

空間周期性をもつ偏微分方程式問題に対する代用電荷法

Charge Simulation Methods for Partial Differential Equation Problems with Spatial Periodicities

緒方 秀教*

Hidenori OGATA*

In this paper, we present an extension of the charge simulation method, a solver for the problems of partial differential equations, to the problems of partial differential equations with spatial periodicities, especially to the problems of numerical conformal mappings of periodic structure domains and the problems of viscous flows (Stokes flows) past obstacles in a periodic array. In our method, we present approximate solutions expressed by linear combinations of the periodic fundamental solutions so that the solutions including periodic functions are approximated accurately. Some numerical examples show the effectiveness of our method.

Key words: charge simulation method, spatial periodicity, periodic fundamental solution, numerical conformal mapping, Stokes flow

1 はじめに

代用電荷法 [7, 8, 11] は偏微分方程式の数値解法のひとつであり, (i) プログラミングが簡単, (ii) 計算量が少ない, (iii) ある条件のもとで高い精度を得る, という利点から科学技術計算で広く用いられている方法である。この方法では, 偏微分作用素の基本解の1次結合により近似解を与える, すなわち, 領域 \mathcal{D} における偏微分方程式の境界値問題

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = 0 & (\text{in } \mathcal{D}) \\ u = f & (\text{on } \partial\mathcal{D}) \end{cases} \quad (1)$$

(\mathcal{L} は線形偏微分作用素) に対し, 近似解を作用素 \mathcal{L} の基本解の1次結合

$$u(\mathbf{x}) \simeq u_N(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N Q_j E(\mathbf{x} - \xi_j) \quad (2)$$

で与える方法である。ここで, $E(\mathbf{x})$ は作用素 \mathcal{L} の基本解, すなわち,

$$\mathcal{L}E(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x}) \quad (3)$$

を満たす関数であり, ξ_j ($j = 1, 2, \dots, N$) はユーザにより与えられる領域 \mathcal{D} 外部の点, Q_j ($j = 1, 2, \dots, N$) は後で定められる定数である。ここで, 近似解 $u_N(\mathbf{x})$ は問題領域 \mathcal{D} で偏微分方程式 $\mathcal{L}u = 0$ を厳密に満たすことに注意。境界条件に関しては, 係数 Q_j を適切に選ぶことにより, 近似的に満たされるようにする。

2次元ポテンシャル問題を例にとり, 代用電荷法をもう少し具体的に述べる。2次元 Laplace 方程式の境界値問題

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & (\text{in } \mathcal{D}) \\ u = f & (\text{on } \partial\mathcal{D}) \end{cases} \quad (4)$$

*松山市文京町3 愛媛大学工学部情報工学科

*Department of Computer Science, Ehime University, Matsuyama, Japan. E-mail ogata@cs.ehime-u.ac.jp

原稿受理 平成15年11月4日

(\mathcal{D} は 2 次元平面領域, Δ は Laplacian : $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$) の場合, 解 $u(x, y)$ を

$$u(x, y) \simeq u_N(x, y) = \sum_{j=1}^N Q_j \log |z - \zeta_j| \quad (z = x + iy) \quad (5)$$

で近似する。ここで, ζ_j ($j = 1, 2, \dots, N$) はユーザが問題領域 \mathcal{D} の外部に与える, 電荷点と呼ばれる点であり, Q_j ($j = 1, 2, \dots, N$) はあとで適切に定められる, 電荷と呼ばれる実数係数である。近似解 $u_N(x, y)$ は問題領域 \mathcal{D} で Laplace 方程式を厳密に満たすことに注意。境界条件に関しては, 電荷 Q_j の値を適切に定めることにより近似的に満たされるようにする。

本論文では, 空間周期性をもつ偏微分方程式問題に対する代用電荷法の拡張を提案する。具体的には次の 2 つの問題を考える。

1. 周期的領域の数値等角写像, すなわち, 1 次元周期的構造をもつ複素平面領域から周期平行スリット領域への数値等角写像 (図 1 参照) [9]。
2. 周期的領域における粘性流 (Stokes 流) 問題, すなわち, 同じ形の障害物が 2 次元周期的に無限に並んでいる 2 次元領域を流れる Stokes 流の問題 (図 2 参照) [10]。

これらの問題の解は周期関数を用いて表わされるため, 従来の代用電荷法で近似解を与えることが難しい。そこで本論文では, 式 (3) のように単一のソースから生成される基本解の代わりに, 周期的基本解, すなわち, 周期的に並ぶソースから生成される基本解を用いて近似解を与える方法を提案する。この方法は, 従来の代用電荷法の利点である計算の簡便さを維持しつつ, 真の解と同じ周期性をもつ周期関数を近似解として与えるので, ここで扱う周期性をもつ問題にとって都合が良い。

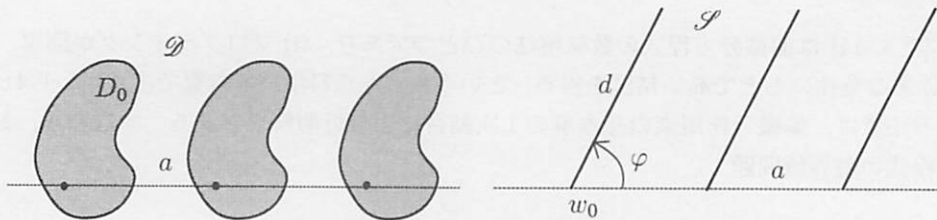


図 1: A periodic structure domain \mathcal{D} and a domain \mathcal{S} with periodic parallel slits.

