

マルチウェーブレットの構造及び設計*

On Structure and Design of Multiwavelets*

宇戸寿幸**・大上健二**

Toshiyuki Uto** and Kenji Ohue**

A multiwavelet with multiplicity $r > 1$ consists of r scaling functions and r wavelet functions. These functions can be generated by a lowpass multfilter and a highpass multfilter, whose coefficients are given by $r \times r$ matrices. This paper describes an efficient structure and design for symmetric orthogonal and biorthogonal multiwavelets. Factorizing the polyphase matrix of orthogonal and biorthogonal multiwavelets into elementary low-order building blocks, we introduce a systematic construction technique based on the lattice structure with rotation matrices. We then present a transformation of the tree-structured multiwavelet system into the equivalent scalar filter bank in order to design multfilter banks. Finally we show the potential of multiwavelets to improve the performance or the quality in image coding applications.

Key words: multiwavelet, multfilter bank, multirate signal processing, image compression.

1 緒言

音声や画像の符号化, 適応信号処理や情報通信等工学の様々な分野において, フィルタバンク^[1]に関する研究が進められている。特に, フィルタバンクは, 画像を効率的に伝送・蓄積するための圧縮技術に应用されている。最も基本的なフィルタバンクは, 周波数帯域を二つに分割する2分割フィルタバンクである。この2分割フィルタバンクを周波数帯域がオクターブ分割されるように縦続接続することにより, 近年注目されているウェーブレット変換^[1]が得られる。ウェーブレット変換に基づく画像符号化方式^[2]は, 離散コサイン変換等による圧縮技術よりも優れた圧縮性能を発揮することから, 新しい静止画像符号化標準方式である JPEG2000^{[3], [4]}に採用されている。

画像の圧縮符号化のために望まれる変換特性として, 対称性(線形位相)と直交性または双直交性が挙げられる^[4]。画像のような有限長信号に対して, 符号化画素の数が增加することなく効率的に符号化するために, 対称拡張法を適用できるように変換基底が対称性をもつことが重視されている。また, 変換が正規直交性を満たすことによりエネルギー保存則が成り立つため, 直交性は SNR スケーラビリティ機能をもつ符号化法との整合が取れる等の利点がある。一方, 双直交性は直交性を緩和した条件であるため, 変換設計の自由度が高く, より望ましい特性を有する変換を設計できる可能性があるという利点がある。

従来のウェーブレット変換(スカラーウェーブレット)は一つのスケーリング関数とウェーブレット関数により構成され, ハール変換を除いて対称性と直交性を同時に満足することはできないことが知られている^[1]。そのため, 画像符号化においては対称性と双直交性を有するウェーブレット変換^[2]が多用されている。一方, ウェーブレット変換を一般化したマルチウェーブレット^{[5]-[8]}は, 複数のスケーリング関数とウェーブレット関数により生成される。これにより, マルチウェーブレットの構成において多くの自由度を有することが可能となる。その一つの例として, マルチウェーブレットは対称性と直交性を同時に満たすことができる。その自由度を利用して設計することによって, マルチウェーブレットはウェーブレット変換より有効な変換になり得る。そのため, マルチウェーブレットの画像圧縮や雑音除去等への応用が期待されている。

本論文では, マルチウェーブレットを生成するマルチフィルタバンクの基本構造について概観し, そのラティス(格子形)構造に基づく構成法及び設計法を紹介する。まず, マルチレート信号処理に関する基本的な理論につい

*電子情報通信学会論文誌, Vol. J86-A, No. 4, pp. 402-409 (2003) の内容に加筆・修正を加えたものである。

**愛媛大学工学部情報工学科

**Department of Computer Science, Ehime University, Matsuyama, Japan. {uto,ohue}@cs.ehime-u.ac.jp

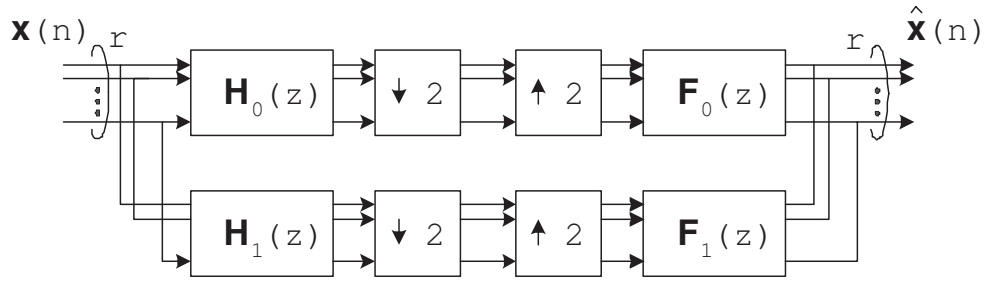


図 1: 多重度 r のマルチフィルタバンク

て述べる。次に、多重度 $r = 2$ のマルチフィルタバンクを例として、そのポリフェーズ行列を対称性と直交性または双直交性の条件から低次元化し、回転行列からなるラティス構造による構成法を示す。さらに、マルチフィルタと等価なスカラフィルタバンクの構造を導出し、その周波数特性を評価関数とする設計法を示す。最後に、本論文で示した手法により設計したマルチウェーブレットを静止画像の符号化に適用した結果について示す。

