愛媛大学教育学部紀要　第58巻　81～86　2011

# 算数・数学教育における読解力の育成（２）
## － 論理的思考に基づいて －

（数学教育研究室）　藤　本　義　明

# The Formation of Reading Literacy in Mathematics Education (2)
## － By Baseing to Logical Thinking －

Yoshiaki FUJIMOTO

（平成23年６月10日受理）

## Ⅰ　はじめに

教科教育での読解力の育成については，真っ先に，国語教育での読解力の育成が揚げられる。国語教育では，文学作品を読解する力が長年標榜されて来たようであるが，数学教育における読解力としては，文学作品の読解とは異なる読解力が標榜されるだろう。数学の本質は論理であるので，読解力についても，論理と関連することが考えられる。本稿では，論理的思考に基づいた読解力の意義やあり方を探って行きたい。

## Ⅱ　読解力と論理的思考の関係

### １．読解力

文科省が求めている読解力については，前稿で明らかにした。それは以下のようであった。

『「3.各学校で求められる改善の具体的な方向

【目標①】テキストを理解・評価しながら読む力を高める取組の充実

【目標②】テキストに基づいて自分の考えを書く力を高める取組の充実

【目標③】様々な文章や資料を読む機会や，自分の意見を述べたり書いたりする機会の充実」これらの目標①～③を「３つの重点目標」と呼ぶことにする。

②読解力向上に関する指導資料　―PISA調査（読解力）の結果分析と改善の方向―

「読解力向上プログラム」に付随した「読解力向上に関する指導資料」においては，PISA調査の結果の分析をふまえて，３つの重点目標の下にア（ア）～ウ（イ）まで以下の７つの下位目標を設定している。つまり

「ア　テキストを理解・評価しながら読む力を高めること

（ア）目的に応じて理解し，解釈する能力の育成

（イ）評価しながら読む能力の育成

（ウ）課題に即応した読む能力の育成

イ　テキストに基づいて自分の考えを書く力を高めること

（ア）テキストを利用して自分の考えを表現する能力の育成

（イ）日常的・実用的な言語活動に生かす能力の育成

ウ　様々な文章や資料を読む機会や，自分の意見を述べたり書いたりする機会を充実すること

（ア）多様なテキストに対応した読む能力の育成

（イ）自分の感じたことや考えたことを簡潔に表現する能力の育成」である。これらは３つ重点目標に対する下位の目標にあたるので，これらを「７つの下位目標」と呼ぶことにする。』（④）

これは，数学教育だけでなく，全教科，学校教育全体を踏まえた読解力である。しかしながら，数学教育について言えば，数学の特性を生かした読解力の育成を考えるのが妥当であろう。読解力と深く結びついてい数学の特性としては，論理が第一に考えられる。本稿では，論理的思考に基づいた読解力の育成について考察するつもりである。そのために，まず，論理学と読解力の関係を見てみる。

２．論理学

論理学は数学の基礎ともいえる。その場合の論理学は，「古典論理」や「記号論理」である。これらは，様々な妥当な推論を分析するもので，これらの論理学を学べば妥当な推論をする力が着くことが期待され，学ばれて来た。確かに，これらの論理学の基礎的部分は，妥当な推論を遂行する上で有用であるが，単なるテクニックでしかないものも多い。本稿では，これらの論理学の基礎的部分のみを援用する。

３．批判的思考力

OECDの教育研究開発センターによると，中世の大学カリキュラムでは，論理学の学習が合理的思考の訓練と見なされていたが，そこで教えられた形式論理は，日常の思考においてあまり役に立つものではなかった。20世紀に，教育哲学の分野で，Deweyの書物『How We Think』が，思考の分析やその教育への含意への初めての意義深い貢献であり，Deweyの反省的思考の分析は，推論過程を一連の段階で分析する多くの試みの最初のものであったという。(⑤)