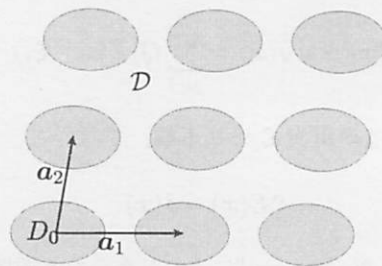


図 2: A two-dimensional domain \mathcal{D} among obstacles in a two-dimensional periodic array.

2 周期的領域の数値等角写像に対する代用電荷法

この節では, 周期的領域から周期平行スリット領域への等角写像を考え, その等角写像を代用電荷法を用いて近似する方法を提案する。なお, 通常単連結領域あるいは (多重度有限の) 多重連結領域の代用電荷

法による数値等角写像に関して、天野らが長年にわたり精力的に研究を行っている [1, 2, 3].

記号の定義と等角写像 はじめに、記号の定義をする。整数全体からなる集合を \mathbb{Z} 、実数全体からなる集合を \mathbb{R} 、複素数全体からなる集合を \mathbb{C} と記す。

周期的領域 \mathcal{D} を次のようにして定義する。 D_0 を Jordan 閉曲線に囲まれた単連結領域、 a を正の定数とし、 D_0 を ma ($m \in \mathbb{Z}$) だけ平行移動して得られる集合を D_m とする： $D_m = \{z + ma \mid z \in D_0\}$ 。ただし、 $\overline{D_m} \cap \overline{D_l} = \emptyset$ ($m \neq l$) であるとする。そして、 D_m ($m \in \mathbb{Z}$) 全体の外部を周期的領域 \mathcal{D} として定義する (図 1 参照)：

$$\mathcal{D} = \mathbb{C} \setminus \left\{ \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} \overline{D_m} \right\}. \quad (6)$$

周期平行スリット領域 \mathcal{S} を次のようにして定義する。 w_0 を複素平面の 1 点、 d を正の定数、 φ を $-\pi < \varphi \leq \pi$ なる角度、 $m \in \mathbb{Z}$ として、 $S_m = \{w_0 + te^{i\varphi} \mid 0 \leq t \leq 1\}$ とおく。そして、線分 S_m ($m \in \mathbb{Z}$) 全体の外部を周期平行スリット領域 $\mathcal{S} = \mathcal{S}(w_0, d, \varphi)$ と定義する (図 1 参照)：

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}(w_0, d, \varphi) = \mathbb{C} \setminus \left\{ \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} S_m(w_0, d, \varphi) \right\}. \quad (7)$$

我々が求めるのは、周期的領域 \mathcal{D} から周期平行スリット領域 \mathcal{S} への等角写像である。等角写像の存在に関して、次の定理が知られている [9].

定理 1 任意の周期的領域 \mathcal{D} に対し、周期平行スリット領域 $\mathcal{S} = \mathcal{S}(w_0, d, \varphi)$ 、および、 \mathcal{D} 上の解析関数 $w = f(z)$ で次の **P1**, **P2**, **P3** を満たすものが存在する：

- P1.** 解析関数 $w = f(z)$ は \mathcal{D} から \mathcal{S} への等角写像を与える。
- P2.** $f(z+a) = f(z) + a$ ($z \in \mathcal{D}$).
- P3.** $\operatorname{Re} z$ を固定して $\operatorname{Im} z \rightarrow \pm\infty$ としたとき、 $f(z) \sim z \pm c$ となる。ここで、 $c \in \mathbb{C}$ はある定数である。

近似写像関数 ここで、写像関数 $w = f(z)$ を次のように表わしておく。

$$f(z) = z + e^{i(\varphi-\pi/2)}(g(z) + ih(z)), \quad (8)$$

ただし、 $g(z), h(z)$ は \mathcal{D} における共役調和関数であり、定理 1 の **P2** より周期 a の周期関数である：

$$g(z+a) + ih(z+a) = g(z) + ih(z) \quad (z \in \mathcal{D}). \quad (9)$$

このとき、各境界 ∂D_m ($m \in \mathbb{Z}$) がスリット S_m に写るという条件は、次のように表わされる。

$$\operatorname{Re} \left\{ e^{i(\pi/2-\varphi)} f(z+ma) \right\} = u + ma \sin \varphi \quad (m \in \mathbb{Z}, z \in \partial D_0), \quad (10)$$