2 準備

多重度 $r > 1$ のマルチウェーブレット^[5]は、 r 個のスケーリング関数 $\Phi(t) = [\phi_1(t) \ \cdots \ \phi_r(t)]^T$ と r 個のウェーブレット関数 $\Psi(t) = [\psi_1(t) \ \cdots \ \psi_r(t)]^T$ から構成され、 $r = 1$ に相当するウェーブレット変換の一般形として位置付けられる。ここで、上付き添字 T は転置を表す。ウェーブレット変換と同様にマルチウェーブレットの関数 $\Phi(t)$, $\Psi(t)$ は低域及び高域通過特性をもつ二つのフィルタ $\mathbf{H}_0(z)$, $\mathbf{H}_1(z)$ により生成されるが、そのフィルタが $r \times r$ 行列で与えられる係数値を有する、つまりマルチフィルタである点がウェーブレット変換と大きく異なる。そして、双直交マルチウェーブレットの場合には、双対なスケーリング関数 $\tilde{\Phi}(t) = [\tilde{\phi}_1(t) \ \cdots \ \tilde{\phi}_r(t)]^T$ と $\tilde{\Psi}(t) = [\tilde{\psi}_1(t) \ \cdots \ \tilde{\psi}_r(t)]^T$ が存在し、それらの関数はマルチフィルタ $\mathbf{F}_0(z)$, $\mathbf{F}_1(z)$ により生成される。ただし、直交マルチウェーブレットでは、 $\mathbf{F}_0(z) = \mathbf{H}_0^T(z^{-1})$ 及び $\mathbf{F}_1(z) = \mathbf{H}_1^T(z^{-1})$ と関係付けられる。

図 1 は、多重度 r のマルチフィルタバンクを示す。ここで、 $\mathbf{x}(n)$ は入力信号、 $\hat{\mathbf{x}}(n)$ は出力信号、そして $\mathbf{H}_0(z)$, $\mathbf{H}_1(z)$, $\mathbf{F}_0(z)$ 及び $\mathbf{F}_1(z)$ はマルチフィルタをそれぞれ表す。また、 $\downarrow 2$ は信号の 2 番目ごとのサンプルを取り出すデシメーション、 $\uparrow 2$ は信号のサンプル間に 1 個の零値サンプルを挿入するインターポレーションを示し、それぞれの入出力信号を $\mathbf{x}(n)$, $\mathbf{y}(m)$ とすると時間領域では次のように表せる^[1]。

$$\mathbf{y}(m) = (\downarrow 2)[\mathbf{x}(n)] = \mathbf{x}(2m), \quad (\text{デシメーション}) \quad (1)$$

$$\mathbf{y}(m) = (\uparrow 2)[\mathbf{x}(n)] = \begin{cases} \mathbf{x}(m/2), & m = 0, \pm 2, \pm 4, \dots \\ \mathbf{0}, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (\text{インターポレーション}) \quad (2)$$

ただし、本論文において $\mathbf{0}$ は全ての要素が 0 であるベクトルまたは行列を表す。このとき、 z 領域においてマルチフィルタバンクの入出力関係は次のように与えられる。

$$\hat{\mathbf{x}}(z) = \frac{1}{2} \{\mathbf{F}_0(z)\mathbf{H}_0(z) + \mathbf{F}_1(z)\mathbf{H}_1(z)\} \mathbf{x}(z) + \frac{1}{2} \{\mathbf{F}_0(z)\mathbf{H}_0(-z) + \mathbf{F}_1(z)\mathbf{H}_1(-z)\} \mathbf{x}(-z) \quad (3)$$

従って、出力で入力信号が完全に復元、すなわち l_0 を任意の整数として $\hat{\mathbf{x}}(z) = z^{-l_0} \mathbf{x}(z)$ となるには、次の完全再構成条件を満足する必要がある。

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_0(z)\mathbf{H}_0(z) + \mathbf{F}_1(z)\mathbf{H}_1(z) &= 2z^{-l_0} \mathbf{I} \\ \mathbf{F}_0(z)\mathbf{H}_0(-z) + \mathbf{F}_1(z)\mathbf{H}_1(-z) &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (4)$$

