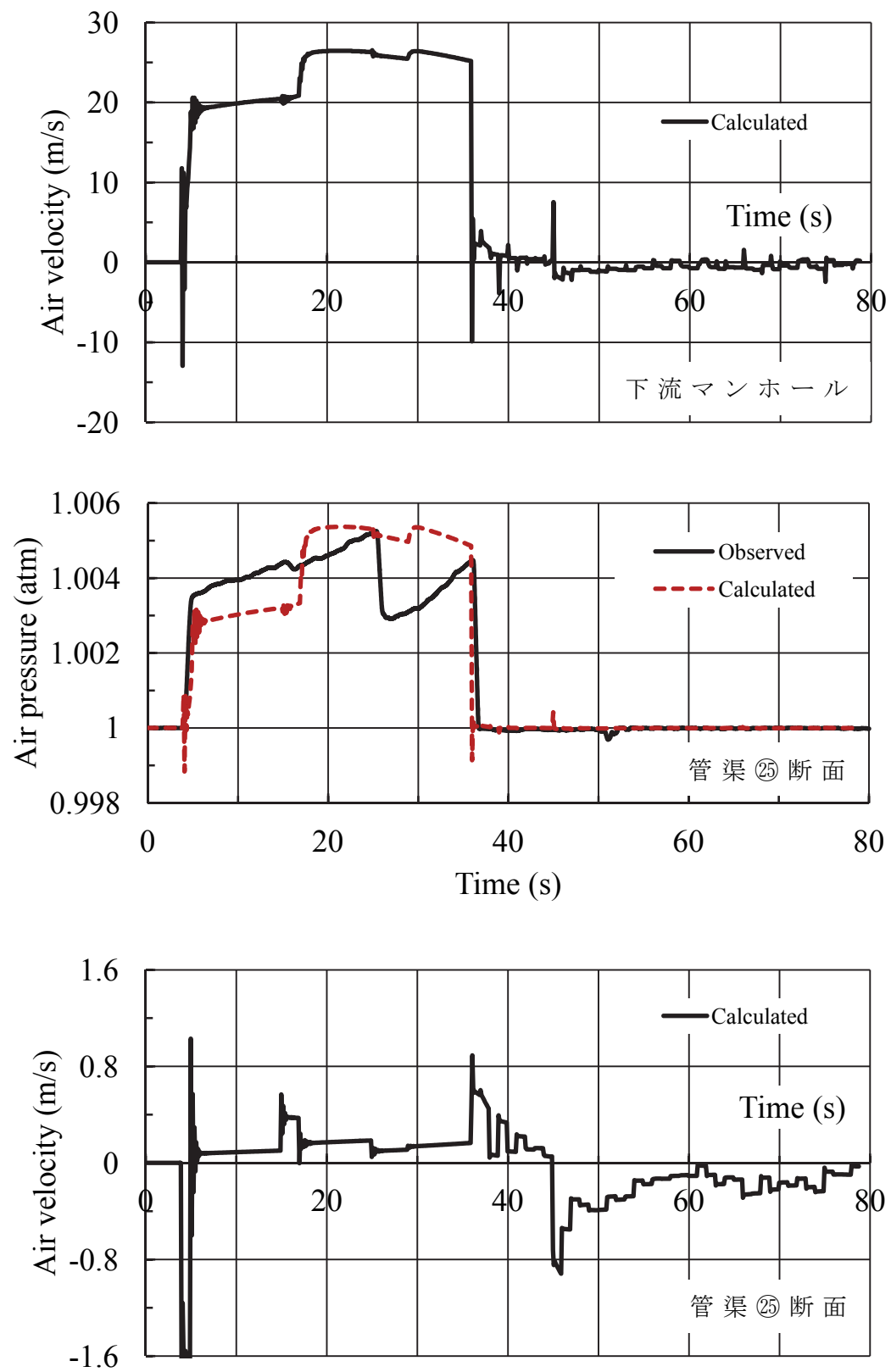


図 4-59 下流マンホールの気流速度および管渠の空気圧・気流速度

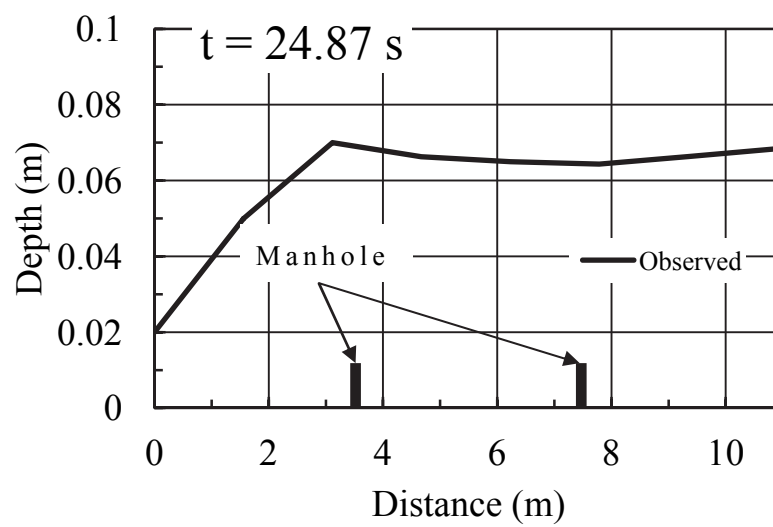