(u は未知の定数)、すなわち、

$$g(z+ma) = u - \sin \varphi \cdot x + \cos \varphi \cdot y \quad (m \in \mathbb{Z}, z = x + iy \in \partial D_0). \quad (11)$$

結局、写像関数を求める問題は、1 対の共役調和関数 $g(z), h(z)$ で周期的境界条件 (11) を満たすものを求めるという境界値問題に帰着する。

周期的境界条件 (11) を満たす調和関数 $g(z), h(z)$ を代用電荷法で近似しようとするとき、素朴に思いつく方法のひとつは、次のように電荷を周期的に無限に並べる方法である。

$$g(z) \simeq \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{j=1}^N Q_j \log |z - \zeta_j - ma|, \quad (12)$$

すなわち、

$$g(z) + ih(z) \simeq \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{j=1}^N Q_j \log(z - \zeta_j - ma), \quad (13)$$

ここで、 $Q_j \in \mathbb{R}$, $\zeta_j \in D_0$ ($j = 1, 2, \dots, N$) である。しかし、式 (13) 右辺の無限和は一般に収束しない。そこで、無限和が収束するように、近似式 (13) を次のように書き直す。

$$g(z) + ih(z) \simeq \sum_{j=1}^N Q_j \left\{ \log \left[\frac{\pi}{a}(z - \zeta_j) \right] + \sum_{m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left[\log \left(1 - \frac{z - \zeta_j}{ma} \right) + \frac{z - \zeta_j}{ma} \right] \right\}. \quad (14)$$

右辺の括弧 $\{\dots\}$ 内は $\log \sin[(\pi/a)(z - \zeta_j)]$ に他ならない。したがって、周期関数 $g(z) + ih(z)$ に対する近似

$$g(z) + ih(z) \simeq G(z) + iH(z) = \sum_{j=1}^N Q_j \log \sin \left[\frac{\pi}{a}(z - \zeta_j) \right] \quad (15)$$

を得る。ここで現われる関数 $\log \sin[(\pi/a)(z - \zeta_j)]$ が、Laplacian の周期的基本解である。点 ζ_j ($j = 1, 2, \dots, N$) はユーザにより D_0 内部に与えられる点であり、電荷点と呼ばれる。係数 Q_j ($j = 1, 2, \dots, N$) は後で定められる実数定数であり、電荷と呼ばれる。なお、関数 $G(z) + iH(z)$ が \mathcal{D} 上で一価関数であるようにするため、電荷 Q_j ($j = 1, 2, \dots, N$) に条件

$$\sum_{j=1}^N Q_j = 0 \quad (16)$$

を課すことにする。

上のようにして導入された近似関数 $G(z)$, $H(z)$ が領域 \mathcal{D} で共役調和であることは自明である。そして、条件 (16) の下で、近似関数 $G(z)$, $H(z)$ が周期条件 **P2**, 漸近条件 **P3** を満たすことも容易にわかる。残された境界条件 (11) は、以下に述べるように扱う。近似関数 $G(z)$, $H(z)$ に対しては、境界条件 (11) を緩和した拘束条件

$$G(z_i) = U - \sin \varphi \cdot x_i + \cos \varphi \cdot y_i \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (17)$$

を課す。ここで、 $z_i (= x_i + iy_i)$ ($i = 1, 2, \dots, N$) は拘束点と呼ばれる境界 ∂D_0 上の点であり、ユーザによって与えられる。 U は定数 u を近似すると期待される未知の実数定数である。拘束条件 (17) はまた、

$$\sum_{j=1}^N Q_j \log \left| \sin \left[\frac{\pi}{a}(z_i - \zeta_j) \right] \right| - U = -\sin \varphi \cdot x_i + \cos \varphi \cdot y_i \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (18)$$

と表される。等式 (16), (18) は未知定数 U , Q_j ($j = 1, 2, \dots, N$) に関する連立 1 次方程式をなす。よって、連立 1 次方程式 (16), (18) を解くことにより電荷 Q_j ($j = 1, 2, \dots, N$) が定まって近似関数 $G(z)$, $H(z)$ を得、近似写像関数

$$w = F(z) = z + e^{i(\varphi - \pi/2)}(G(z) + iH(z)) \quad (19)$$

を得る。

ところで、近似写像関数を実際に計算する際、複素対数関数 $\log z$ として主値、すなわち、 $-\pi < \arg z \leq \pi$ なる分枝を用いることが通常である。そのため、式 (15) の右辺各項に現われる関数 $\log \sin[(\pi/a)(z - \zeta_j)]$ ($j = 1, 2, \dots, N$) の不連続線が領域 \mathcal{D} の中に現われ、不便である。この対数関数の不連続に対しては、いわゆる「連続スキーム」を用いて対処することができる。これは、数学的には式 (15) と同値であり、かつ、対数関数の主値を計算に用いても不連続線が領域 \mathcal{D} に現われないような、近似関数 $G(z) + iH(z)$ の表式である。詳細は [9] を参照すること。

