

## 吸収の real phase shift への効果再論

### Effects of Absorption on the Real Phase Shift Revisited

矢野 忠<sup>\*</sup>, 和田 武<sup>\*\*</sup>, 広重 昇<sup>\*\*\*</sup>, 江沢 康生<sup>†</sup>

Tadashi YANO<sup>\*</sup>, Takeshi WADA<sup>\*\*</sup>, Noboru HIROSHIGE<sup>\*\*\*</sup>, Yasuo EZAWA<sup>†</sup>

We study effects of absorption on the real phase shift in spinless nucleon-nucleon scattering in terms of optical model with square well potential. In the absence of real potential an imaginary one presents a nonzero real phase shift as well as absorption.

At the low energy negative phase shifts are obtained, unless the imaginary potential is large enough. If the depth of potentials is large enough, phase shift becomes always positive and tends to 180 deg at zero energy, which shows the existence of a bound state.

Key words: optical model, phase shift, Schroedinger eq., nucleon-nucleon scattering

#### 1 緒言

1965年に飛弾と著者の一人(矢野)が核力研究の一環として数 GeV までの陽子-陽子散乱を two channel 問題として研究していたときに結合している非弾性 Channel との結合のポテンシャルが弾性散乱の channel に reflection パラメーター(すなわち、確率)の減少のみならず, real phase shift への変化をもたらすらしいということを発見した。ただし、そのとき計算が信用されるには大きな障害があり、その計算はなかなか信用されなかった。これは物理の用語でいえば、2つの channel の unitarity (確率の保存)が満たされていなかったためである。そのためにその結果は飛弾と矢野にはとても本当らしく思われたのだが、周りの人の承認を得ることができなかった。この計算は非弾性 channel の波動関数の規格化が正しく行われていなかったためであり、その規格化を正しく行えば、すべてのそれまでの計算は正しいことが後で判明した。しかし、そのことがわかるまでになお紆余曲折を経なければならなかった。

---

<sup>\*</sup> 愛媛大学工学部電気電子工学科

<sup>\*</sup> Department of Electrical and Electronic Engineering, Ehime University

<sup>\*\*</sup> 愛媛大学総合情報メディアセンター

<sup>\*\*</sup> Center for Information Technology, Ehime University

<sup>\*\*\*</sup> 阪南大学経済学部

<sup>\*\*\*</sup> Faculty of Economics, Han-Nan University

<sup>†</sup> 愛媛大学理学部物質理学科

<sup>†</sup> Department of Physics, Ehime University

原稿受理 平成16年11月3日

1965年に名古屋大学で行われた高エネルギー物理学の研究会で長谷部勝也(当時,名古屋大学)がその最新の研究に触れ,その中で当時に問題にされていた高エネルギー散乱での前方散乱のかなり大きな振幅の実部が存在するという実験結果を optical model の虚数ポテンシャルからの寄与によって説明できるという所見を Conzett<sup>[1]</sup> が述べていることに言及した。著者の一人(広重)はそのことを聞いて帰って,矢野に知らせた。それを聞いた矢野は簡単な井戸形のポテンシャルを用いたモデル計算で Conzett の所見が正しいかどうかを確かめることを思いついた。また,同様な計算を,すでに行っていた two channel Schroedinger 方程式を単純化した,結合ポテンシャルを井戸形にとったモデル計算でも行えることを沢田との議論から認識した。これらがこの研究のきっかけであり,その結果や関連した事項は参考文献<sup>[2],[3]</sup>その他のところに発表された。

その研究当時から約40年が経過したが,今回この研究を再度振り返ってみよう。その動機は40年前にはすでにわかっていたが,論文発表上の制約から発表しなかったことやその当時には検討がなされなかったことがあるからである。この論文では主に optical model でポテンシャルの虚部が real phase shift (以下単に phase shift という) へどのような影響を与えるかについて主に扱うことにしよう。Two channel の場合の非弾性 channel からの弾性 channel の phase shift への効果についての再論は別の機会に譲ろう。

## 2 Optical model (井戸型ポテンシャルの場合)

Optical model は Schroedinger 方程式のポテンシャルとして,実部のみならず,虚部も含むものである。ポテンシャルとして球対称なポテンシャルを仮定しても解析的に解ける場合はあまりないが,次の式で定義される井戸形ポテンシャルは解析的に解けることが知られている<sup>[4]</sup>。

$$V(r) = \begin{cases} -(V_0 + iW_0), & r \leq a \\ 0, & r > a \end{cases} \quad (1)$$