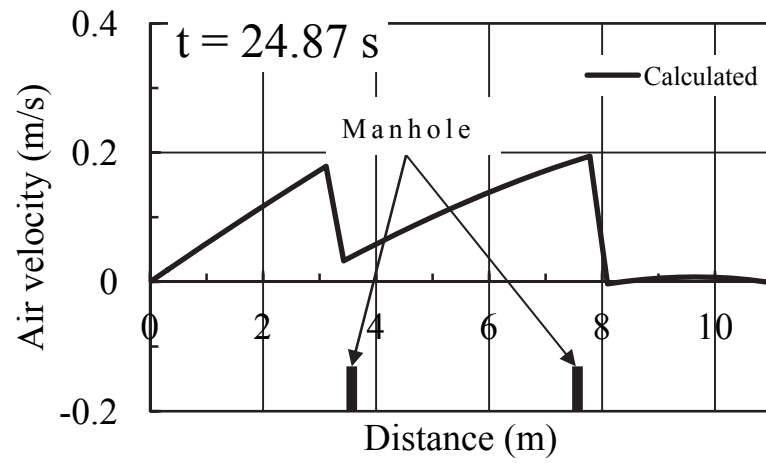
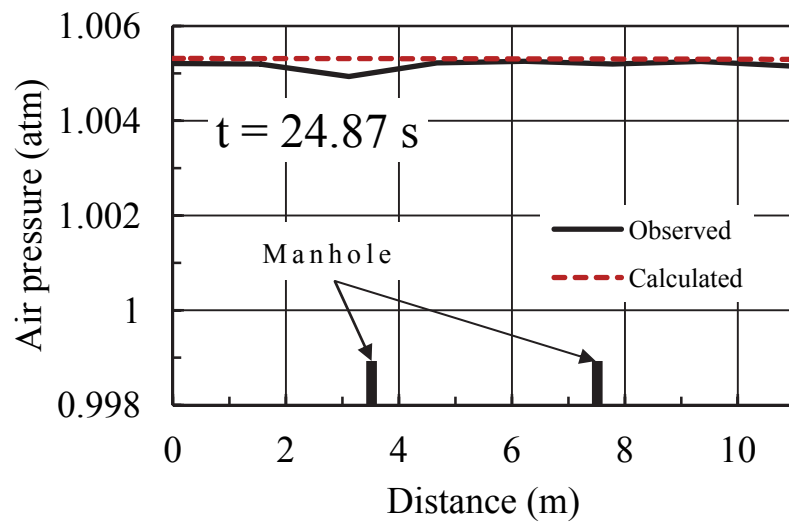