ただし、 \mathbf{I} は単位行列を表す。

ここで、分解側のマルチフィルタ $\mathbf{H}_0(z)$, $\mathbf{H}_1(z)$ をタイプ I のポリフェーズ表現、合成側のマルチフィルタ $\mathbf{F}_0(z)$, $\mathbf{F}_1(z)$ をタイプ II のポリフェーズ表現によりそれぞれ表す^[1]。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_0(z) & \mathbf{H}_1(z) \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{00}(z^2) & \mathbf{E}_{01}(z^2) \\ \mathbf{E}_{10}(z^2) & \mathbf{E}_{11}(z^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & z^{-1}\mathbf{I} \end{bmatrix}^T$$

$$= \mathbf{E}(z^2) \begin{bmatrix} \mathbf{I} & z^{-1}\mathbf{I} \end{bmatrix}^T \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{F}_0(z) & \mathbf{F}_1(z) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} z^{-1}\mathbf{I} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{00}(z^2) & \mathbf{R}_{01}(z^2) \\ \mathbf{R}_{10}(z^2) & \mathbf{R}_{11}(z^2) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} z^{-1}\mathbf{I} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{R}(z^2) \end{aligned} \quad (6)$$

これらポリフェーズ行列 $\mathbf{E}(z)$, $\mathbf{R}(z)$ により完全再構成条件は次のようにも書ける。

$$\mathbf{R}(z)\mathbf{E}(z) = z^{-l_1}\mathbf{I} \quad (7)$$

ただし, l_1 は任意の整数を表す。直交マルチウェーブレットを構成するためには, ポリフェーズ行列 $\mathbf{E}(z)$ が次式を満たすパラユニタリ行列とならなければならない。

$$\mathbf{E}^T(z^{-1})\mathbf{E}(z) = \mathbf{I} \quad (8)$$

このとき, ポリフェーズ行列 $\mathbf{E}(z)$ から $\mathbf{R}(z)$ は次のように与えられる。

$$\mathbf{R}(z) = \mathbf{E}^T(z^{-1}) \quad (9)$$

3 マルチウェーブレットの構造と設計

まず, 対称性を有する直交及び双直交マルチウェーブレットを生成するためのマルチフィルタバンクのラティス構造について示す。次に, 最適なマルチウェーブレットを構成するラティス係数の設計について述べる。ただし, 以下では多重度 $r = 2$ のマルチウェーブレットを例として議論する。

3.1 マルチフィルタバンクのラティス構造

ラティス構造^[1]は, 分割されたシステムの縦続接続に基づくフィルタの一実現法であり, 係数値の量子化に関わらず完全再構成などの特性を保つ有効な方法として知られている。ここでは, 各マルチフィルタのフィルタ長が $L = 2 \times l$ ($l = 1, 2, \dots$) であるマルチフィルタバンクのラティス実現について考える。

対称性を満たすフィルタ長 L のマルチフィルタ $\mathbf{H}(z)$ は, 次の関係式を満たさなければならない。

$$\mathbf{H}(z) = z^{-(L-1)}\mathbf{D}\mathbf{H}(z^{-1})\mathbf{D} \quad (10)$$

ただし,

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \text{diag}(1, -1) \quad (11)$$

である。従って, 対称性を満たすマルチフィルタバンクのポリフェーズ行列 $\mathbf{E}(z)$ は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(z) &= \mathbf{E}_l(z) \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{l,0} & z^{-(l-1)}\mathbf{D}\mathbf{E}_{l,0}(z^{-1})\mathbf{D} \\ \mathbf{E}_{l,1} & z^{-(l-1)}\mathbf{D}\mathbf{E}_{l,1}(z^{-1})\mathbf{D} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (12)$$

ここで,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{l,0}(z) &= \mathbf{h}_{l,0} + \mathbf{h}_{l,1}z^{-1} + \dots + \mathbf{h}_{l,l-1}z^{-(l-1)} \\ \mathbf{E}_{l,1}(z) &= \mathbf{f}_{l,0} + \mathbf{f}_{l,1}z^{-1} + \dots + \mathbf{f}_{l,l-1}z^{-(l-1)} \end{aligned} \quad (13)$$

とすると, 直交マルチフィルタバンクは直交条件から次式を満たす。

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_{l,0}\mathbf{f}_{l,l-1}^T + \mathbf{D}\mathbf{h}_{l,l-1}\mathbf{D}\mathbf{D}\mathbf{f}_{l,0}^T\mathbf{D} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{h}_{l,l-1}\mathbf{f}_{l,0}^T + \mathbf{D}\mathbf{h}_{l,0}\mathbf{D}\mathbf{D}\mathbf{f}_{l,l-1}^T\mathbf{D} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_{l,0}\mathbf{f}_{l,l-1}^T + \mathbf{D}\mathbf{f}_{l,l-1}\mathbf{D}\mathbf{D}\mathbf{f}_{l,0}^T\mathbf{D} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_{l,l-1}\mathbf{f}_{l,0}^T + \mathbf{D}\mathbf{f}_{l,0}\mathbf{D}\mathbf{D}\mathbf{f}_{l,l-1}^T\mathbf{D} &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (14)$$