数値実験 周期的に並んだ円外部の領域

$$\mathcal{D}_1 = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z - 3m| > 1 \ (m \in \mathbb{Z}) \} \quad (20)$$

に対し、角度 $\varphi = \pi/2, \pi/4$ の周期平行スリット領域への数値等角写像を計算した。計算はすべて倍精度で行っている。図3に数値等角写像の様子を示す。拘束点 $z_i \ (i = 1, 2, \dots, N)$ および電荷点 $\zeta_i \ (i = 1, 2, \dots, N)$ は

$$z_i = \omega_N^{i-1}, \quad \zeta_i = 0.5\omega_N^{i-1} \quad (i = 1, 2, \dots, N), \quad (21)$$

$$\omega_N = e^{2\pi i/N} \quad (22)$$

ととっている。図において、“ z -平面”には領域 \mathcal{D}_1 内の実軸または虚軸に平行な直線群を描き、“ w -平面”にはその直線群の数値等角写像による像を描いている。

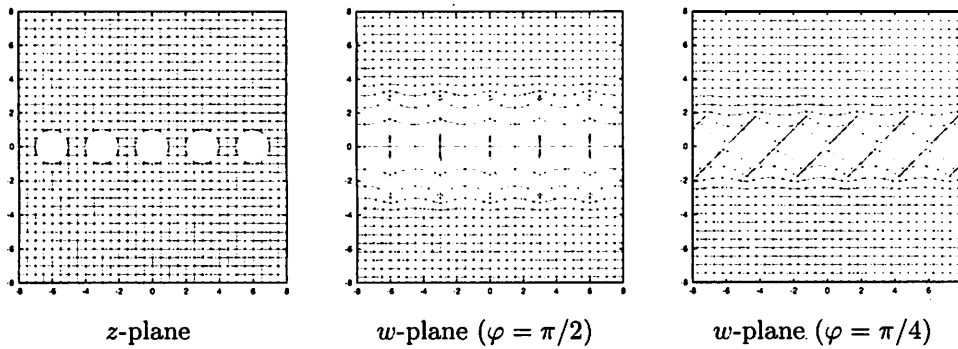


図 3: The domain \mathcal{D}_1 and its images by the numerical conformal mappings.

数値等角写像 $w = F(z)$ の誤差を見積もるため、

$$\varepsilon = \max_{z \in \partial D_0} \left| \operatorname{Re} \left\{ e^{i(\pi/2-\varphi)} F(w) \right\} - U \right| \quad (23)$$

で定義される値 ε を計算した。ここで、 $D_0 = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1 \}$ である。これは、境界 ∂D_0 が直線スリットに写るという境界条件

$$\operatorname{Re} \left\{ e^{i(\pi/2-\varphi)} f(z) \right\} = u \quad (24)$$

を近似写像関数がどれだけの精度で満たしているかを表わす指標である。表1に、点数 $N = 64$ としたときの数値等角写像の誤差評価 ε の値を記した。この表から、等角写像に対する境界条件は倍精度で満足されていることがわかる。これより、数値等角写像自身も高い精度を達成していると考えられる。

表 1: The values ε for the error estimations of the numerical conformal mappings of the domain \mathcal{D}_1 .

	$\varphi = \pi/2$	$\varphi = \pi/4$
ε	3.3×10^{-15}	3.6×10^{-15}

3 周期的領域における粘性流問題に対する代用電荷法

この節では、周期的に並んだ障害物を過ぎる2次元粘性流の問題を考え、それに対する代用電荷法による近似解法を提案する[10]。流れは非圧縮性の定常流であり、流速は十分遅いと仮定する。このとき、我々

の考える問題は数学的には、次の偏微分方程式の境界値問題として与えられる：

$$\mu\Delta v - \text{grad } p = 0 \quad \text{in } \mathcal{D}, \quad (25)$$

$$\text{div } v = 0 \quad \text{in } \mathcal{D}, \quad (26)$$

$$v = 0 \quad \text{on } \partial\mathcal{D}, \quad (27)$$

ここで、 \mathcal{D} は周期 a_1, a_2 で周期的に並ぶ障害物外部の 2 次元領域 (図 2 参照)、 v は流速、 p は圧力、 μ は粘性を表す正の定数である。式 (25) は Stokes 方程式であり、Navier-Stokes 方程式の線形近似である。式 (26) は非圧縮性流に対する連続性の条件、式 (27) は non-slip 境界条件である。方程式 (25), (26) の解として表される流れを Stokes 流と呼ぶ。