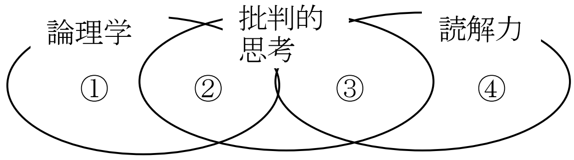
現代の欧米の大学では，形式論理とは一線を画した「批判的思考（Critical Thinking)」が教養として教えられている。この批判的思考も妥当な推論を遂行するための重要な要素のいくつかを示唆してくれる。批判的思考は論理学と読解力の中間に位置する思考と考えられる。

なお，論理学と読解力の中間にある批判的思考にも，より論理学に近いものとより読解力に近いものとがある。通常，ビジネス書としての論理的思考を啓蒙するための書籍の内容は読解力に近いものが多い。国語教育の宇佐美寛は，記号論の「語用論」の指導を提唱しているが，これも，読解力に近いものである。(③)

一方，論理学に近い批判的思考としては，野矢茂樹が提唱する指導内容がある。(②)

４．読解力と論理的思考の関係

論理学，批判的思考，読解力の関係を図示すると，次のようにあらわされる。




批判的思考は，論理学と読解力の間に位置しており，論理学に近く，論理学と重なる②のもの，読解力に近く，読解力と重なる③のものがある。②としては，野矢のものがあり，ビジネス書などは③のものが多い。本稿では，①の基礎的な事項と②のものを援用する。

## Ⅲ　論理的思考に基づく読解力の育成

＊野矢茂樹の『論理トレーニング101題』を参考にする。第１部:議論を読む，第２部:論証するという構成になっている。第１部は，接続関係「付加」「理由」「例示」「転換」「解説」「帰結」「補足」を読み取る活動や練習が中心で，批判的思考力の育成の中でも読解力の方に近い。第２部は，演繹や推測による推論を扱うもので，批判的思考力の育成の中でも論理学の方に近い。数学教育としては論理学に近い第２部が有効と思われる。