ここで  $V_0 = \text{const}$ ,  $W_0 = \text{const}$  である。ポテンシャルが与えられると核子-核子の相対運動の Schroedinger 方程式は自然単位系 ( $\hbar = c = 1$  ととる) で

$$\left( -\frac{\Delta}{2m} + k^2 \right) \psi(\mathbf{r}) = V(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}) \quad (2)$$

と表される。ここで,  $m$  は核子-核子の2体系の換算質量であり,  $k^2 = 2mE$  である。  $E$  は実験室系での入射粒子の運動のエネルギーである。

粒子の current を  $\mathbf{j} = (1/2im)(\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*)$  で定義すれば,(2)から

$$\nabla \mathbf{j} = -2W_0 |\psi|^2 \quad (3)$$

が得られる。粒子の current は吸収によって減少するのであるから,  $W_0 > 0$  である。

さて、(2)の波動関数  $\psi(\mathbf{r})$  を部分波に分けて展開をし、その動径部分を  $u_l(r)/r$  と表せば、

$u_l(r)$  に対する波動方程式は

$$\left. \begin{aligned} \left[ \frac{d^2}{dr^2} + k^2 + 2m(V_0 + iW_0) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] u_l(r) &= 0, \quad r \leq a \\ \frac{d^2 u_l}{dr^2} + \left[ k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] u_l(r) &= 0, \quad r > a \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

ここで  $K, X, X_1, X_2$  をつぎのように定義する。

$$\left. \begin{aligned} K^2 &= k^2 + 2m(V_0 + iW_0) \\ X &= Ka = X_1 + iX_2 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

原点で non-singular な  $u_l(r)$  の解は  $r \leq a$  では

$$u_l(r) = iKr j_l(Kr), \quad r \leq a \quad (6)$$

である。ここで  $j_l$  は球 Bessel 関数である。一方、 $r > a$  では二つの特解が存在して

$$\left. \begin{aligned} u_l^{(+)}(r) &= ikr h_l^{(1)}(kr) \\ u_l^{(-)}(r) &= -ikr h_l^{(2)}(kr) \end{aligned} \right\}, \quad r > a \quad (7)$$

である。ここで、 $u_l^{(+)}(r), u_l^{(-)}(r)$  はそれぞれ発散波、収縮波であり、 $h_l^{(1)}, h_l^{(2)}$  は第1種と第2種の

Hankel 関数である。この二つの特解を用いて

$$u_l(r) = S_l u_l^{(+)}(r) - u_l^{(-)}(r) \quad (8)$$

と表される。ここで、 $S_l = r_l e^{2i\delta_l}$  で表される S matrix である。

波動関数の対数微分が  $r = a$  で連続でなければならないという条件から  $S_l$  を次式で求めることができる。

$$S_l = e^{2i\sigma_l} \frac{f_l - f_l^{(-)}}{f_l - f_l^{(+)}} \quad (9)$$

ここで、

$$e^{2i\sigma_l} = \frac{u_l^{(-)}(a)}{u_l^{(+)}(a)} = -\frac{h_l^{(2)}(a)}{h_l^{(1)}(a)} \quad (10)$$

である。また  $f_l^{(\pm)}$  は

$$f_l^{(\pm)} = a \left[ \frac{d}{dr} \left[ \ln u_l^{(\pm)}(r) \right] \right]_{r=a} \quad (11)$$

で定義される。

計算の定式化は結構面倒だが、文献<sup>[4]</sup>に詳しいので省略しよう。

### 3 結果と考察

ポテンシャルとして井戸形をとるが、ポテンシャルの range として、1 pion Compton 波長を単位として 0.3, 0.5, 0.7 ととる。また、虚数ポテンシャルの phase shift への効果を見たいので、ポテンシャルの実部を  $V_0 = 0$  ととる。Fig. 1 に  $a = 0.3$  の場合の s wave の phase shift のエネルギー変化を示す。ここで、 $W_0 = 100 - 300$  MeV ととった。この図からわかるように虚数ポテンシャルは phase shift を負にする効果を持っているが、約 1.9 GeV でこの符号が負から正へと変化していることがわかる。いずれにしても phase shift が負であることは虚数ポテンシャルが低エネルギーでは斥力に効いており、これが高エネルギーになるにつれて引力的に寄与している。しかし、 $a = 0.3$  ではその符号の変化はそれほど顕著とはいえない。