図 4-60 空気圧・気流速度・水深縦断面図： $t=24.87$ s

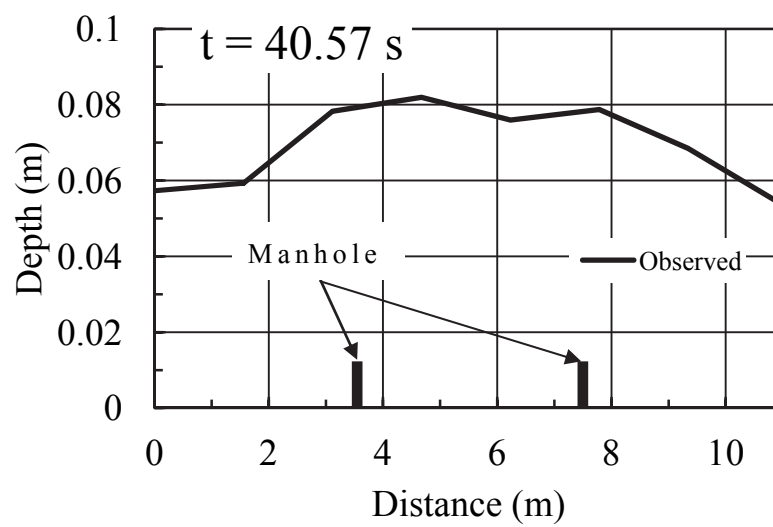
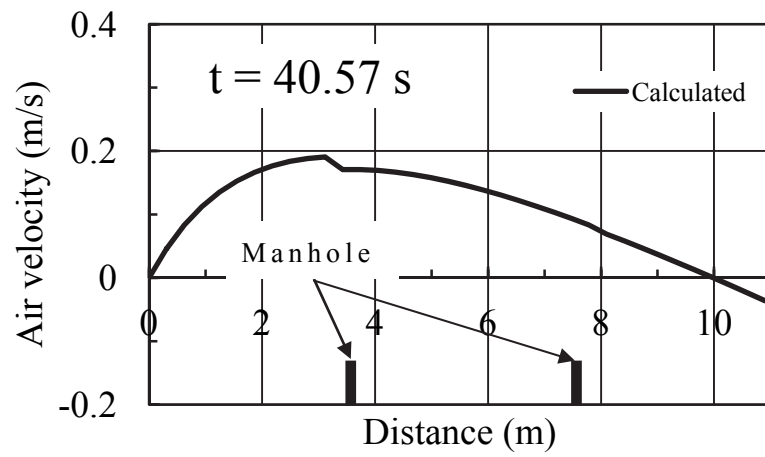
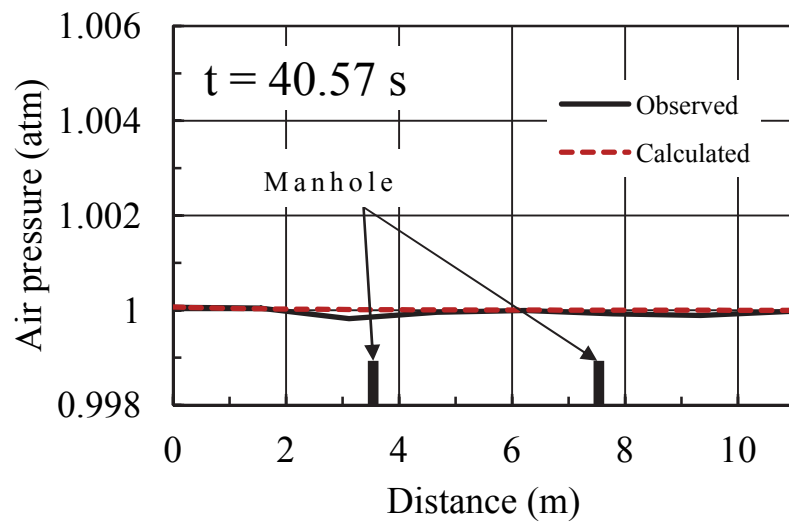