これより、ポリフェーズ行列 $\mathbf{E}_l(z)$ は次のように書き直される。

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{l,0}(z) & z^{-(l-1)}\mathbf{D}\mathbf{E}_{l,0}(z^{-1})\mathbf{D} \\ \mathbf{E}_{l,1}(z) & z^{-(l-1)}\mathbf{D}\mathbf{E}_{l,1}(z^{-1})\mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{l,0}^T & \mathbf{f}_{l,l-1}^T \\ \mathbf{D}\mathbf{f}_{l,l-1}^T\mathbf{D} & \mathbf{D}\mathbf{f}_{l,0}^T\mathbf{D} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{l-1,0}(z) & z^{-1}z^{-(l-2)}\mathbf{D}\mathbf{E}_{l-1,0}(z^{-1})\mathbf{D} \\ \mathbf{E}_{l-1,1}(z) & z^{-1}z^{-(l-2)}\mathbf{D}\mathbf{E}_{l-1,1}(z^{-1})\mathbf{D} \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{E}_{l-1}(z) \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & z^{-1}\mathbf{I} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (15)$$

従って、ポリフェーズ行列 $\mathbf{E}_l(z)$ は次のように表される。

$$\mathbf{E}_l(z) = \mathbf{E}_{l-1}(z) \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & z^{-1}\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{l,0}^T & \mathbf{f}_{l,l-1}^T \\ \mathbf{D}\mathbf{f}_{l,l-1}^T\mathbf{D} & \mathbf{D}\mathbf{f}_{l,0}^T\mathbf{D} \end{bmatrix}^{-1} \quad (16)$$

ただし、式 (16) の右辺第 3 項は直交行列となるので、

$$\mathbf{E}_l(z) = \mathbf{E}_{l-1}(z) \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & z^{-1}\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{l,0} & \mathbf{D}\mathbf{f}_{l,l-1}\mathbf{D} \\ \mathbf{f}_{l,l-1} & \mathbf{D}\mathbf{f}_{l,0}\mathbf{D} \end{bmatrix} \quad (17)$$

と書き直される。以上の手順を繰り返すことにより行列 \mathbf{E}_i ($i = l, l-1, \dots, 2$) は低次元化することができ、対称性と直交性を満たすマルチフィルタバンクのラティス構造は次式で表される。

$$\mathbf{E}(z) = \mathbf{B}_1\mathbf{\Lambda}(z)\mathbf{B}_2\mathbf{\Lambda}(z)\cdots\mathbf{B}_{l-1}\mathbf{\Lambda}(z)\mathbf{B}_l = \mathbf{B}_1 \prod_{i=2}^l \{\mathbf{\Lambda}(z)\mathbf{B}_i\} \quad (18)$$

$$\mathbf{\Lambda}(z) = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & z^{-1}\mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$\mathbf{B}_i = \begin{cases} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_i & \mathbf{D}\mathbf{a}_i\mathbf{D} \\ \mathbf{b}_i & \mathbf{D}\mathbf{b}_i\mathbf{D} \end{bmatrix}, & (i = 1) \\ \begin{bmatrix} \mathbf{a}_i & \mathbf{D}\mathbf{b}_i\mathbf{D} \\ \mathbf{b}_i & \mathbf{D}\mathbf{a}_i\mathbf{D} \end{bmatrix}, & (i = 2, 3, \dots, l) \end{cases} \quad (20)$$

先に述べたように、行列 \mathbf{B}_i は直交行列である必要がある。そこで、まず \mathbf{B}_i を次のように分解する。

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_i & \mathbf{D}\mathbf{b}_i \\ \mathbf{b}_i & \mathbf{D}\mathbf{a}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \quad (21)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_i &= \mathbf{c}_i - \mathbf{D}\mathbf{d}_i \\ \mathbf{b}_i &= \mathbf{D}\mathbf{c}_i + \mathbf{d}_i \end{aligned} \quad (22)$$

とすると、式 (21) の右辺第 1 項はさらに次のように分解することができる。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{c}_i - \mathbf{D}\mathbf{d}_i & \mathbf{c}_i + \mathbf{D}\mathbf{d}_i \\ \mathbf{D}\mathbf{c}_i + \mathbf{d}_i & \mathbf{D}\mathbf{c}_i - \mathbf{d}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{D} \\ \mathbf{D} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c}_i & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{d}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (23)$$