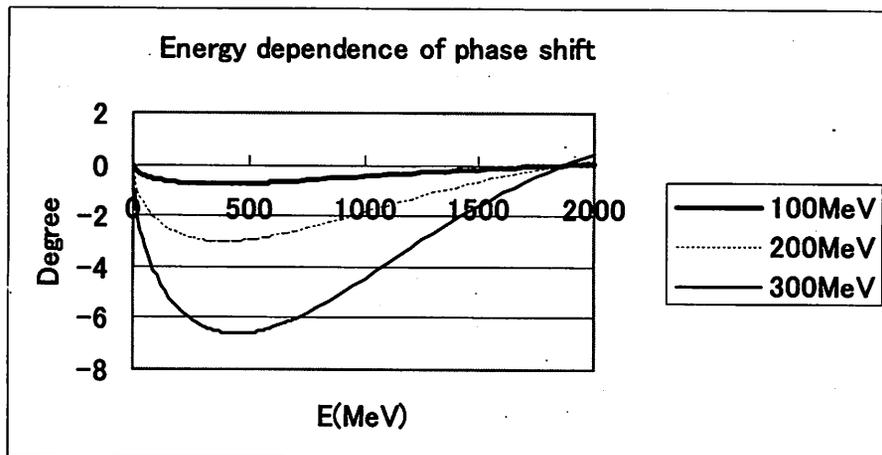


Fig.1 The s wave phase shift versus incident energy  $E$  for the square well potential with range  $a = 0.3$  in the unit of pion Compton wavelength. For pure imaginary potentials  $W_0 = 100, 200, 300$  MeV the phase shifts are represented by middle-bold solid curve, dotted one and normal solid one, respectively. In the below the same representation are used.

つぎに Fig. 2 では  $a = 0.5$  と range を少し大きくとってみると phase shift のエネルギー変化の様相が大きく変わってくる。phase shift の符号の変化が約 670 MeV で現れる。 $W_0 = 100$  お

よび 200 MeV に対して 670 MeV までは Fig. 1 と同様に phase shift への寄与は負で斥力に働いているが、670 MeV 以上では phase shift への寄与は正で、ポテンシャルとしては引力的に作用をしている。もちろん、エネルギーが上がってくれば虚数ポテンシャルの phase shift への効き方は次第に小さくなっていく。しかし、 $W_0 = 300$  MeV ではこのグラフに示されたように phase shift は常に正である。もっとも 670 MeV では  $W_0 = 100$  および 200 MeV の phase shift の符号の変化に対応して、phase shift が急激に減少している。また、入射粒子のエネルギー  $E$  が  $E \rightarrow 0$  のとき  $\delta_0 \rightarrow \pi = 180^\circ$  に近づくことがわかる。このことは束縛状態が存在していることを示している。すなわち、束縛状態の存在と phase shift との関係を示した Levinson の定理によれば、束縛エネルギーが 0 ではない束縛状態が 1 つ存在することを示している。