＜構成＞

１．論証図：単純なものから複雑なものまで，論証の構造を読み取る活動や練習

２．演繹：「逆」，「裏」，「対偶」，「のみ」，「だけ」，「しか～ない」「隠れた前提」を用いた推論

３．推測:推測の構造,「代替仮説の可能性」,「因果関係」

＊１～３のうち，２を中心にする。つまり，「逆」，「裏」，「対偶」，「のみ」，「だけ」，「隠れた前提」

さらに，

基礎的論理語として，「否定」，「かつ」，「または」，「ならば」，「全称命題とその否定」，「特称命題とその否定」

数学の量的な判断で使われる論理語として「少なくとも」，「最低でも」，「多くとも」，「最大でも」

つまり，

(1) 論理語

①否定　②かつ　③または　④ならば　⑤全称命題とその否定　⑥特称命題とその否定

(2) 数量的論理語

⑦少なくとも　⑧最低でも　⑨多くとも　⑩最大でも　⑪高々

(3) 演繹

⑫逆　⑬裏　⑭対偶　⑮のみ　⑯だけ　⑰しか～ない　⑱隠れた前提

(4) 推論

⑲演繹・帰納・類推 の区別

＜発達＞

(小学校低学年) ①否定

(小学校中学年) ②かつ

(小学校高学年，中学校学１年) ③または　④ならば　⑫逆

(中学校２・３年) ⑦少なくとも　⑧最低でも　⑨多くとも　⑩最大でも　⑪高々　⑮のみ　⑯だけ　⑰しか～ない　⑲演繹・帰納・類推の区別

(高校１・２年) ⑤全称命題とその否定　⑥特称命題とその否定　⑬裏　⑭対偶　⑱隠れた前提

＜数学的言明＞

それぞれについて，数学的言明での命題の例をあげ，必要なものについてはその説明を加えてみる。

(1) 論理語

①否定；(小学校３年)「６は３で割り切れるが，５は３で割り切れない」

②かつ：(小学校３年)「６は３で割れるし，かつ，６は２でも割り切れる」

③または：(中学校１年)「４つの直角をもつ四角形は長方形かまたは正方形です」

④ならば：(中学校１年)「三角形が正三角形ならば，３つの角が等しい」

⑤全称命題と否定：(高校１年)「すべての６の倍数は３の倍数である」

「『すべての５倍数が３の倍数である』のではない」≡「ある５の倍数は３の倍数でない」

⑥特称命題と否定：(高校１年)「ある５の倍数は奇数である」

「『ある６の倍数は奇数である』ことはない」≡「すべての６の倍数は奇数でない」

(2) 数量的論理語

⑦少なくとも：(中学校２・３年)「整数の集合Ａには，３の倍数が少なくとも５個ある」

⑧最低でも：(中学校２・３年)「整数の集合Ａには，３の倍数が最低でも５個ある」

⑨多くとも：(中学校２・３年)「整数の集合Ａには，３の倍数が多くとも５個ある」

⑩最大でも：(中学校２・３年)「整数の集合Ａには，３の倍数が最大でも５個ある」

⑪高々：(中学校２・３年)「整数の集合Ａの中の３の倍数は，高々５個である」

(3) 演繹

⑫逆：(中学校１年)「四角形で，正方形ならば対角線が直交する。これの逆は，四角形で，対角線が直交するならば正方形である」

⑬裏：(高校１年)「四角形で，正方形ならば対角線が直交する。これの裏は，四角形で，対角線が直交しないならば正方形ではない」

⑭対偶：(高校１年)「四角形で，正方形ならば対角線が直交する。これの対偶は，四角形で，対角線が直交しないならば正方形ではない」

⑮のみ：(中学校２年)「平行四辺形で，対角線が直角二等辺三角形を作るのは，正方形のみである」

⑯だけ：(中学校２年)「平行四辺形で，対角線が直角二等辺三角形を作るのは，正方形だけである」

⑰しか～ない：(中学校２年)「平行四辺形で，正方形しか，対角線が直角二等辺三角形を作らない」

AだけB≡AのみB≡BならばA

AしかBでない≡AでないならばBでない≡BならばA（対偶）

つまり

「AだけB」≡「AのみB」≡「AしかBでない」

⑱隠れた前提

野矢は，隠れた前提を次のように説明している。

『「平城京跡などの遺跡でしばしば木簡が発掘されますが，それらは地下水位よりも下にあったものです。地下水位より下の土中は水に浸っているも同然なので，酸素が少ない状態になっています。だから，腐朽菌は生きることができず，それゆえ木簡も腐らずに残っていたというわけです。」 この論証においては，次の二つの前提が

省略されている。
ｉ）腐朽菌は酸素が少ない状態では生きられない。
ⅱ）腐朽菌がなければ木は腐らない。』
隠れた前提はいろいろな演繹で発生しており，数学での演繹も同様である。例えば
「関数ｙ＝１／ｘ」では,「ｘ≠０」は隠れた前提である。また,「すべての数ｘにおいて　ｘ２≧０」では,「ｘは実数」が隠れた前提である。
⑷ 推論
⑱演繹，帰納，類推の区別
推論として，演繹は正しい推論であるが，帰納や類推は正しい推論ではない。このような違いを意識させることが必要である。
小学校から中学校１年までの扱いとして，推論の中心は演繹よりも，帰納や類推が中心である。この時期では演繹は正しい推論として扱わざるを得ない。ただし，類推の推論としての不十分さは理解させる必要がある。
中学校２学年以降での扱いとしては，演繹は正しい推論だが，帰納は正しくない推論であることを理解させなければならない。そのためには，以下のような手立てが考えられる。
ｉ）帰納の不十分さ
平均を求めるとき，以下のようにまとめて処理をする方法がある。
例１　赤の数の平均を，まとめながら求める