この Stokes 流の問題に代用電荷法を適用する場合、方程式 (25), (26) の基本解の一次結合により近似解を表せばよい。従来、方程式 (25), (26) の基本解として知られているのは、いわゆる Stokes 源 (Stokeslet) である [6]。これは、方程式

$$\mu\Delta v - \text{grad } p + K\delta(x) = 0, \quad (28)$$

$$\text{div } v = 0 \quad (29)$$

の解であり、具体的は次のように表される：

$$v(x) = -\frac{1}{4\pi\mu} T_0(x)K, \quad p(x) = -\frac{1}{4\pi\mu} \tau_0(x) \cdot K, \quad (30)$$

ここで

$$T_0(x) = \log|x| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{|x|^2} \begin{pmatrix} x^2 & xy \\ xy & y^2 \end{pmatrix}, \quad (31)$$

$$\tau_0(x) = -2\mu \frac{x}{|x|^2} \quad (32)$$

である。物理的に言えば、Stokes 源は点荷重 K により誘起される流れである。Stokes 流方程式の解を Stokes 源の一次結合により近似すると、次のようになる：

$$v(x) \approx v_0 + \sum_{j=1}^N T_0(x - \xi_j) Q_j, \quad (33)$$

$$p(x) \approx \sum_{j=1}^N \tau_0(x - \xi_j) \cdot Q_j \quad (34)$$

ここで $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$ は問題領域外部の点、 $v_0, Q_1, Q_2, \dots, Q_N$ は定数ベクトルである。近似解 (33), (34) は問題領域で方程式 (25), (26) を厳密に満たすことに注意。境界条件は、定数ベクトル Q_1, Q_2, \dots, Q_N を適当に定めることにより近似的に満たされるようにする。

有界領域の問題に対しては上の Stokes 源による解の近似は有効である。しかし、ここで考えている周期的領域の問題に対しては上の近似は有効でない。なぜなら、解は周期関数を用いて表される一方で、式 (33), (34) により周期関数を含む解を近似するのは困難であるからである。そこで、周期的領域の問題 (25), (26), (27) に対しては、Stokes 源-単一の点荷重により誘起される流れ-の代わりに、周期的基本解 [5]-周期的に配置された点荷重により誘起される流れ-を用いて近似解を構築することにする。以下では、若干の術語の準備のち周期的基本解の概略を述べ、我々の問題 (25), (26), (27) に対し周期的基本解を用いた近似解を提案する。

記号の定義 流れに対する障害物は基本周期 a_1, a_2 で配置されているものとする (図 2 参照)。このとき、

$$a = n_1 a_1 + n_2 a_2 \quad (n_1, n_2 \in \mathbb{Z}) \quad (35)$$

と表わされるベクトル \mathbf{a} を格子ベクトルと呼び、格子ベクトルを位置ベクトルにもつ点を格子点と呼ぶ。そして、格子ベクトル全体からなる集合を \mathcal{L} と記す。

格子ベクトルを用いると、問題領域 D は次のように定義される。障害物のひとつを D_0 とする。数学的には、 D_0 は Jordan 閉曲線に囲まれた単連結領域である。そして、 D_0 を格子ベクトル $\mathbf{a} \in \mathcal{L}$ だけ平行移動して得られる領域（障害物）を $D_{\mathbf{a}}$ とおく。このとき、問題領域 D は

$$D = \mathbb{R}^2 \setminus \left\{ \bigcup_{\mathbf{a} \in \mathcal{L}} \overline{D_{\mathbf{a}}} \right\} \quad (36)$$

で与えられる。

ベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ に対し双直交関係

$$\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{k}_j = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2) \quad (37)$$

を満たすベクトル $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2$ をとり、

$$\mathbf{k} = m_1 \mathbf{k}_1 + m_2 \mathbf{k}_2 \quad (m_1, m_2 \in \mathbb{Z}) \quad (38)$$

と表わされるベクトル \mathbf{k} を逆格子ベクトルと呼ぶ。そして、逆格子ベクトル全体からなる集合を \mathcal{L}^* と記す。

周期的基本解 Stokes 流方程式の周期的基本解とは方程式

$$\mu \Delta \mathbf{v} - \text{grad } p + \mathbf{K} \sum_{\mathbf{a} \in \mathcal{L}} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{a}) = \mathbf{0}, \quad (39)$$

$$\text{div } \mathbf{v} = 0 \quad (40)$$

の解である。ここで \mathbf{K} は定数ベクトルである。物理的に言えば、周期的基本解は格子点 $\mathbf{a} \in \mathcal{L}$ 全体に一樣に働く点荷重 \mathbf{K} により誘起された流れを表す。

周期的基本解の具体形は、Fourier 級数を用いて

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}_0 + \frac{1}{4\pi\mu} \{ \mathbf{K} S_1(\mathbf{x}) - (\mathbf{K} \cdot \nabla) \nabla S_2(\mathbf{x}) \}, \quad (41)$$

$$p(\mathbf{x}) = \frac{1}{\tau_0} \mathbf{K} \cdot \mathbf{x} + \frac{1}{4\pi} (\mathbf{K} \cdot \nabla) S_1(\mathbf{x}) \quad (42)$$