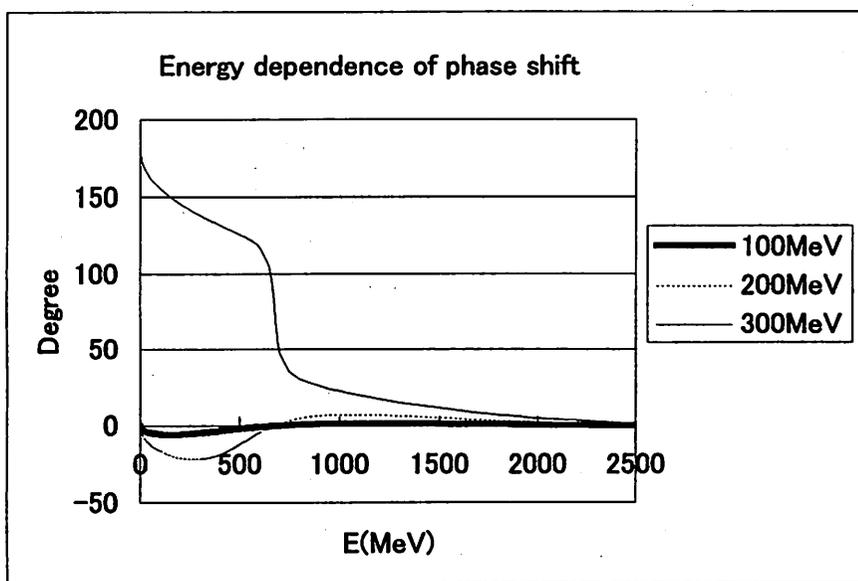


Fig. 2 The s wave phase shift versus incident energy  $E$  for the square Well potential with range  $a = 0.5$  in the unit of pion Compton wavelength.

$W_0 = 300$  MeV のとき 670 MeV あたりで phase shift が急激な変化をしているので、Phase shift のエネルギー変化の下限を与える Wigner の条件<sup>[5]</sup>が満たされているかどうか気になる。ところで、Wigner の条件とはつぎのようなものである。

いま、核子と核子の間のポテンシャルは short range であるので、井戸形ポテンシャルの range を  $a$  とすると、

$$\frac{1}{\hbar} \frac{d\delta_l}{dk} \geq -a \tag{12}$$

が成立たねばならない。いま、 $a = 0.5$  のとき、 $a = 0.5 \times 1.41 \text{ fm} = 0.70 \text{ fm}$  であるが、これを (12) に代入すれば、

$$\frac{d\delta_l}{dk} \geq -0.7 \text{ fm} = -0.7 \times 10^{-13} \hbar / (1.97 \times 10^{-11}) \text{ radians} / (\text{MeV}/c) \quad (13)$$

となる。したがって、

$$\frac{1}{\hbar} \frac{d\delta_l}{dk} \geq -0.7 \times 0.29 \text{ deg} / (\text{MeV}/c) = -0.20 \text{ deg} / (\text{MeV}/c) \quad (14)$$

実際にこの条件を  $W_0 = 300 \text{ MeV}$  のときに満たしているかどうかを見てみよう。入射エネルギーが  $650 - 700 \text{ MeV}$  では s wave の phase shift の差  $\Delta\delta_0 = -57.1^\circ$  であり、そのときの運動量の変化は  $\hbar\Delta k = 20.85 (\text{MeV}/c)$  である。したがって、入射エネルギーが  $670 \text{ MeV}$  の付近では

$$\frac{1}{\hbar} \frac{d\delta_0}{dk} = -2.739 [\text{deg} / (\text{MeV}/c)] \quad (15)$$

であり、phase shift の変化は(13)の Wigner の条件を満たしていないと考えられる。

この結果をどのように考えたらよいであろうか。一番単純には Wigner の条件を満たしていないのだから、 $W_0 = 300 \text{ MeV}$  の値はとれないと考えることであろう。

2番目の考え方はわれわれの model は一種の toy model であるから、確かにこの場合には Wigner の条件を満たしていないが、でもこのような toy model においては数学的に正しい phase shift を与えている。もちろん、この toy model が現実の自然世界を必ずしも反映はしていないし、反映していなくてもよい。

