愛媛大学教育学部紀要　第56巻　171 ～ 176　2009

数学問題の協力的解決過程におけるプロトコル分析（Ⅱ）

（数学教育講座）　吉　村　直　道

A protocol analysis of students' interaction in a cooperative solution process of a mathematical problem（Ⅱ）

Naomichi YOSHIMURA

（平成21年6月5日受理）

1．はじめに ― 研究の背景と目的 ―

筆者は,「基本的に，コミュニケーションによって学習は展開される」と考えている。

しかし，単純にコミュニケーションが多いことが数学の理解や問題解決に貢献するのであろうか。

数学教育研究において，臨床的にデータを収集し研究する場合，談話分析による解釈的考察を展開することが多い。数学の問題解決や数学の概念の理解が，例えば多数決などによって決まるなどといった量的な判断によるものではないからであろうか。発生する考えの関連を質的に分析し考察していくことがしばしばである。

しかし，この捉えにくい数学の問題解決過程を積極的に量的に記述することによって，新たな学習者の認知的捉えを確認することができたり，これまでに確認されている認知的特徴をさらに明確に捉えることができる可能性があると考える。

そこで，本稿では，ある実際の問題解決過程の記述を量的分析と質的分析の両方で取組み, それらを総合して, コミュニケーションを通して問題解決する際の特徴を同定することを目標とする。問題解決におけるこうした特徴を数多く見つけ，整理・蓄積することは，学習者の認知過程や数学の学習過程を理解することに有意義であると考えている。

2．調査事例

実際に行った，ある数学的な課題に対して一つの考えにまとめあげていく一連の過程を見ていく。

活動事例：2008年１月22日　約37分
参 加 者：大学３年生K，C，T，４年生Ｉ
（計４名と調査者Ｒ）

数学的課題：【立方体の水中沈下】

１つの頂点にひもをつけてつり下げられている立方体がある。その立方体を水に沈めていき，その立方体がちょうど半分沈んだとき，その水面によって切り取られる立方体の切断面はどんな形か？

※注意：参加者のうち４年生のＩは，それまでにこの課題について考える機会があった学生であり，今回は他の３人の調整役を担っていた。

この活動事例をビデオで記録し，後日，３年生の３名の参加者にそのビデオを見せ，そのときどんなことを考えていたか述べてもらった。これが事後による自己解説調査である。

自己解説調査：2008年２月８日　約75分
参 加 者：大学３年生ｋ，ｃ，ｔ（計３名）
調査者ｒ
※参加者の対応するアルファベットは同一人物を表す。

そのときの活動の展開と自己解説における様子をプロトコルに直して整理したものが表１である。冗長な感はあるが，全体の流れが分かるよう，主要な部分をすべて掲載した。なお，通し番号はそのプロトコル発生の順序を示すものであり, 左列と右列で関連するものではない。また，紙面の都合上，いくつか省略し，内容を変えない程度に語尾の表現等を修正した。