従って、式 (23) における要素行列 $\mathbf{c}_i, \mathbf{d}_i$ が直交行列であれば行列 \mathbf{B}_i は直交行列となることがわかる。そこで、要素行列 \mathbf{c}_i と \mathbf{d}_i を次式で与える。

$$\mathbf{c}_i = \begin{bmatrix} \cos \theta_{2i} & \sin \theta_{2i} \\ -\sin \theta_{2i} & \cos \theta_{2i} \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$\mathbf{d}_i = \begin{bmatrix} \cos \theta_{2i+1} & \sin \theta_{2i+1} \\ -\sin \theta_{2i+1} & \cos \theta_{2i+1} \end{bmatrix} \quad (25)$$

ただし、 $\theta_{2i}, \theta_{2i+1}$ は任意の変数であり、このラティス構成におけるパラメータをラティス係数という。

以上のように行列 \mathbf{B}_i が構成される場合、マルチフィルタバンクは構造的に対称性と直交性を同時に満たす。一方、行列 \mathbf{B}_i が式 (20) だけを満たす正則行列である場合、当然ながらそのマルチフィルタバンクは直交性を満たす

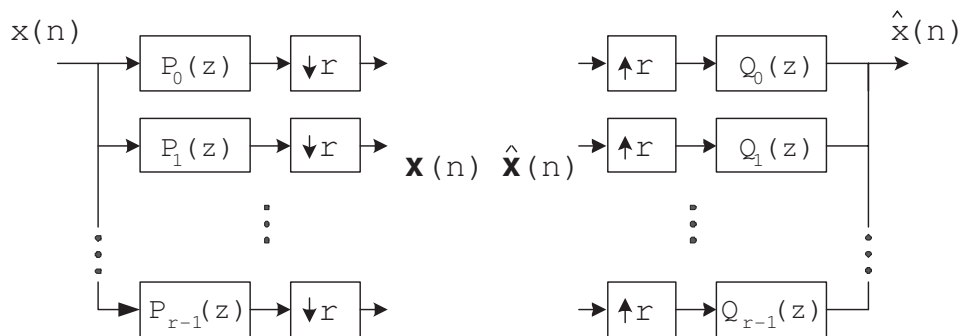


図 2: プレフィルタとポストフィルタ

ことは保証できないが、対称性と双直交性を満たすマルチフィルタバンクを構成することができる。つまり、対称性と双直交性を満たすマルチフィルタバンクのラティス実現は、正則である要素行列 $\mathbf{c}_i, \mathbf{d}_i$ から得られる行列 \mathbf{B}_i により構成される。

3.2 スカラフィルタバンクへの表現変換に基づく設計

マルチフィルタバンクの設計を考える前に、マルチフィルタバンクにおけるプレフィルタリングとポストフィルタリングについて述べる。図 1 に示されるように、多重度 r のマルチフィルタバンクは r 入力 r 出力システムである。そのため、1次元信号に多重度 r のマルチウェーブレットを適用するには、図 2 のように 1次元信号 $x(n)$ から r 次元信号 $\mathbf{x}(n)$ への変換処理とそれとは逆の変換処理が必要となる。これらの処理は、プレフィルタリング、ポストフィルタリングとそれぞれ呼ばれる。

多重度 $r = 2$ におけるプレフィルタ $P_0(z), P_1(z)$ とポストフィルタ $Q_0(z), Q_1(z)$ を、それぞれ次のようにポリフェーズ表現する。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} P_0(z) & P_1(z) \end{bmatrix}^T &= \begin{bmatrix} p_{00}(z^2) & p_{01}(z^2) \\ p_{10}(z^2) & p_{11}(z^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & z^{-1} \end{bmatrix}^T \\ &= \mathbf{E}_p(z^2) \begin{bmatrix} 1 & z^{-1} \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} Q_0(z) & Q_1(z) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} z^{-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{00}(z^2) & q_{01}(z^2) \\ q_{10}(z^2) & q_{11}(z^2) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} z^{-1} & 1 \end{bmatrix} \mathbf{R}_p(z^2) \end{aligned} \quad (27)$$

マルチフィルタバンクと同様に、入力信号を完全に再構成するためにはポリフェーズ行列 $\mathbf{E}_p(z), \mathbf{R}_p(z)$ は次式を満たさなければならない。

$$\mathbf{R}_p(z)\mathbf{E}_p(z) = z^{-l_2}\mathbf{I} \quad (28)$$

ここで、マルチフィルタバンクの設計、つまりラティス係数を決定するために 1次元の入力信号 $x(z)$ と分解フィルタ $\mathbf{H}_0(z), \mathbf{H}_1(z)$ の出力信号 $\mathbf{Y}_0(z), \mathbf{Y}_1(z)$ との関係に着目する。まず、マルチフィルタバンクの入力信号 $\mathbf{x}(z)$ は $x(z)$ により次のように与えられる。

$$\mathbf{x}(z) = \mathbf{E}_p(z^2) \begin{bmatrix} 1 \\ z^{-1} \end{bmatrix} x(z) \quad (29)$$