図 4-61 空気圧・気流速度・水深縦断面図： $t=40.57$ s

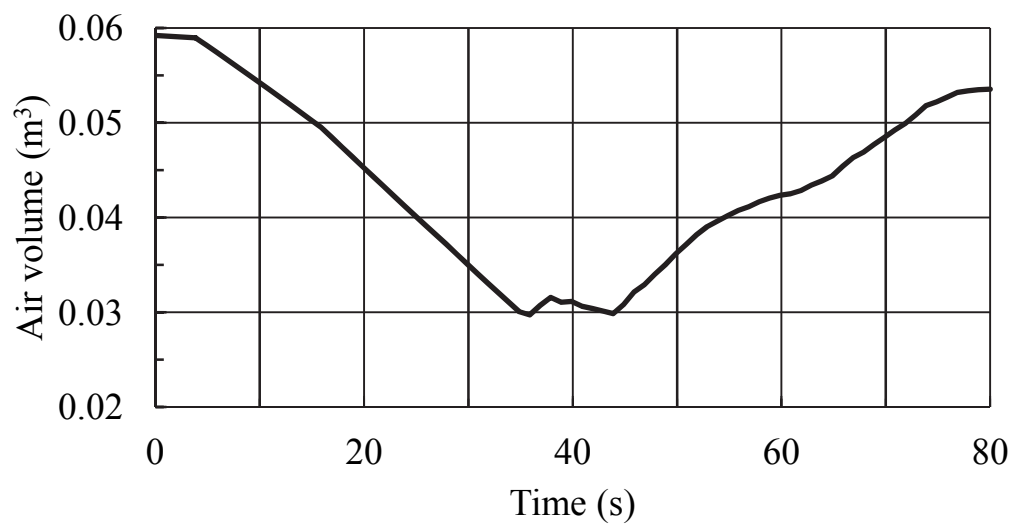


図 4-62 空気体積ハイドログラフ

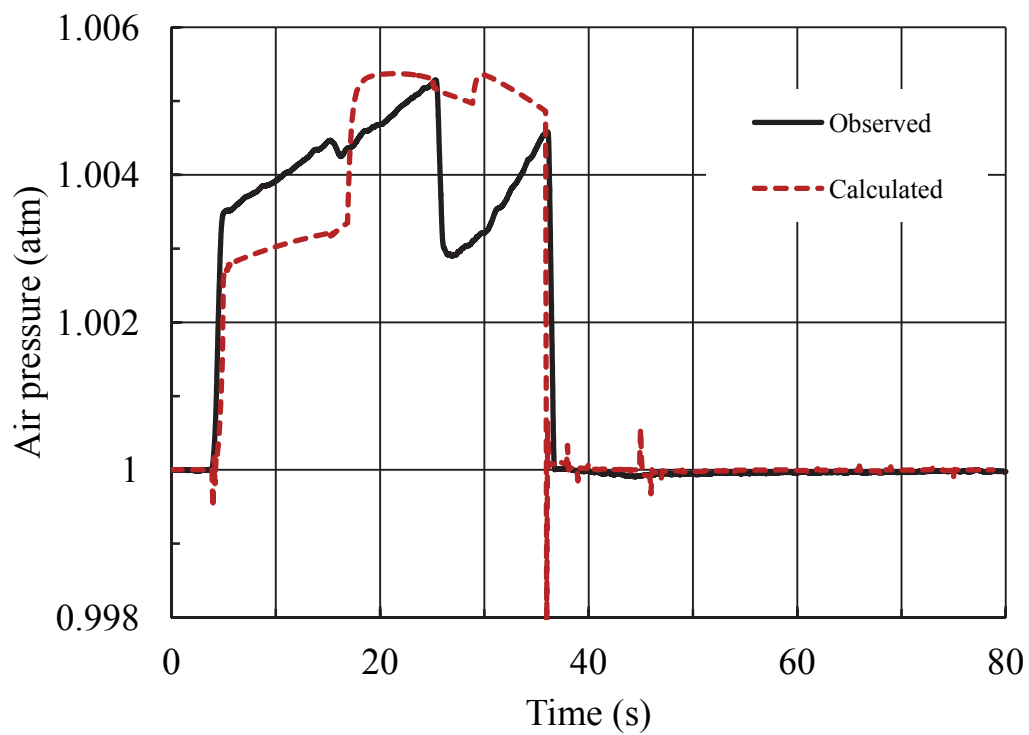


図 4-63 空気圧ハイドログラフ：⑩断面

参考文献

- 1) Wright S. J., Vasconcelos J. G., Creech C. T. and Lewis J. W. : Flow regime transition mechanisms in rapidly filling stormwater storage tunnels, Environmental Fluid Mechanics, 8, pp. 605-616, 2008.
- 2) Wright S. J., Lewis J. W. and Vasconcelos J. G. : Geysering in rapidly filling storm-water tunnels, J. Hydraulic Engineering, ASCE, 137(1), pp. 112-115, 2011.
- 3) Oosthuizen P. H. and Carscallen W. E. : Compressible fluid flow, McGraw-Hill, p. 230, 1997.
- 4) Chaudhry M. H. : Applied hydraulic transients, Van Nostrand Reinhold Company , pp. 389-394, 1979.