と表わされる。ただし、 \mathbf{v}_0 は任意の定数ベクトル、 τ_0 は格子の単位胞の面積、

$$S_1(\mathbf{x}) = \frac{1}{\pi\tau_0} \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{L}^* \setminus \{0\}} \frac{e^{i2\pi(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})}}{|\mathbf{k}|^2}, \quad (43)$$

$$S_2(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi^3\tau_0} \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{L}^* \setminus \{0\}} \frac{e^{i2\pi(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})}}{|\mathbf{k}|^4} \quad (44)$$

である。代用電荷法に応用するためには、上の解を次のようにマトリックス表示に書き直すと便利である：

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi\mu} \mathbb{T}(\mathbf{x}) \mathbf{K}, \quad p(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi\mu} \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{K}, \quad (45)$$

ただし、

$$\mathbb{T}(\mathbf{x}) = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} S_1(\mathbf{x}) + \begin{pmatrix} \partial_x^2 & \partial_x \partial_y \\ \partial_x \partial_y & \partial_y^2 \end{pmatrix} S_2(\mathbf{x}), \quad (46)$$

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) = -\frac{4\pi\mu}{\tau_0} \mathbf{x} + \mu \nabla S_1(\mathbf{x}) \quad (47)$$

である。なお、関数 $S_1(\mathbf{x}), S_2(\mathbf{x})$ とそれらの微分に現われる Fourier 級数は一般に収束が遅いが、Ewald の方法 [4, 5] を用いて収束を加速することができる。

周期的基本解による代用電荷法 周期的 Stokes 流の問題 (25), (26), (27) に対し, 次のように周期的基本解の一次結合により解を近似する:

$$v(x) \approx v_N(x) = v_0 + \sum_{j=1}^N T(x - \xi_j) Q_j, \quad (48)$$

$$p(x) \approx p_N(x) = \sum_{j=1}^N \tau(x - \xi_j) \cdot Q_j, \quad (49)$$

ここで, ξ_j ($j = 1, 2, \dots, N$) は障害物のひとつ D_0 内部の点であり, ユーザにより与えられる。これらの点は電荷点と呼ばれる。ベクトル Q_j ($j = 1, 2, \dots, N$) は後で決定される定数ベクトルであり, 電荷と呼ばれる。 v_0 はユーザにより与えられる定数ベクトルであり, 流速の空間平均を表す。すなわち,

$$v_0 = \lim_{D_0 \subset \mathcal{D}, D_0 \uparrow \mathcal{D}} \frac{1}{|D_0|} \int_{D_0} v(x) d^2x \quad (50)$$

($|D_0|$ は D_0 の面積) である。物理的に言えば, 上の近似は, 格子点 $\xi_j + a$ ($a \in \mathcal{L}$) 全体に一様に働く点荷重 $4\pi\mu Q_j$ により誘起される流れを考え, それらを $j = 1, 2, \dots, N$ について重ね合わせてできる流れで我々の問題の解を近似していることに相当する。

近似解 $v_N(x)$, $p_N(x)$ は問題領域 \mathcal{D} において方程式 (25), (26) を厳密に満たす。境界条件 (27) については, 定数ベクトル Q_j ($j = 1, 2, \dots, N$) を適当に選ぶことにより近似的に満足されるようにする。具体的には, 境界条件を緩和した拘束条件

$$v_N(x_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N), \quad (51)$$

を課す。ここで, x_i ($i = 1, 2, \dots, N$) は拘束点と呼ばれる障害物 D_0 の境界上の点であり, ユーザにより与えられる。拘束条件 (51) はまた,

$$\sum_{j=1}^N T(x_i - \xi_j) Q_j = -v_0 \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (52)$$

とも表わされる。式 (52) は電荷 Q_j ($j = 1, 2, \dots, N$) に関する連立 1 次方程式をなす。よって, 平均流速 v_0 を与えれば, 連立 1 次方程式 (52) を解くことにより電荷 Q_j ($j = 1, 2, \dots, N$) を得, 近似解 $v_N(x)$, $p_N(x)$ を得る。

障害物に働く力 障害物に働く力 F は, 代用電荷法で得られたデータを用いて

$$F \approx 4\pi\mu \sum_{j=1}^N Q_j \quad (53)$$

により近似値を求めることができる。これは, 代用電荷法近似の物理的意味から自然に理解できる。近似 (53) の導出の詳細は [10] に記してある。

数値実験 周期的に並んだ円柱を障害物にもつ領域における Stokes 流方程式の境界値問題 (25), (26), (27) の解を, 本文で提案した方法により求めた。具体的な問題領域としては, 正方格子領域

$$D_S = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - n_1 a)^2 + (y - n_2 a)^2 > r^2 \quad (n_1, n_2 \in \mathbb{Z}) \right\}, \quad (54)$$