これより、マルチフィルタの出力信号 $\mathbf{Y}_0(z), \mathbf{Y}_1(z)$ は

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_0(z) \\ \mathbf{Y}_1(z) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{H}_0(z^2) \\ \mathbf{H}_1(z^2) \end{bmatrix} \mathbf{x}(z) \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{H}_0(z^2) \\ \mathbf{H}_1(z^2) \end{bmatrix} \mathbf{E}_p(z^2) \begin{bmatrix} 1 \\ z^{-1} \end{bmatrix} x(z) \end{aligned} \quad (30)$$

と表すことができる。従って、プレフィルタとマルチフィルタバンク ($r = 2$) による分解システムは $2r (= 4)$ 分割のスカラフィルタバンクと等価であることがわかり、その分解フィルタ $H_i(z)$ ($i = 0, 1, 2, 3$) は式 (30) から次

のように表現できる。

$$\begin{bmatrix} H_0(z) \\ H_1(z) \\ H_2(z) \\ H_3(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_0(z^2) \\ \mathbf{H}_1(z^2) \end{bmatrix} \mathbf{E}_p(z^2) \begin{bmatrix} 1 \\ z^{-1} \end{bmatrix} \quad (31)$$

同様に、等価なスカラフィルタバンクの合成フィルタ $F_i(z)$ ($i = 0, 1, 2, 3$) も得ることができる。この等価変換により、従来のスカラフィルタバンクに対して用いられる設計法をマルチフィルタバンクにも適用することができる。しかし、応用上において図 1 に示される 1 レベルだけで構成されるマルチフィルタバンクを用いることは稀であり、1 レベルのマルチフィルタバンクを低域出力に縦続接続することにより得られる複数レベルのシステム（マルチウェーブレット）を考慮する必要がある。

プレフィルタは多次元入力信号を生成するために最初だけ用いられるため、複数レベルのマルチフィルタバンクの 2 レベル以降の分解処理は式 (31) とは異なる。従って、式 (31) で表されるスカラフィルタバンクに基づいて設計することは適当ではない。そこで、各レベルの分解表現にプレフィルタを含めることにより処理表現を同一にするために、マルチフィルタバンクを接続する低域出力側にポストフィルタ $\mathbf{R}_p(z^2)$ を挿入する。

$$\begin{bmatrix} H'_0(z) \\ H'_1(z) \\ H'_2(z) \\ H'_3(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_p(z^2)\mathbf{H}_0(z^2) \\ \mathbf{H}_1(z^2) \end{bmatrix} \mathbf{E}_p(z^2) \begin{bmatrix} 1 \\ z^{-1} \end{bmatrix} \quad (32)$$

これは、各レベルにおいて 1 次元入力信号をプレフィルタにより多次元化した信号を分解フィルタの入力とし、分解フィルタの多次元出力信号をポストフィルタにより 1 次元化した信号を最終出力とすることに相当する。この各レベルにおけるポストフィルタ及びプレフィルタの付加処理は、式 (28) よりシステムに影響を与えないことに注意されたい。以上の処理により、各レベルの分解システムが同一である分解フィルタ $H'_i(z)$ ($i = 0, 1, 2, 3$) が得られる。同様に、合成フィルタ F'_i ($i = 0, 1, 2, 3$) も得ることができる。

本論文では、スカラフィルタ $H'_i(z)$, $F'_i(z)$ は以下の周波数を通過域 $\Omega_{passband}$, それ以外の周波数を阻止域 $\Omega_{stopband}$ とする。

$$\Omega_{passband} = \begin{cases} 0 \leq \omega < \pi/2, & i = 0 \text{ and } 1 \\ \pi/2 \leq \omega < 3\pi/4, & i = 2 \\ 3\pi/4 \leq \omega \leq \pi, & i = 3 \end{cases} \quad (33)$$

そして、評価関数として直交マルチウェーブレットの場合は、

$$C = \sum_{i=0}^3 \int_{w \in \Omega_{stopband}} W_a(e^{j\omega}) |H'_i(e^{j\omega})|^2 d\omega \quad (34)$$

双直交マルチウェーブレットの場合は、

$$C = \sum_{i=0}^3 \int_{w \in \Omega_{stopband}} W_a(e^{j\omega}) |H'_i(e^{j\omega})|^2 d\omega + \sum_{i=0}^3 \int_{w \in \Omega_{stopband}} W_s(e^{j\omega}) |F'_i(e^{j\omega})|^2 d\omega \quad (35)$$

を用いて、式 (34) または (35) を最小化するように非線形最適化により直交及び双直交マルチフィルタバンクを設計する。ただし、一般的に画像のエネルギーが集中している低域周波数における分解フィルタの阻止域減衰量を高めるため、また高域周波数における合成フィルタの阻止域減衰量を高めるために重み $W_a(e^{j\omega})$, $W_s(e^{j\omega})$ を用いる。