3番目には Wigner 条件の適用の一般性を疑うものである。Wigner 条件の適用が限られており、現在のような状況では適用限界外であるとするものである。

その他いろいろな立場があろうが、ここでは open question としておこう。

Fig. 3 に range  $a$  が  $a = 0.7$  の場合を示す。このときにはすでにエネルギーが約  $340 \text{ MeV}$

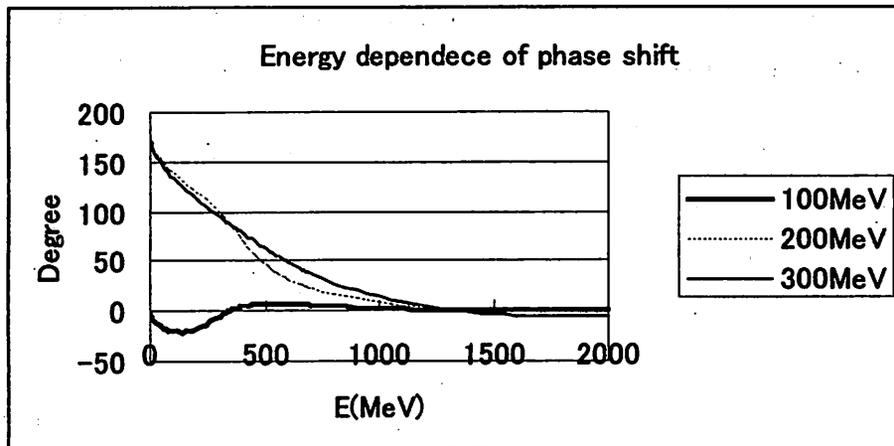


Fig. 3 The s wave phase shift versus incident energy  $E$  for the square well potential with range  $a = 0.7$  in the unit of pion Compton wavelength.

で phase shift の符号の変化が現れている。すなわち、ポテンシャルの range が大きくなるとそのポテンシャルの中に入る波数が多くなり、ポテンシャルの影響をより強く受けることになる。したがって、小さな入射エネルギーで phase shift に符号の変化がある。また、このときには井戸形ポテンシャルの深さも range が  $a = 0.5$  の場合ほど深くない。これはポテンシャルの range と深さと phase shift とは相関関係があるから当然であろう。また、 $W_0 = 150 \text{ MeV}$  ではちょうど phase shift の符号の変化が現れたエネルギーで phase shift の急激な変化が現れており、これは  $a = 0.5$  のときの  $W_0 = 300 \text{ MeV}$  と対比される。

$a = 0.7$  の場合の Wigner 条件と  $W_0 = 150 \text{ MeV}$  のときの s wave phase shift のエネルギー変化の結果はそれぞれ

$$(1/\hbar)d\delta_0/dk \geq -0.29 \text{ deg}/(\text{MeV}/c)$$

$$(1/\hbar)d\delta_0/dk = -2.97 \text{ deg}/(\text{MeV}/c), \text{ for } E = 300 - 350 \text{ MeV}$$

となり、この s wave phase shift の変化は Wigner の条件を満たしていない。

いままでは s wave の phase shift を解析的に解ける、井戸形ポテンシャルで見てきたが、これは不連続なポテンシャルである。そのポテンシャルの不連続性のために phase shift の符号の変化が起きたのかもしれない。この点については沢田が約 40 年前に著者の一人 (矢野) にその可能性<sup>[6]</sup>を指摘していたが、その点について詳しく調べたことがなかった。それで、今回は湯川型ポテンシャルと Gauss 型ポテンシャルについて 2 次の Born 近似での表式は求めたので、その結果を下に与えておこう。それを用いた詳細な数値計算はまだ行っていない。

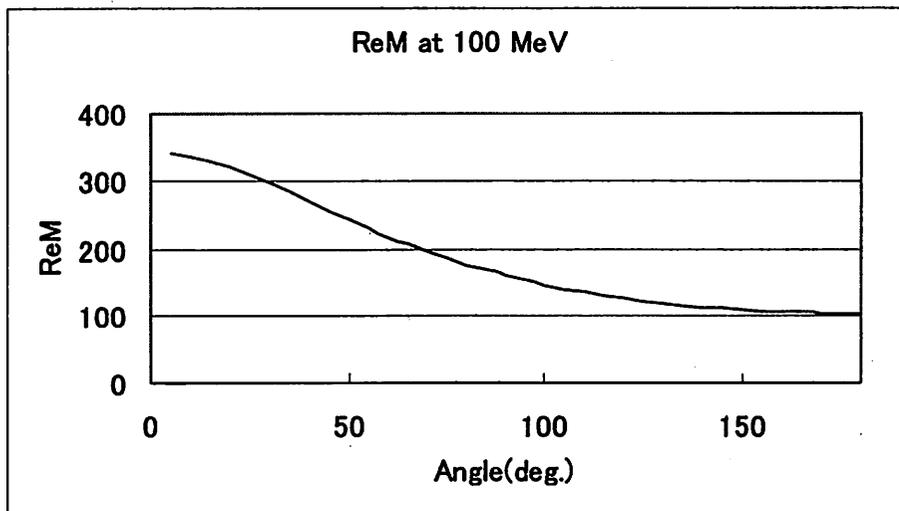


Fig. 4(a)  $\text{Re} M$  versus scattering angle  $\theta$  at  $E = 100 \text{ MeV}$ .  $E$  is the incident laboratory energy of nucleon. Here  $\text{Re} M$  is presented by the first equation in (17).

