

吸収の real phase shift への効果再論 II

Effects of Absorption on the Real Phase Shift II

和田 武* 川崎 守† 江沢康生‡ 広重 昇§
矢野 忠¶ 米沢 穰||

Takeshi WADA** , Mamoru KAWASAKI, Yasuo EZAWA, Noboru HIROSHIGE,
Tadashi YANO and Minoru YONEZAWA

This is a sequel of the paper with the same title last year. At first, effects of absorption from elastic channel in the spinless nucleon-nucleon scattering are discussed for the s-wave phase shift in terms of soluble potentials and second Born approximation. Then we point out that Wigner lower bound with momentum dependence is not applicable in the phase shift for pure imaginary potential. Lastly, we discuss the behavior of pseudo bound state pole versus the ratio of the imaginary potential to the real one.

Key words: optical model, phase shift, Schrödinger eq., nucleon-nucleon scattering

1 緒言

昨年度の工学ジャーナルで同じタイトル [1] で報告をした。これはその続報である。対象は数 GeV までの核子-核子散乱で、それらの核子の間には実ポテンシャルをもたない、純虚数ポテンシャルをもつ、いわゆる optical model である。ただし、核子のスピンは無視した (spinless) 問題を Schrödinger 方程式で取り扱っている。

論文 [1] ではいくつかの問題点を述べておいた。そのうちの第一はポテンシャルを複素数にしたとき、虚数ポテンシャルからの phase shift (位相のずれ) への影響があるが、井戸型ポテンシャルでは phase shift が入射エネルギーとともに符号の変化することが見られた。軌道角運動量 $l = 0$ の s 波ではポテンシャルの到達距離 (range of the potential) が 0.5 pion Compton

*愛媛大学総合情報メディアセンター

†岐阜大学教育学部

‡愛媛大学理学部

§阪南大学経済学部

¶松山市南久米町

||広島市安芸中野

**Corresponding author: Center for Information Technology, Ehime University

波長で、ポテンシャルの深さが $W_0 = 0.1\text{GeV}$ のとき、入射エネルギー 0.67 GeV で phase shift の符号が負から正へと変化した¹。

ところで井戸型ポテンシャルは典型的な不連続ポテンシャルであるので、連続ポテンシャルでは phase shift の符号の変化が起こらないのではないかと沢田は約 40 年前に推測していた [2]。

この沢田の推測について二つのやり方で調べてみたい。一つは厳密な散乱の解析解で調べてみる。s 波に限れば、厳密解がわかっているポテンシャルがいくつかある²。それらについて実際に phase shift の符号の変化が起こるかどうか調べてみたい。もう一つは解析的な解が求まらないが、Yukawa 型ポテンシャルで 2 次の Born 近似で phase shift の符号の変化が起こるかどうか。このことを調べてみたい。これが問題の第一点である。

第二は井戸型ポテンシャルで、ポテンシャルの到達距離が $0.5\text{ pion Compton 波長}$ で、ポテンシャルの深さ W_0 が、 0.3 GeV のとき phase shift のエネルギー変化の下限を与える Wigner の条件 [3] を満たさなかったことである [4]。この点をどう考えるかが問題の第二点である。

それと前論文の発表後に調べられた擬束縛状態 (pseudo bound state) の存在について議論したい。これが問題の第三点である。

以下ではこの 3 点について前論文発表以後にわかったことを述べる。簡単化された Two-Channel の Schrödinger 方程式について非弾性 channel の存在による弾性散乱の phase shift への影響の再論も、この一連の研究計画の中に入っているが、これについては別の機会に譲ることにしよう [5],[6]。

2 Phase Shift の符号の変化

まず、動径部分の波動関数 $R_l \propto w_l/r$ とすれば、 w_l に対する方程式は

$$w_l'' - \left[\frac{l(l+1)}{r^2} + 2mV(r) - k^2 \right] w_l = 0 \quad (1)$$

で与えられる。ここで、 m は 2 核子系の換算質量であり、 k は $k = \sqrt{2mE}$ 、ただし E は実験室系での入射エネルギーであり、 k は質量中心系での運動量である。また l は軌道角運動量の大きさを表す方位量子数である。この論文では $\hbar = c = 1$ の自然単位系がとられている。

指数型ポテンシャル $V(r) = -V_0 \exp(-ar)$ と Hultén ポテンシャルについては、s 波の場合には解析解が求まることが知られている。それで phase shift と reflection parameter はそれぞれつぎのようになる。

1) 指数型ポテンシャル

指数型ポテンシャル [7] に対する S 行列は

$$S_0(k) = r_0 e^{2i\delta_0} = \left(\frac{\alpha}{2} \right)^{-2\nu} \frac{J_\nu(\alpha)\Gamma(\nu+1)}{J_{-\nu}(\alpha)\Gamma(-\nu+1)} \quad (2)$$