ここで、プレフィルタ、ポストフィルタとして

$$\mathbf{E}_p(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (36)$$

$$\mathbf{R}_p(z) = \mathbf{E}_p^T(z^{-1}) \quad (37)$$

を用い、式 (34) と式 (35) により設計した 8 タップの直交及び双直交マルチフィルタバンク (PO_8 , PB_8) に相当するスカラフィルタバンクの振幅応答を図 3 に示す。また、その比較として従来の直交マルチウェーブレット (SA_4) [8] の振幅応答も示す。 SA_4 に比べ、 PO_8 の分解フィルタの低周波数帯域、 PB_8 の分解フィルタの低周波数帯域及び合成フィルタの高周波数帯域において高い減衰量が得られている。

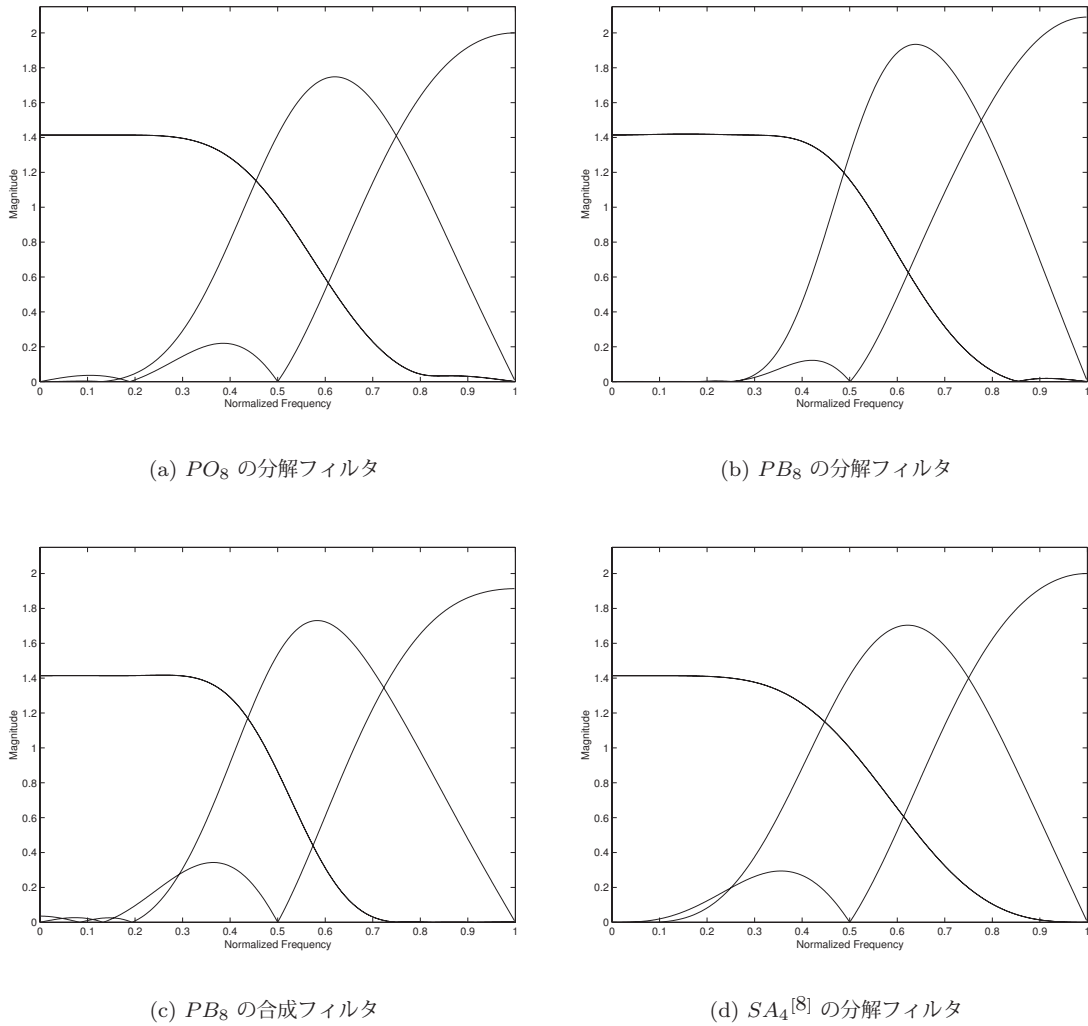


図 3: 等価なスカラフィルタバンクの振幅応答

4 シミュレーション結果

提案法により設計した 8 タップの直交及び双直交マルチウェーブレット (PO_8 , PB_8), これまでに提案されている 4 タップの直交マルチウェーブレット (SA_4)^[8]と 9/7 フィルタによるスカラウェーブレット ($B_{9/7}$)^[2]の各変換を用いて静止画像を符号化した結果について考察する。テスト画像にはサイズが 512×512 画素である Barbara 画像と Lena 画像を使用した。また, 各変換を用いて画像に対して 6 レベルの分解を施し, SPIHT アルゴリズム^[9]により符号化した。また, 画像符号化の性能を示す指標として次式の PSNR[dB] を使用した。