表１：活動事例と自己解説のプロトコル資料

活動の展開	自己解説
R1：まず考えますか。黒板, ホワイトボード, 使ってもいいです。 T2：（図をかこうとする。） C3：（手や指で表現しようとする。消しゴムを動かして見る。） K4：（図をかこうとする。）	r1：図に表す程度を許した念頭操作で考えさそうとした。 r2：この時点では，答えとしてどんな場合, どんなものがあると思ってましたか。 k3：答えは考えてないよねぇ。 t4：展開図じゃないけど，形を考えよった。 k5：どうゆう風になるんかなぁって。図をかいてみようと思った。 t6：そうそう。図をかいてみようと思った。 r7：どんな形があり得ると思った？ t8：四以上。
	c9：三はあんまり… t10：六角形もあり得る。七はちょっと…。 r11：答えの形は四か五か六か，で七はない？ k12：はい，七はない。 t13：（うなずく） c14：この時点ではない。 r15：四角形と言っても，いろいろあるでしょう？長方形とか？ k16：自分は長方形はあると思ってました。 c17：（うなずく） r18：正方形は？ k19：正方形は…。いや多分いびつかなぁって思ってました。 c20：辺の長さはバラバラな形。 t21：あー，あー，それは思った。
K5：（立方体の形をしたハンコを持ち出す。） K6：最初，こうだと思ってたけど，こうだよね。（ハンコをノートで隠しながら，つるした状態の確認をする。） C7：中点，中点，中点，中点。	r22：これは？ k23：とにかく沈むイメージをしたくて。 r24：問題の状況，イメージを共通にしようとしてる？ k25：はい。 ct26：（同意の表情） r27：ここで，ほぼ答えが出てるよね。 c28：はい，はい，はい。
	r29：なぜこれが答えだと自信をもって言えなかったの？ c30：このときは自信があって，多分この後なんか違うわぁってことがあったんですよ。この時はできたって思ったんですけど。
KC8：（どの頂点が順に水中に沈むのかハンコを使って調べようとする。） K9：（水面と対角線との角度について計算しようとする。） C10：（対角線の長さを計算する。） T11：（展開図をかこうとする。）	r31：なんで中点，中点っていうのが見えた？ c32：ものさしとか当てて見てたら，中点を通るってのが見えたんですよ。 r33：各中点を通過するっていうのは見えたけど，まだ根拠はなかった？ c34：［考えが］ぐらぐらしよったときに中点じゃなくなった場面があって… c35：裏側。傾いて見えるからかなぁ。 c36：みんなが共感してなかったのもあるかも。 k37：まだ，イメージできてなかったんよね，うちらの中で。
	r38：tはcの考えはどう思ってた？ t39：そうやなぁと思いながら，でも私の中では…分からん，違うこと考えよった。 t40：図をかこうと頑張っとった。 c41:中点，中点って言ったとき，みんなどんな反応してたっけ？ k42：あー，なるほどーって思いよって，なぜか裏側を考え始めよった。 k43：逆側から見よるのと，表側から見よるので，うち，違うんよ。 c44：ここで迷った。 r45：この時点では，cさんは六角形って思ってるの？ c46：最初の頃は正六角形だったんだけど，だんだん濁ってきて，辺の長さが違う多角形になると思ってきてた。 t47:私はそのとき全く何角形とか考えてなく, 展開図に必死。
K12：半分沈むって？ C13：どこを半分？ K14：体積が半分のところ。 I15：一番下の頂点の次に，どの頂点が水に沈む？ K16：ここが早く沈む。 C17：見る角度によって… K18：いや，ほら。（ハンコの向きを反対にする。） C19：あー，そうだね。 K20：で次に，こっちの2つなんだって C21：そこは一緒にはならん？ K22：一緒にはならん。ちょっとずれとる。 C23：こっちの方が早い。 K24：（面を指さしながら）1，2，3，4の順で沈む。 T25：もう一回 K26：1，2，3，4の順で沈む。 T27：はぁあ。（すぐに下を向き，展開図で考えることに没頭する。）	r48：kは半分って言ってるけど，何が不安になったの？ k49：半分が分からなくなって，確認してます。 r50：kは，2番目に沈む頂点がこれって言ってたよね。それは何か根拠はあるの？ k51：見た目です。 r52：自分の持っている手の角度に依存してずれてくるって思わなかった？ k53：やっぱり，こっち，見た方を言ってしまった。 c54：私も今日まで同時につかるとは思わなかった。 r55：じゃあ，正六角形って答えたのに同時につかるとは思わなかったの？ c56:あっ, 最後は納得か。この時点では, どっちかが先に沈むと思ってた。 k57：二人（kとc）でずっとズレよるズレよるって言いよる。こっちから見ると同じなのにね。 r58:ここで注目したいのはtなんだけど, もう一回って聞き直した割に，その後そっけなかったよねぇ。 t59：納得したような，してないような。 r60：kの言ってることが分からなかったか, t61：か… r62：それとも自分の考えと関連が無いか生産的でなかった？ t63:そっ, それ。それかも知れない。えっ, どっちかなぁ… t64：自分は展開図をやってる。でも,

順序ってのはすごい気になってて，順序の話しよる感じがしたから，何してるのかなぁって，気になった。
c65：順番が違うってのは思わずに？
t66：分からん，何をかんがえとったかは，よう分からん。
r67：同時に沈むとか，ズレて沈むとかは考えなかった？
t68：んー，かも知れません。私，平面で考えていたから，立体の頭じゃなかったかも知れない。
k69：あー，なるほど。
c70：あー。