および, 三角格子領域

$$D_T = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \left(x - n_1 \frac{a}{2} \right)^2 + \left(y - n_2 \frac{\sqrt{3}a}{2} \right)^2 > r^2 \quad (n_1, n_2 \in \mathbb{Z}) \right\} \quad (55)$$

を考える。ここで、 r, a は $0 < 2r < a$ なる正の定数である。拘束点 x_i ($i = 1, 2, \dots, N$), 電荷点 ξ_i ($i = 1, 2, \dots, N$) は両領域とも

$$\left. \begin{aligned} x_i &= r \left(\cos \left(\frac{2\pi(i-1)}{N} \right), \sin \left(\frac{2\pi(i-1)}{N} \right) \right), \\ \xi_i &= 0.5r \left(\cos \left(\frac{2\pi(i-1)}{N} \right), \sin \left(\frac{2\pi(i-1)}{N} \right) \right) \end{aligned} \right\} \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (56)$$

ととっている。計算はすべて倍精度で行った。

図4に、本論文で提案した方法で求めた流れの速度ベクトルを描いてある。ただし、定数 r, a は $r/a = 0.2$ ととってある。

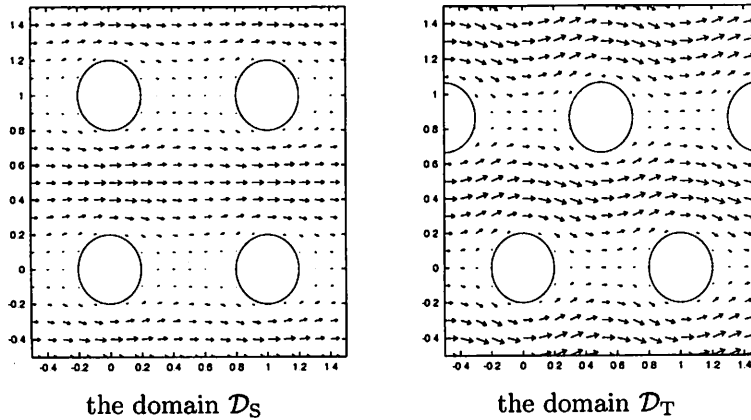


図4: The velocity fields of the Stokes flows in the domain with a square lattice array of cylinders (\mathcal{D}_S) and in the domain with a triangular lattice array of cylinders (\mathcal{D}_T) obtained by our method.

本論文の方法の精度を見積もるため、

$$\varepsilon = \max_{\mathbf{x} \in \partial D_0} \frac{|v_N(\mathbf{x})|}{|v_0|} \quad (57)$$

で定義される値 ε を計算した。これは、non-slip 境界条件 (27) を近似解がどれだけの精度で満たしているかを示す。図5に、拘束点・電荷点の数 N に対する誤差の見積もり ε の変化を示すグラフを載せてある。グラフより、点数 $N = 32$ で ε は 10^{-7} 程度の値になっている、すなわち、境界条件は単精度で満足されていることがわかる。

最後に、障害物である円柱に働く力を近似式 (53) により計算した結果を示す。図6には、力の大きさ $|F|$ の計算値の

$$\text{area concentration} = \frac{\pi r^2}{\tau_0} \quad (58)$$

に対する変化を記したグラフを載せてある。グラフより、空間中に障害物の占める割合が大きくなるにつれ、正方格子領域 \mathcal{D}_S における円柱に働く力のほうが三角格子領域 \mathcal{D}_T における円柱に働く力より大きくなることが読み取れる。これは言い換えれば、三角格子のほうが正方格子よりも流体にとって“流れやすい”ことを意味する。

4 まとめと今後の課題

本論文では2つの具体的な問題を通して、空間周期性をもつ偏微分方程式問題に対する代用電荷法の拡張を提案した。

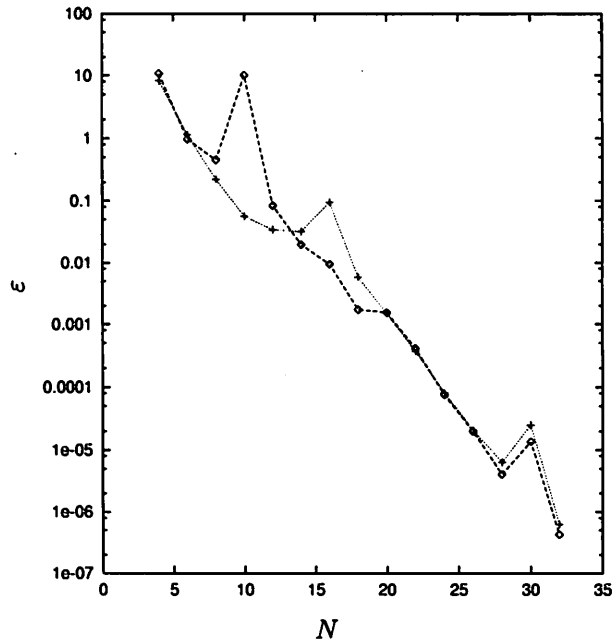


図 5: The values ε for the error estimations of our method applied to the flow problem in the domain \mathcal{D}_S (◇) and to the flow problem in the domain \mathcal{D}_T (+).