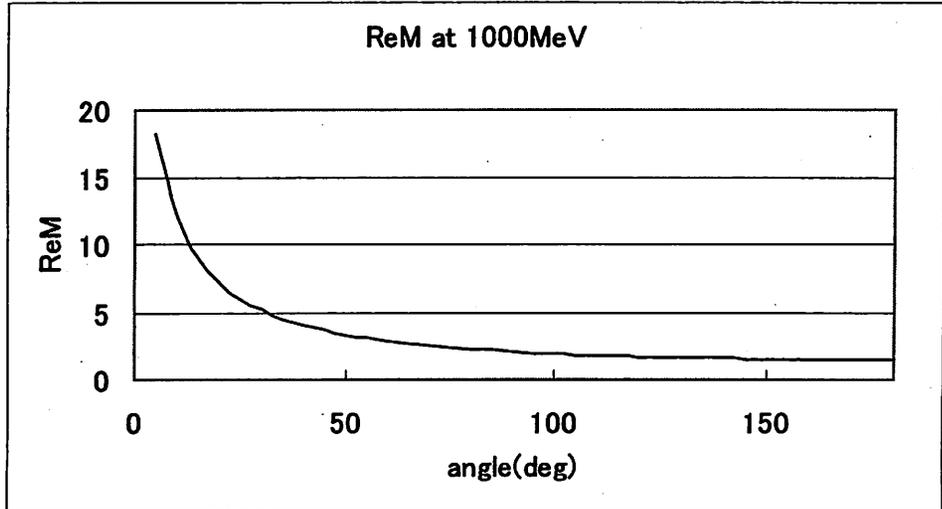


Fig. 4(b)  $\text{Re } M$  versus scattering angle  $\theta$  at  $E = 1000 \text{ MeV}$ .  $E$  is the incident laboratory energy of nucleon.

Yukawa 型ポテンシャルについて  $V(r) = V_0(r) + iW_0(r)$  で  $V_0(r) = 0$  とすれば、散乱振幅の実部と虚部は

$$\text{Re} \langle \mathbf{k}_f | T^{(2)} | \mathbf{k}_i \rangle = \left( \frac{4\pi}{\mu} \right)^2 \frac{2m}{\hbar^2} \frac{1}{(2\pi)^3} W_0^2 \text{Re } M \quad (16)$$

$$\text{Im} \langle \mathbf{k}_f | T^{(2)} | \mathbf{k}_i \rangle = \frac{4\pi}{\mu} W_0 \frac{1}{\mu^2 + 4k^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} + \left( \frac{4\pi}{\mu} \right)^2 \frac{2m}{\hbar^2} W_0^2 \text{Im } M \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \text{Re } M &= \frac{\pi^2}{2} \frac{1}{k^2 \left( \sin \frac{\theta}{2} \right) N} \tan^{-1} \left[ \frac{\mu \sin \frac{\theta}{2}}{2N} \right] \\ \text{Im } M &= \frac{\pi^2}{4} \frac{1}{k^2 \left( \sin \frac{\theta}{2} \right) N} \log \left[ \frac{N + k \sin \frac{\theta}{2}}{N - k \sin \frac{\theta}{2}} \right] \\ N &= \sqrt{k^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} + \mu^2 + \frac{\mu^4}{4k^2}} \end{aligned} \quad (18)$$

で与えられ、また phase shift  $\delta_l$  は

$$\tan 2\delta_l = \frac{k \text{Re } F^{(2)}}{1 - k \text{Im } F^{(2)}} \quad (19)$$

で計算される。(19)で  $F^{(2)}$  は  $F_l^{(2)}$  と書くべきであるが、簡単のために添字  $l$  を省略している。

また

$$F^{(2)}(k) = \int_{-1}^1 f^{(2)}(x, k) P_l(x) dx \quad (20)$$

で定義されており、 $f^{(2)}$  は 2 次の Born 近似の散乱振幅である。ここで、

$$f^{(2)}(x, k) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \langle \mathbf{k}_f | T^{(2)} | \mathbf{k}_i \rangle \quad (21)$$