¹ここで、pion の質量は約 140 MeV である。その存在は湯川秀樹によって 1935 年になされ、1948 年に宇宙線中に発見された。なお、1949 年にその予言に対して湯川にノーベル賞が授与された。

²量子力学の散乱問題で厳密な解析解が存在する場合は、きわめて限られている。hard core、井戸型ポテンシャルと Coulomb ポテンシャルくらいしかすべての部分波については解くことができない。しかし、 $l=0$ の s 波に限れば、後に出てくる指数型ポテンシャルとか Hultén ポテンシャルとかの厳密な解析解が得られている。

ここで, δ_0 は s 波の phase shift であり, r_0 は s 波の reflection parameter であり, $\alpha = \frac{2}{a}\sqrt{2mV_0}$ および $\nu = i\frac{2k}{\alpha}$ である。したがって、phase shift と reflection parameter はそれぞれ

$$\tan 2\delta_0 = \frac{\text{Im}S_0}{\text{Re}S_0}, \quad r_0^2 = (\text{Re}S_0)^2 + (\text{Im}S_0)^2 \quad (3)$$

で与えられる。

2) Hultén ポテンシャル

Hultén ポテンシャルは

$$V(r) = -W_0 \frac{\exp(-r/a)}{1 - \exp(r/a)} \quad (4)$$

で与えられる。その s 波についての S 行列は Jost 関数 $f(k)$ によって

$$S = \frac{f(k)}{f(-k)} \quad (5)$$

と与えられ, また Jost 関数は

$$f(k) = \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 - \frac{g}{n(n + 2ika)} \right] \quad (6)$$

である [8]。ここで, $g = ma^2W_0$ であり, m は換算質量である。

Fig. 1 と Fig. 2 には指数型ポテンシャルの場合の phase shift のエネルギー変化を示した。Fig. 1 は 200 MeV までを, Fig. 2 には 2 GeV までの phase shift を示している。また Fig. 3 には reflection parameter のエネルギー変化を示した。これらの図からわかるように虚数ポテンシャルの深さが 50 MeV のとき, phase shift は核子の入射エネルギー約 45 MeV で負から正へと符号の変化をしている。また, 虚数ポテンシャルが 100 MeV のときには phase shift は常に正であり, 入射エネルギーが 50-60 MeV で急激な phase shift の変化が見られる。このことはこの論文の第二の問題点と関係している。Fig. 4 に Hultén ポテンシャルの phase shift を示した。この場合は phase shift は常に負で符号の変化は見られない。しかし, 虚数ポテンシャルの大きさによって異なってくるが急激な phase shift の増加がポテンシャル W_0 の深さが 50 MeV のときには 100-150 MeV で, 100 MeV のときには 100-200 MeV の入射エネルギーで見られる。Fig. 5 には reflection parameter のエネルギー変化を示している。

これらの図から連続ポテンシャルにおいては phase shift の符号の変化がないだろうという, 40 年前の沢田の推測は指数型ポテンシャルについては正しくはないことがわかる。しかし, Hultén ポテンシャルについては phase shift の符号の変化は見られなかった。

つぎに, 2 次の Born 近似による計算で s 波の phase shift がどうなるかを見てみよう。Yukawa 型ポテンシャルについては, 前論文にすでに記載してあるが, 簡単のために π 中間子の質量を無視した場合の phase shift と reflection parameter の計算結果を Fig. 6 に示した。 π 中間子の質量を無視しない場合の厳密な式は前論文 [1] の (16)-(21) に与えられているが, こちらについては計算をしなかった。 π 中間子の質量を無視したために, Fig.6(b) からわかるように reflection parameter がエネルギーが 0 のところで発散している。また, 本来 reflection parameter r は $0 \leq r \leq 1$ の値をとるべきであるが, Born 近似では unitarity を満たしていな