$$\text{PSNR} = 10 \log_{10} \left(\frac{255^2}{\text{MSE}} \right)$$

ただし, MSE は原画像と再構成画像との平均 2 乗誤差である。

ビットレートが 0.25, 0.5, 1.0bpp における, 二つの画像の PSNR 結果を表 1, 2 にそれぞれ示す。提案した直交マルチウェーブレット PO_8 は従来の SA_4 より高い PSNR 値が得られているが, Lena 画像においてはスカラウェーブレットの $B_{9/7}$ より若干低い結果である。一方, 提案した双直交マルチウェーブレット PB_8 は SA_4 , $B_{9/7}$ より良好な PSNR 値が得られている。また, 図 3 のような周波数特性を有する提案したマルチウェーブレットは 2 倍の分割数をもつスカラウェーブレットに類似しており, Barbara 画像のような高周波成分を多く含む画像に対して特に有効である。図 4 に Barbara 画像を各変換により 0.25bpp で符号化したときの再構成画像を示す。

5 結言

表 1: Barbara 画像に対する各変換による PSNR[dB]

Barbara	PO_8	PB_8	SA_4 [8]	$B_{9/7}$ [2]
0.25 bpp	28.01	28.18	27.81	27.53
0.5 bpp	31.86	32.35	31.52	31.58
1.0 bpp	37.01	37.73	36.58	36.81

表 2: Lena 画像に対する各変換による PSNR[dB]

Lena	PO_8	PB_8	SA_4 [8]	$B_{9/7}$ [2]
0.25 bpp	33.07	33.57	32.90	33.57
0.5 bpp	36.32	36.84	36.15	36.74
1.0 bpp	39.65	39.94	39.54	39.92

本論文では、ウェーブレットを生成するフィルタバンクの基礎理論について概説し、ウェーブレット変換の一般形であるマルチウェーブレットを構築する一手法を示した。提案したマルチフィルタバンクは構造的に対称性と直交性または双直交性を満たすため、回転角をパラメータとする制約なし最適化により直交及び双直交マルチウェーブレットを得ることができる。また、マルチフィルタバンクからスカラフィルタバンクへの等価的な表現変換により、従来のスカラフィルタバンクの設計手法を利用してマルチウェーブレットを設計することができる。最後に、提案法により設計したマルチウェーブレットを画像符号化に適用し、マルチウェーブレットがウェーブレット変換よりも優れた性能を実現する可能性があることを示した。

参考文献

- [1] G. Strang and T. Nguyen, *Wavelets and Filter Banks*. Wellesley, MA: Wellesley-Cambridge Press, 1996.
- [2] M. Antonini, M. Barlaud, P. Mathieu, and I. Daubechies, "Image coding using wavelet transform," *IEEE Trans. Image Processing*, Vol. 1, pp. 205–220, Apr. 1992.
- [3] D. S. Taubman and M. W. Marcellin, *JPEG2000: Image Compression Fundamentals, Standards and Practice*. Norwell, MA: Kluwer, 2002.
- [4] B. E. Usevitch, "A tutorial on modern lossy wavelet image compression: foundations of JPEG2000," *IEEE Signal Processing Magazine*, Vol. 18, pp. 22–35, Sept. 2001.
- [5] T. N. T. Goodman and S. L. Lee, "Wavelets of multiplicity r ," *Trans. Amer. Math. Soc.*, Vol. 342, pp. 307–324, 1994.
- [6] V. Strela, P. Heller, G. Strang, P. Topiwala, and C. Heil, "The application of multiwavelet filter banks to image processing," *IEEE Trans. Image Processing*, Vol. 8, pp. 548–563, Apr. 1998.
- [7] H. H. Tan, L. Shen, and J. Y. Tham, "New biorthogonal multiwavelets for image compression," *Signal Processing*, Vol. 79, pp. 45–65, 1999.
- [8] J. Y. Tham, L. Shen, S. L. Lee, and H. H. Tan, "A general approach for analysis and application of discrete multiwavelet transforms," *IEEE Trans. Signal Processing*, Vol. 48, pp. 457–464, Feb. 2000.
- [9] A. Said and W. A. Pearlman, "A new, fast and efficient image codec based on set partitioning in hierarchical trees," *IEEE Trans. Circuits and Systems for Video Technology*, Vol. 6, pp. 243–250, June 1996.



(a) 原画像



(b) PO_8



(c) PB_8



(d) $SA_4^{[8]}$



(e) $B_{9/7}^{[2]}$

図 4: Barbara 画像と各変換による再構成画像 (0.25bpp)