本論文の前半では、複素平面内の周期的構造をもつ領域から周期平行スリット領域への等角写像の代用電荷法による数値等角写像を提案した。数値実験により、本文の方法は少ない計算量で十分な精度を達成する有用な方法であることが確かめられた。実際の科学技術計算への応用はこれからの課題である。なお、2次元周期的ポテンシャル流への応用はすでに文献 [9] に示されている。

後半では、2次元周期的領域における Stokes 流の問題に対し、周期的基本解を用いた代用電荷法による近似解法を提案した。周期的に並んだ円柱を障害物にもつ流れの問題に対し数値実験を行い、その結果から、本方法は少ない計算量で十分な精度を達成し、有用な方法であることが確かめられた。また、障害物に対する力の計算も行い、それにより数値実験で扱った2領域における Stokes 流の振る舞いの違いを確かめた。今後の応用として、本方法の3次元問題への拡張、実際の科学技術計算への応用（多孔質における流体の解析）などが挙げられる。

謝辞

本研究を通して、愛媛大学工学部情報工学科 天野要教授、岡野大助手、名古屋大学大学院工学系研究科 計算理工学専攻 杉原正顯教授から、数多くの有益な助言を得た。ここに記して謝意を表す。本研究は科学研究費補助金（平成 14～15 年度若手研究 (B) 課題番号 14750054）等の補助を受けている。

参考文献

- [1] Amano, K.: A Charge Simulation Method for the Numerical Conformal Mapping of Interior, Exterior and Doubly-Connected Domains, J. Comput. Appl. Math., 53, pp.353–370, 1994.
- [2] Amano, K.: A Charge Simulation Method for Numerical Conformal Mapping onto Circular and Radial Slit Domains, SIAM J. Sci. Comput., 19, pp.1169–1187, 1998.

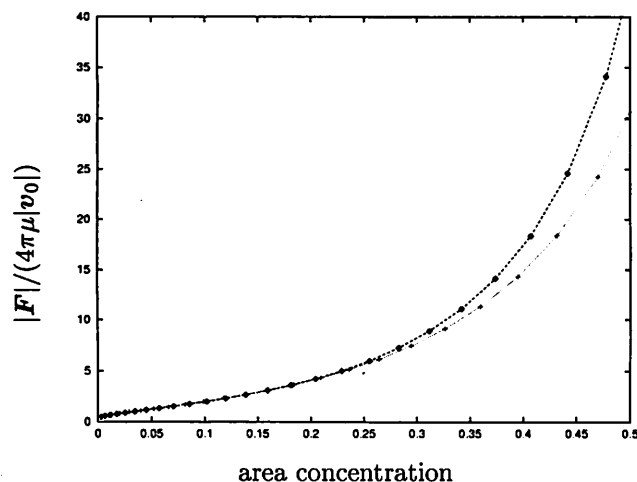


図 6: The drag force on spheres in a square lattice array (◇) and in a triangular lattice array (+).

- [3] 天野要, 岡野大, 緒方秀教, 下平博巳, 杉原正顯: 代用電荷法による非有界な多重連結領域の統一的な数値等角写像の方法, 情報処理学会論文誌, 42, pp.385-395, 2001.
- [4] Ewald, P. P.: Die Berechnung Optischer und Elektrostatischer Gitterpotentiale, *Ann. Phys.* 64, pp.253-287, 1921.
- [5] Hasimoto, H.: On the Periodic Fundamental Solutions of the Stokes Equations and Their Application to Viscous Flow past a Cubic Array of Spheres, *J. Fluid Mech.* 5, pp.317-328, 1959.
- [6] 今井功: 流体力学 (前編), 裳華房, 1973 年。
- [7] 村島定行: 代用電荷法とその応用, 森北出版, 1983 年。
- [8] Murashima, S. and Kuhara, H., An Approximation Method to Solve Two-Dimensional Laplace's Equation by Means of Green's Functions on a Riemann Surface, *J. Inform. Process*, 3, pp.127-139, 1980.
- [9] Ogata, H., Okano, D. and Amano, K.: Numerical Conformal Mapping of Periodic Structure Domains, *Japan J. Indust. Appl. Math.*, 19, pp.257-275, 2002.
- [10] Ogata, H., Amano, K., Sugihara, M. and Okano, D.: A Fundamental Solution Method for Viscous Flow Problems with Obstacles in a Periodic Array, *J. Comput. Appl. Math.*, 152, pp.411-425, 2003.
- [11] Singer, H., Steinbigler, H. and Weiss, P.: A charge Simulation Method for the Calculation of High Voltage Fields, *IEEE Trans. Power Apparatus Systems*, PAS-93, pp.1660-1668, 1974.