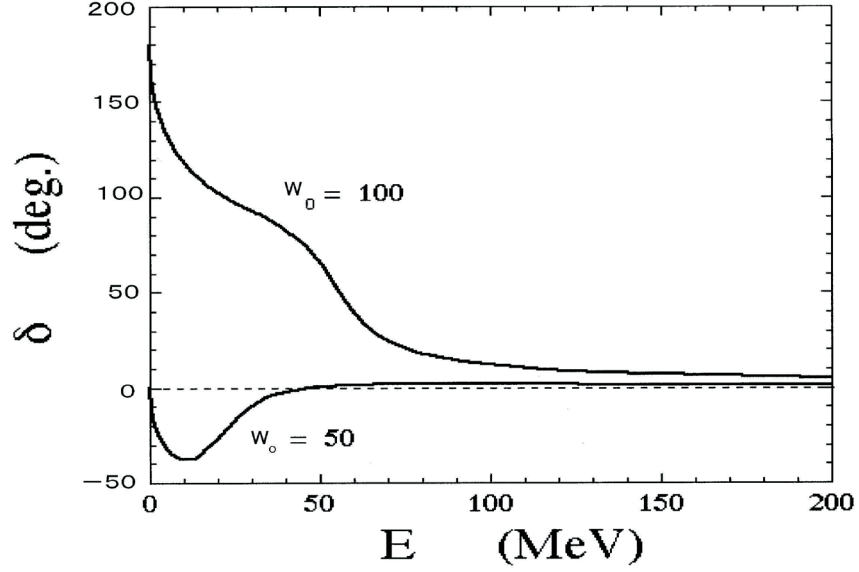


Fig. 1: Energy dependence of s-wave phase shift for the exponential potential. Here the numbers $W_0 = 100$ MeV and $W_0 = 50$ MeV to the curves are the depth of the imaginary exponential potential. The change of sign for phase shift occurs at about $E = 45$ MeV for the depth $W_0 = 50$ MeV. For $W_0 = 100$ MeV such a change of phase shift does not occur. In this figure the phase shift is shown up to 200 MeV.

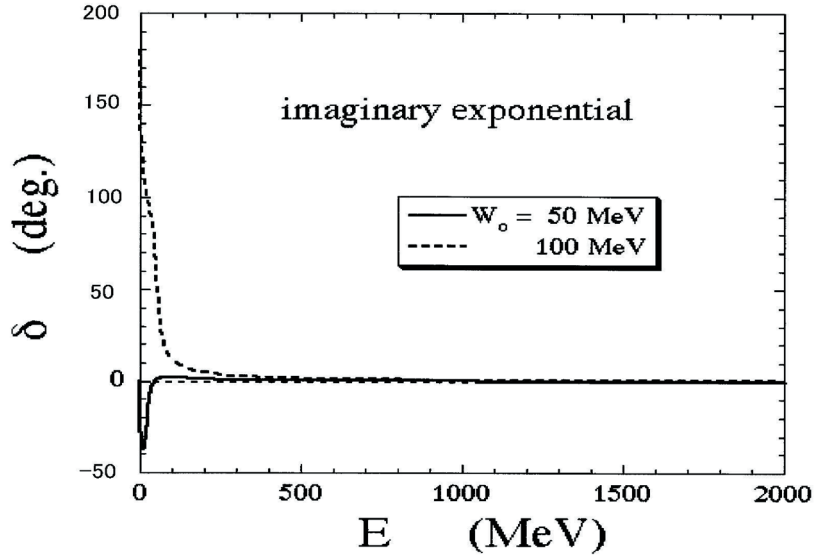


Fig. 2: Energy dependence of s-wave phase shift for the exponential potential. Here the numbers $W_0 = 100$ MeV and $W_0 = 50$ MeV to the curves are the depth of the imaginary exponential potential. The change of sign for phase shift occurs at about $E = 45$ MeV for the depth $W_0 = 50$ MeV. For $W_0 = 100$ MeV such a change of phase shift does not occur. In this figure the phase shift is shown up to 2 GeV.

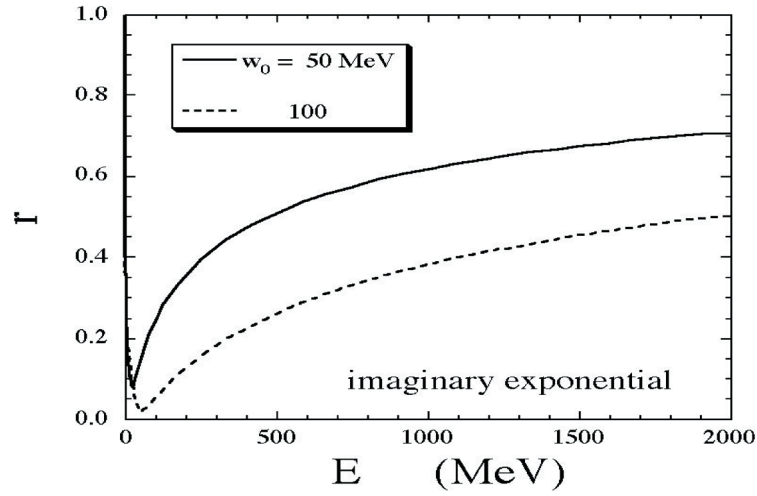


Fig. 3: Energy dependence of s-wave reflection parameter for the exponential potential. Here the numbers $W_0 = 100$ MeV and $W_0 = 50$ MeV to the curves are the depth of the imaginary exponential potential.