C28：（水面をかきこんだ展開図を完成させる。）

※（Kが身を乗り出して，Tの展開図を見る。そのため声が拾えていない箇所あり）

KCT29：（展開図や見取り図に，対応する面が分かるよう数字を記入する。）

k71：あー，これ見て，あーって思った。
c72：tは一人でこれずっとやってたんよね。
t73:うん。
r74:kとcは，これ見たときどう思った？
c75：中点だと思った。
k76：うん，うん。
c77：あっ，けど…
r78:六角形や正六角形のイメージはある？
k79：私はなかったです。
c80：私は…
k81：あっ，中点なんかって。
c82：最初，中点，中点，中点っていうイメージがあったんで，ここことはつながった。

t83：私はこのとき六角形は思ってたけど，まず体積の半分を考えてた。
r84：これで体積半分になるか分からんってこと？
t85：いや，これで体積半分になるなってこと。こう，こう，こうで３。（展開図の上側の３面と，下側の３面を指さしながら）
c86：うん，そうそう。数えよったよね。
t87：これで半分だから，あとは形を考えればって。
r88：この時まだ形は分かってなかった？
t89：いや，何となく六かなぁていうのは。
r90：六かなっていうのは思って，正六は思ってなかった？
t91：正六は思ってて，多分…。正六は思ってなかったかな。いや，思っとった。だって中点，中点，中点だから。
r92:じゃあ，ここで正六角形って言ってもいいんじゃない？
t93：でも，実際に実験しないと嫌だ。
r94：まだ，tから正六角形っていう言葉は出てないよね。
t95：出てない。

T30：正六角形，もう分からん。答えあるんですか？

c96：出たね。
t97：出たね。
r98：もう分からんって言うのは？

t99：ちょっと照れ隠しもあるけど…。
r100：私はもう考え尽くしたってこと？
c101：鉛筆置いたしね。
t102：そう，そう。他に答えがあるんだったら，もう私には分かりませんってこと，多分。で，本当になるんか調べたい欲求に変わっていった。
r103：このとき，kはどうだった？
k104：この図で，あー，なるかもーと思いつつ，まだ納得しきれてなかった。違うんかなーと。

r105：cは？この時点では？
c106：納得していたと思います。この展開図くらいから。

C31：４つはつかるはずよね，1, 2, …（数え始める）
C32：それぞれどこかは沈む。
C33：あり得るんじゃない。

r107：４つっというのは？
c108：一番下と，その上の３つの頂点。
r109：このそれぞれは，どこを指してるわけ？
c110：面です。どの面も沈む。どの面も全部沈むのはないし，沈まない面もない。
r111：ここで，tの考えはcから承認を得るわけよね？

c112：はい。
t113：あ，はい。です。
k114：私はどうしても確認したいんよねぇ，何か。半分じゃないって思っとったんかなぁ。まだ，上の頂点が沈むと思ってた。

T34：立方体，作ればいいじゃん。作っちゃえ。
I35：（発泡スチロールの小さなキューブを持ってくる。）
C36：（キューブの面に展開図の面の番号を記入）
C37：（キューブの辺に中点を記入し，切断線をかく。）
T38：（キューブをカッターナイフで切る。）
T39：わかりずら。
T40：正六角形です。

C41：切れたね。
K42：正かぁ？正じゃない。
C43：けど，中点，中点だから。
K44：あっ，そうか。中点，中点だから，見た目が違うだけで。
I45：つぶれたんかなぁ。もしくは，元々立方体ではなかったか。

C46：（辺の長さについて確認しながら）イエイ。
T47：イエイ。
I48：結論はどんな形ですか？
KCT49：（顔を上げ，笑顔で）正六角形。
T50答えは？
R51：どんな形ですか？
KCT52：正六角形です。
R53：本当ですか？
KCT54：正六角形です。

r115：切れたねって言ったのは？
c116：この線で切ったら平面にならんと思って，心配だったけど，切れたということ。けどがついてた。
r117：ところで，あの展開図のようになる根拠はあったの？　みんな確かめた？
k118:あー，あー（r117に同意する反応）
c119：体積が半分になるのは，ここがこう，ぽん，ぽんって。
r120：そんな議論あった？
c121：あったんですよ。
k122：ここ黒く塗ってね。
t123：ここが一緒やけん，一緒やねーって。
c124：うん，うん。
r125：kがここで，中点，中点だから(k43）って言うのは？
k126：これ自分に納得させよる。
r127：三つ目のイエイ，ないもんね。
k128：はい。
r129：最後，気になるのはkの納得度合いなんだけど，何か腑に落ちてないよねぇ？
k130：うん，えっ，…なんか確実っていうか，どっちかと言うと直観的な感覚で進んでるけど，それを覆すまでの考えはないし，でも完全な直観でもないし…
r131：体積半分は面積半分だしね。
k132：だから，展開図の意味は大きかっ