5 章 結 論

本論文は，これまで取付管やマンホールを含んだ都市雨水排水管路網においてまだ十分に解明されていない空気の移動と空気圧の時空間変化をシミュレートできる，空気・雨水流動の解析モデルの基礎式（連続の式と運動方程式）を新たに導出するとともに，それら基礎式をもとに，特性曲線法（矩形格子）を用いた数値解析法を提案するものであり，得られた主要な成果を以下に要約して述べる．

1 章では，はじめに，各地の都市下水道流域で，近年，ゲリラ豪雨と呼ばれる局地的集中豪雨や，台風上陸回数の増加による短期間で降水量が増加して計画を上回る雨水が都市雨水排水管路に流入し，マンホール蓋飛散や，それに伴う 2 次被害が多発してきている．これらの現象は雨水排水管路内の流体圧（空気圧および水圧）が増大することで発生しており，防止対策を立案するためにも，豪雨時の雨水排出管路内の空気・雨水流動の，より精度の高い解析（シミュレーションモデル）の重要性が益々大きくなってきていることを明らかにしている．次いで，豪雨時の雨水流出現象を精度高くシミュレートできるとして開発されてきた多くの，プライスマン・スロットの手法を応用した都市雨水流出解析モデル（XP-SWMM モデル，MOUSE モデル，InfoWorks モデルなど）においては，スロットの水面上の空気圧は大気圧としているため，管路内の空気圧が大気圧以上または負圧になることは考慮されておらず，管路部分の空気の挙動については，まだ十分に解明されていないという問題点を明らかにしている．

2 章では，はじめに，これまで，伏せ越し部等の特殊な管路でしか研究されていなかった空気・水の気液二層流について空気流動の基礎式を導出するにあたり，上述のどのような都市雨水流出解析モデルにおいても全く考慮されることのなかった取付管とマンホールを考慮した，新たな，都市雨水排水管路網における空気流動の連続の式と運動方程式を空気流れを等エントロピー流れと考えて導

出している．また，雨水流動の基礎式についても空気圧を考慮した運動方程式を導出している．

3 章では，はじめに，雨水排水管渠における空気流動の連続の式と運動方程式を，特性曲線法を用いて数値解析を行う数値計算手法を導出している．ここで，特性方程式には空気の色度と密度に関して空気流れ断面積の時空間変化の影響を意味する偏微分項が含まれており，これをセカンドオーダーの近似差分を使用し，矩形格子による反復法を用いることにより解析を可能としている．また，マンホール地点における空気流動および下水道管渠における雨水流動についても特性曲線法（矩形格子）による数値計算手法を導出している．

4 章では，本論文で新たに導出・提案された空気・雨水流動モデルの適合性（妥当性）について，排水管渠水理模型による流出実験を行って調べ，それら基礎式が高い適合性と妥当性をもつものであることを明らかにしている．また，空気流動を伴う雨水排水管渠の解析においては，都市雨水排水管渠網に接続している，取付管およびマンホールの考慮が不可欠であることを述べている．

以上，本研究で得られた主要な成果を要約して述べた．ここに得られた諸成果が，豪雨時に発生している都市雨水排水管渠網内の空気圧縮による被害や豪雨流出に伴う都市水害を解決する一助となれば幸いである．

謝 辞

本研究を進めるにあたり，終始多大なるご指導をいただいた愛媛大学大学院理工学研究科水環境工学研究室 渡邊政広 教授に謹んで感謝の意を表します．また，本研究に関して貴重なご意見およびご配慮をいただいた愛媛大学大学院理工学研究科 伊福 誠 教授，中村孝幸 教授に心から感謝の意を表します．また，様々なご助言をいただいた愛媛大学大学院理工学研究科 森脇 亮 准教授に心から感謝の意を表します．

本研究期間中，数値解析法の検討，資料の作成等で多大のご協力をいただいた株式会社荒谷建設コンサルタントの重田尚秀 氏に心から感謝の意を表します．さらに，本研究を進めるにあたって，何かとご協力をいただいた愛媛大学工学部環境建設工学科・水環境工学研究室内の福田貴志君，中野寛隆君，佐々木悠平君を始めとする学生諸氏には，ここに記して感謝の意を表します．

本研究期間中，支え続けてくれた家族に感謝の意を表します．

最後に，得られた諸成果が，都市下水道流域における豪雨流出に関するマンホール蓋飛散や内水氾濫等の諸問題を解決する一助となることを祈念いたします．

都市雨水排水管渠網の空気圧縮を考慮した 雨水流出解析モデルに関する研究

Storm water runoff simulation model with air compression
in urban drainage sewer pipe systems

EIJI TOMOCHIKA

2013