で定義される。

ところで phase shift の符号に変化があるかどうかは(19)の分母は正であるので、(19)の分子、 $\text{Re} F^{(2)}$ 、の正負がわかればよい。それで、 $\text{Re} M$  を計算してみた。それを Fig. 4 に示す。これからわかるようにエネルギー 100 MeV と 1000 MeV で  $\text{Re} M > 0$  である。したがって、2 次の Born 近似の計算からは phase shift の符号の変化は起こらず、常に負であることが予想される。

Gauss 型のポテンシャルのときもポテンシャルの実部  $V_0$  を 0 ととると  $\text{Re} F^{(2)} = 0$  となるので、ポテンシャルの虚部からの phase shift への寄与はない。もっとも、ポテンシャルの実部  $V_0$  を 0 ととらなければ、もちろん phase shift への寄与は存在するので、ポテンシャルの虚部から phase shift への寄与がまったくないことを意味しているわけではない。

#### 4 まとめと今後の課題

井戸形ポテンシャルの optical model で純虚数のポテンシャルを考えたときに、この虚数ポテンシャルは吸収を表すのみならず、弾性散乱の phase shift に影響を与えることを示した。これはもちろん s wave の phase shift に一番大きな影響を与えるが、p wave や d wave の phase shift にも影響を与える。吸収の phase shift への影響を見てみると井戸形ポテンシャルの場合には低エネルギーでは phase shift が負、すなわち、斥力ポテンシャルとして影響を与えるが、あるエネルギーでこれが引力に転じる。すなわち、phase shift は正となる。この phase shift のエネルギーはポテンシャルの range に依存しており、range が大きいほど小さなエネルギーで符号の変化が起きる。

また、虚数ポテンシャル  $W_0$  の大きさが大きくなると phase shift は常に正となり、エネルギー 0 で 180 度に近づく。これは束縛状態が 1 個存在することを示している。

以上が井戸型ポテンシャルでの結果であるが、Yukawa 型と Gauss 型のポテンシャルにおいては解析的には解けないので、Born 近似によらなければならない。予備的な考察によれば、この場合には phase shift の符号の変化が起きないと予想される。

散乱問題において解析的に解ける例として, Coulomb ポテンシャルがある。また, s wave に話を限れば, 解析的に解ける場合として

$$\text{指数型ポテンシャル: } V = V_0 \exp(-ar)$$

$$\text{Hulthen 型ポテンシャル: } V = V_0 \exp(-ar) / [1 - \exp(-ar)]$$

が知られている。しかし, これらの解はいずれもかなり面倒なものであり, 数値計算をしなければ, その全貌は明らかにはならない。こういった例で phase shift がどういう風にエネルギー変化していくのかを調べることや 2nd Born 近似での虚数ポテンシャルの phase shift への寄与を詳細に調べることは今後の課題である。

また, 今回は吸収の効果を表すのに optical model を用いたが, channel を増やして two channel 問題とすることも以前に調べたことである。これをもう一度検討しなおすことも今後の課題となるが, それは別の機会に譲ろう。

### 謝辞

米沢穰 (広島大学名誉教授) さんに有益な議論と示唆を頂いたことを感謝する。

### 参考文献

- [1] H. E. Conzett: The Real Part of the Scattering Amplitude at High Energies, Phys. Letters 16, pp.189 - 191, 1965.
- [2] G. Hida and T. Yano: Effects of Absorption on the Real Phase Shift, Prog. Theor. Phys., 36, 3, pp.658 - 659, 1966.
- [3] G. Hida, S. Sawada, T. Yano and M. Yonezawa: Hard Core and Absorption in a Two-Channel Model for Proton-Proton Collision, Prog. Theor. Phys., 37, 4, pp.692 - 701, 1967.
- [4] H. Feshbach, C. E. Porter and V. F. Weisskopf: Model for Nuclear Reactions with Neutrons, Phys. Rev., 96, 2, pp.448 - 464, 1954.
- [5] E. Wigner: Lower Limit for the Energy Derivative of the Scattering Phase Shift, Phys. Rev., 98, 1, pp.145 - 147, 1955.
- [6] S. Sawada: private communication.

[校正時に追加]

(9) の  $f_i$  は  $r \leq a$  での波動関数  $u_i(r)$  の対数微分であり, つぎの式で定義される。

$$f_i = a \left[ \frac{d}{dr} \ln u_i(r) \right]_{r=a}$$