	た。あぁ，うんって思い始めた。 k133：実際に証明したら納得できたかも。

3．プロトコル分析―量的分析と質的分析―

（1）エントロピーによる解決過程の記述

この問題解決の過程を量的な指標で捉え量的変化として見ることはできないかと考え，情報理論のエントロピーという概念の援用を試みた［2.］。エントロピーとは，ある事象が起きた際，それがどれほど起こりにくいかを表す尺度である。事象Aが起こる確率をP（A）とするとき，事象AがおこったときのエントロピーⅠ(A)は，次のように定義できる［3.］。

$$I(A)=\log_2(1/P(A))=-\log_2 P(A)$$

そこで，ある数学的な議論（問い）における起こりうる反応事象（答え）の発生・出現の確率を考え，その反応の確実性（安定性）の度合いをエントロピーで表現する。問いに対する答えの事象をA，その時どきに考えられる全事象をUとしたとき，主体者が自分の考えとしてある答えを表明するのは，全事象Uのなかからその事象Aを選択している行為である。よって，事象Aの発生確率P（A）は，P（A）＝1／n（U）で表され，この発生確率において事象Aが表明されていることになる。

実際の時間経過とは異なるが，エントロピーの変化が明らかな時点で等間隔にグラフにしたものが図１である［2.］。横軸が時間経過であり，縦軸がエントロピーの値の大きさを表す。これによって，この過程における参加者の意思決定の推移が量的に捉えることができる。

参加者は，自己の認知活動または他者との相互作用によって，その都度その都度，答えに至りそうな考えを増やしたり減らしたりした。このグラフより，同一のコミュニケーション活動においても各個人の認知的な理解変容の過程は様々であると，改めて確認できる。そして，関数値の増減より，一時的にある考えに至ることがあっても安定的にその考えに落ち着くためには，何かしら更なる要因・根拠づけが必要であろうことが分かる。

図１：エントロピーの推移グラフ

この更なる根拠づけは，Cの場合，C31，C32，c110の行為であり，展開図において体積半分であれば水につかるところと水につからないところは同じ面積であり，どの面も全部沈むのはないし，沈まない面はないということに気づいたことである。Tの場合は，T34，T39，T40の行為であり，実際に切って確かめるという行為が，自分のなかで自信をもって表現できる根拠となったと考えられる。

さらに，Cの場合は一時，安定であろうある考えに至るものの再びエントロピーの値は増加していた。それはc44で確認できる。それは，その考えが見た目の状態に依存して得られたものであったことと，c36にあるように他の参加者にその考えが共感されていなかったことにある。他の参加者がその考えに共感しうるだけ十分に考察できていなかったことが，エントロピーが再び不安定さを示すよう変化しうる状態になった要因であろう。

つまり，集団においてある考えを共有する，まとめあげていく際には，その集団や他の学習者たちに，その考えが共感される必要がある。言い換えれば，その集団や他の学習者たちがその考えを十分に共感し得るだけ成熟していなければならない，と言える。

（2）言語コミュニケーションの割合

次に，言語コミュニケーションのみに注目し，その特徴を掴む。表１の活動の展開において発話行為のみを取り出して量的分析を行う。表１では，言語発話でないもの，つまり行為を表現しているものはすべて発話記号を囲み字にしている。それらを除いた発話の発生系列を左から順に表したものが，次である。

表２：活動事例における発話系列

R 間 K C 間 K C K I K C K C K C K C K T K T 間 T C C C T 間 T T C K C K I C T I（KCT）T R（KCT）R（KCT）

ただし，発話間に時間的に間があったり，ある行為に集中しており時間的に言語コミュニケーションが無い部分は「間」とした。(KCT) は同時に発話がなされたものであり，発話の回数は３と見なした。