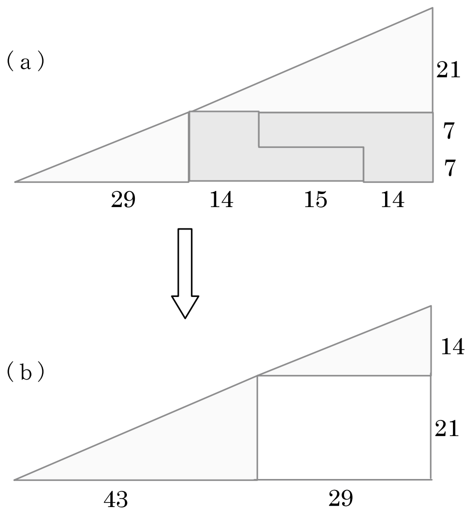
①　2　8　6　4　　　　3　1　4　8
　　5　　5　　　　　　　2　　6
　　　5　　　　　　　　　　4

②　1　7　2　4　6　　　2　4　6　8　10
　　4　　4　　　　　　　3　　8
　　　4　　　　　　　　　5.5

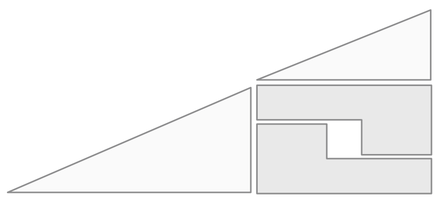
①は４この平均を２つずつまとめて処理できる例である。この方法は一般に正しい。②は５この平均を２つと３つの平均を用いて処理している。この場合，左は正しいが右は正しくない。つまり，平均をまとめて処理する方法は一般性がないのだが，①から一般性があるように感じやすい。帰納的考えの不十分さを認識させる例である。
例２：1000×ｎとｎ×ｎはどちらが大きいか？
1000×ｎとｎ×ｎの大きさの比較を表を作って行う。

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| n | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | … |
| 1000×ｎ | 1000 | 2000 | 3000 | 4000 | 5000 | … |
| ｎ×ｎ | 1 | 4 | 9 | 16 | 25 | … |

ｎがひとけたの数辺りでは，1000×ｎはｎが１増えるごとに１０００増え，ｎ×ｎは１０か２０位しか増えない。1000×ｎはｎ×ｎよりずっと大きいし，ｎが１増えた時の増え方も1000×ｎの方がずっと大きいので，生徒は1000×ｎがｎ×ｎよりも一般に大きいと誤解しやすい。
例３：オイラーの素数生成式
ｎを自然数として，　$n^2$＋ｎ＋４１により，素数が生まれる。これは,「オイラーの素数生成式」と呼ばれる有名な式である。ｎ＝０からｎ＝１０までに生成される数は以下のとおりである。
４１，４３，４７，５３，６１，７１，８３，９７，１１３，１３１，１５１
確かに，これらは素数である。
実際には，ｎ＝０からｎ＝３９まではすべて素数が生成されるが，ｎ＝４０のとき，１６８１が生成され，これは素数ではない。これも演繹の不十分さを示す例である。
ⅱ）実測の不十分さ
①（ａ）の直角三角形の底辺７２と高さ３５を測定する。
②２つのの三角形を入れ替えて直角三角形（ｂ）を描き，底辺と高さを測定し，やはり，底辺７２，高さ３５であることを確認する。




③ 影部を埋めると，すきまができる。



見た目や実作の不十分さを示す例である。

＜日常語での補い＞

松尾の研究などによると，数学での論理と日常語での論理は，子どもの理解は異なることが知られている。(①) したがって，数学での論理的表現を補って，日常語を用いた論理的表現も合わせて指導する。具体的には，以下のような例を挙げることができる。

(1) 論理語

①否定；(小学校低学年)「月曜日は休日では無い」

②かつ：(小学校高学年)「ＡかつＢ」は，日常語では「ＡとＢ」という表現がなされるときが多い。例えば，「机の上に鉛筆と消しゴムを出しなさい」と述べるとき，鉛筆だけを出すのは正しくない。しかし，「机の上には鉛筆と消しゴムは出してもよい」というとき，鉛筆だけ出すのは正しい。つまり，「ＡとＢ」は「ＡまたはＢ」の意味でも使われる。「かつ」の扱いは，数学的言明については小学校中学年から指導できるが，日常語の「かつ」の意味での「ＡとＢ」の指導は，少し遅らせて高学年から始める方がよい。