表２より，主要な発話は全部で46確認され，そのうち，Kは14，Tは10，Cは15の発話機会がある。Kが30.4％，Tが21.7％，Cが32.6％の割合で，この事例においてコミュニケーションが展開されていたと分かる。

（３）コミュニケーション貢献度の変化

前節より，この過程においてはKとCが中心的にコミュニケーションしていることが分かる。しかし，コミュニケーションに実際に貢献している時間帯は主体者ごとに異なり，波がある。Cは全体を通してコミュニケーションに参加しているのに対し，Tは最初自分一人で考え，その考えを表明する段階でコミュニケーションが増えてきた。Kは，最初，司会者的立場でコミュニケーションの中心にいたが，途中その勢いはなくなり，他者の考えを理解しようとするコミュニケーションが多くなった。

こうした状況を捉えるためには，移動平均の考えを導入し，直近の15発話にしめる各人の発話の割合を算出し，経時的にコミュニケーションの貢献の様子をグラフにした（図２）。３人のコミュニケーションであるから，約0.3の値が平均であり，値0.3より下であればその近辺ではその主体者のコミュニケーション活動が少なく，値0.3より大きければその主体者のコミュニケーション活動は活発であるといえる。

図１と比較すると，Kについては，コミュニケーションが多いとき意思決定がなされていることが分かる。Cはコミュニケーションが安定的になされ変動しながらも漸次に意思決定をしている。Tは，コミュニケーションが活発であるのは途中と終わりであり，展開図によって正六角形に確信を持ちつつある時と最後正六角形を共有・確認する時である。

（４）連鎖解析

このコミュニケーション過程の特徴をさらに客観的に考察するため，表２の発生系列に対して連鎖解析を行った[5., pp.106-134]。これによって，主体者同士がどのような方向性をもって，どのくらいの割合（確率）で相互

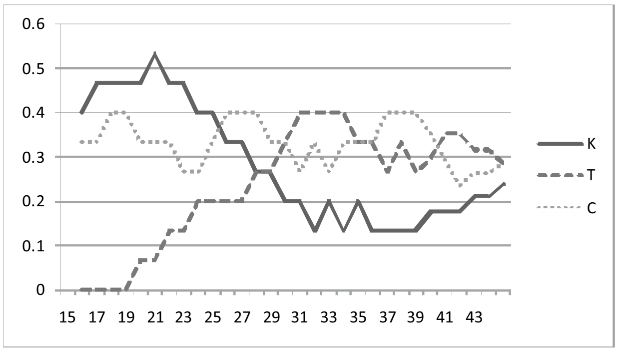


図２：コミュニケーションの貢献度の変化

作用しているかが特徴づけられる。

この課題の理解の面で問題となるのは，Kである。K自身は最後まで腑に落ちた理解に至っていない（k130, k133）。そうしたKの特徴として，K→Kのコミュニケーションが現象面としてないことが挙げられる。自問自答する活動が顕在的でない（図３）。

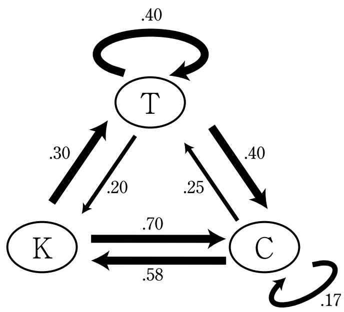


図３：発生系列の連鎖解析

それに対して，Cは自問自答の活動は少ないが，他者への働きかけや他者からの情報の享受は多い。また，Tは他者とのコミュニケーションの割合は少ないが，自問自答の活動が多いことが分かる。

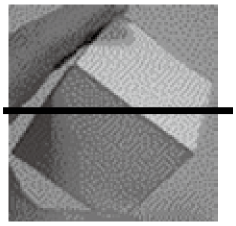
（５）質的記述分析 ― 談話分析 ―

量的な分析を通して，コミュニケーション過程の多くの特徴が分かる。しかし，それらがなぜそんな特徴を有するのかといった情報はそれらの分析だけでは読み取れない。

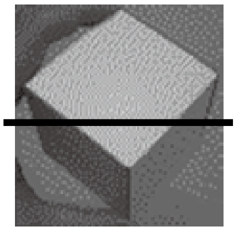
そこで，質的な分析である談話分析を試みることにより，相互作用の分析をはかりたい。図３でKに自問自答の行為が顕在的でないことが分かったが，その要因は何であろうか。Kと，C・Tの違いは何か。

Cは，C3・c32のように実際の事物の観察により考え

を進めていた（写真１，２）。

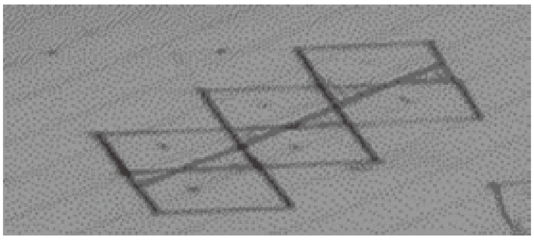


（写真１）



（写真２）

これは，中原氏の「数学教育における表現体系」［４.,pp.199-205］の分類で言う操作的表現を思考の手段・対象としていた。一方Tは，個人的に解決する中で展開図に表すことに成功していた（写真３）。これも中原氏の図的表現にあたるものである。



（写真３）

それに対して，Kは，Ｋ４，Ｋ９にあるように図による表現や計算による考察に失敗しており，考えを展開するより処がない状態であった。二人の表現を受容しているようではあるが，k114，k130を見ると真の意味でそれらを自分のものとして内的に占有していない。Kは自分自身が内的に相互作用する対象がなかったために，自問自答の活動が顕在的ではなかったと考えられる（図４）。

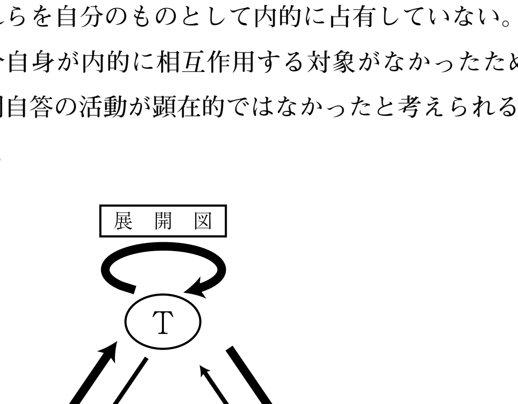


図４：相互作用の対象

４．おわりに ― まとめと課題 ―

これまでの考察から, Kの事例を見れば, コミュニケーションが多いことが必ずしも自己の数学的意思決定にはつながらないと言える。コミュニケーションによって人と整合的な意思決定をすることができ同様の理解がなされたように見えても，実際には腑に落ちた理解には至っていないことがある。真に納得した理解に至るには，自己の思考過程において，数学的表象との相互作用に裏付けられる自己内での数学的な議論があってこそである。つまり，自問自答する過程の存在が重要であり，それを機能させるためにも共同の過程には，個別にある源概念を構成しておくことが必要である。個人内相互作用を顕在化させるには個人的に成功的な表象の存在が重要である。よって，数学の学習指導では練りあげ場面の前に自力解決の場面の保障が強調される。子どもが自分の考えを上手く構成できない場合，教師は他の子どもたちの成功的表象を取り上げそれを共有させるのは，そのためであろう。そして，発問によって自問自答の視点を学習者にもたせなければT,Cのような納得した理解には至らないと考えられる。

最後に，これらの結論は一つの活動事例から導いたものであり，この結論に一般性をもたせるには不十分である。プロトコル分析の欠点である。これはむしろ, 今後, 研究していく上での検証仮説の導出であり，今後さらに記述事例を増やし，更なる確証を付与してその価値を高めていかねばならない。今後の課題である。

引用・参考文献

1. 吉村直道,『数学の授業におけるコミュニケーションに関する研究』，広島大学大学院教育学研究科修士論文，1994。
2. 吉村直道,「数学問題の協力的解決過程におけるプロトコル分析（Ⅰ）」，愛媛大学教育実践総合センター紀要，第27号，2009。
3. 村田昇著,『情報理論の基礎　情報と学習の直観的理解のために』，サイエンス社，2005。
4. 中原忠男,『算数･数学教育における構成的アプローチの研究』，聖文社，1995。
5. 海保博之・原田悦子編,『プロトコル分析入門』，新曜社，1993。