③または：(小学校高学年)「おやつはチョコレートかまたはクッキーを食べなさい」と言われた時，両方を食べるのは通常は間違いである。日常語の「または」は「どちらか一方だけ」という意味で使用されることも多い。論理学や数学での「または」は両方とも選んでよいから，このことを理解させるために，「あすは工作をしますから，ハサミかまたはカッターナイフを持って来なさい。」というような言明を提示すればよい。この場合，ハサミとカッターナイフの両方を持って来ても間違いで無いことは容易に理解できよう。

④ならば：(小学校高学年)「もしも明日天気ならば遠足に行きます

⑤全称命題と否定：(高校１年)「すべての動物は死ぬべきものである」「『すべての動物は死ぬべきものである』のではない」≡「ある動物は死なない」

⑥特称命題と否定：(高校１年)「ある動物は死ぬべきものである」,「『ある動物は死ぬべきものである』ことはない」≡「すべての動物は死なない」

(2) 数量的論理語

⑦少なくとも：(中学校２・３年)「この本箱にはマンガが少なくとも５冊入っている」

⑧最低でも：(中学校２・３年)「この本箱にはマンガが最低でも５冊入っている」

⑨多くとも：(中学校２・３年)「この本箱にはマンガが多くとも５冊入っている」

⑩最大でも：(中学校２・３年)「この本箱にはマンガが最大でも５冊入っている」

⑪高々：(中学校２・３年)「この本箱にはマンガが高々５冊入っている」

(3) 演繹

⑫逆：(中学校１年)「四角形で，正方形ならば対角線が直交する。これの逆は，四角形で，対角線が直交するならば正方形である」

⑬裏：(高校１年)「四角形で，正方形ならば対角線が直交する。これの裏は，四角形で，対角線が直交しないならば正方形ではない。」

⑭対偶：(高校１年)「四角形で，正方形ならば対角線が直交する。これの対偶は，四角形で，対角線が直交しないならば正方形ではない。」

⑮のみ：(中学校２年)「平行四辺形で，対角線が直角二等辺三角形を作るのは，正方形のみである。」

⑯だけ：(中学校２年)「平行四辺形で，対角線が直角二等辺三角形を作るのは，正方形だけである。」
⑰しか～ない：(中学校２年)「平行四辺形で，正方形しか，対角線が直角二等辺三角形を作らない。」
⑱隠れた前提
次の論証が正しい論証であるように，隠れた前提を述べよ。
＊テングタケは毒キノコだ。だから，食べられない。
＊「さっき彼と碁を打ってただろ。勝った？」「いや，勝てなかった」「なんだ。負けたのか。だらしないな」
＊ほえる犬は弱虫だ。うちのポチはよく吠える。だから，うちのポチは弱虫だ」

(4) 推論
日常の推論では，演繹・帰納・類推の区別がつきにくいことが多い。数学で演繹と帰納・類推との違いを示せばそれで十分であり，日常語での補足は不要である。

## Ⅳ　おわりに

本稿では，論理学と批判的思考を手掛かりとして，論理的思考に基づく読解力の育成のあり方を提案した。そして，それらの発達段階との関係も分析した。今後の課題としては，論理的思考に基づく読解力の育成を図るために，小・中学校を中心として，そのためのカリキュラムを作成することである。そして，そのカリキュラムによる授業を行って，本研究の成果の評価をすることである。

本研究は　科研費（課題番号：21530945）の助成を受けたものである。

＜参考・引用文献＞

①松尾知吉他「日常論理の様相について」『数学教育学論究』38，日本数学教育学会，1981年
②野矢茂樹「論理トレーニング101題」産業図書，2001年
③宇佐美寛「＜論理＞を教える」明治図書，2008年
④拙稿「算数・数学教育における読解力の育成（1）－研究の現状と課題－」愛媛大学教育実践総合センター紀要，第28号，2010年
⑤Secretariat,Center for Education and Innomation, ’Background Report:The Key Issues and Literature Reviewed’in Edited “Learning to think”