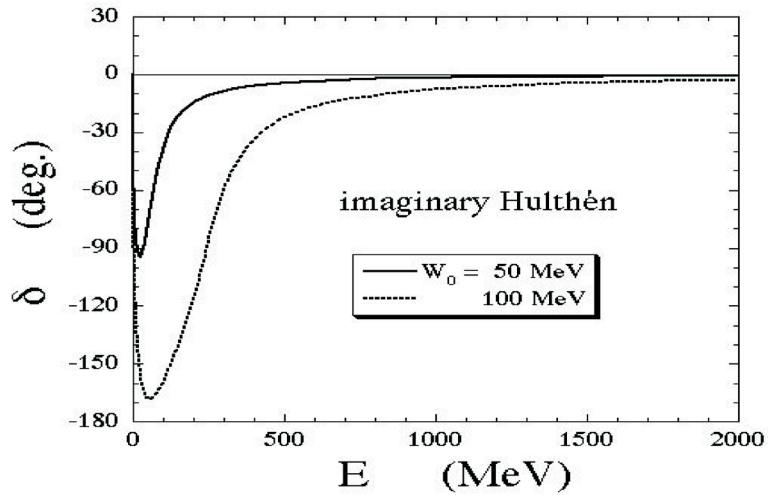


Fig. 4: Energy dependence of s-wave phase shift for the Hulthén potential. Here the numbers $W_0 = 100$ MeV and $W_0 = 50$ MeV to the curves are the depth of the imaginary exponential potential.

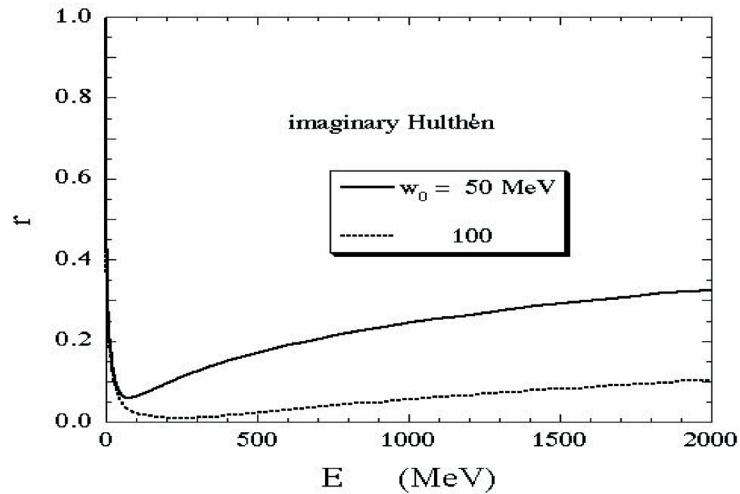


Fig. 5: Energy dependence of s-wave reflection parameter for the Hulthén potential. Here the numbers $W_0 = 100$ MeV and $W_0 = 50$ MeV to the curves are the depth of the imaginary exponential potential.

い。もし, unitarity を満たしたいならば、Born 近似を K 行列にとり S 行列を $S = \frac{1+iK}{1-iK}$ とすればよい。

Fig. 6 からわかるように phase shift は常に負で effective に斥力ポテンシャルの効果を示している。連続ポテンシャルの場合は phase shift の符号の変化が起こらないのではないかという推測はもともと Born 近似についての推測から来ているので、Yukawa ポテンシャルの 2 次の Born 近似に関する限りでは沢田の推測は確かに正しかった。しかし, s 波の厳密解がある指数型ポテンシャルにおいては phase shift の符号の変化が現れて来るので, 連続なポテンシャルにおいては phase shift の符号の変化はないという沢田の推測は一般的な意味では正しくはなかった。

3 Wigner の条件

前論文 [1] で計算された井戸型ポテンシャルに対する phase shift は明らかに Wigner の条件を満たしていなかった。そのことについていくつかの見解が考えられたが, 考察の結論は Wigner の条件を導く条件として, 散乱が完全弾性散乱の場合が考えられており, 私たちの計算ではこの条件が破れているので, Wigner の条件は適用できない。したがって, phase shift のエネルギー変化で Wigner の条件との矛盾はないことが結論される。また, Wigner の条件の一般化の可能性を調べたが, imaginary potential を導入する場合においては実質的な Wigner 条件に替わるべき条件は得ることができないと推測される。

以下に少し詳しく考察を述べよう。s 波の real phase shift δ_R の質量中心系での運動量 k

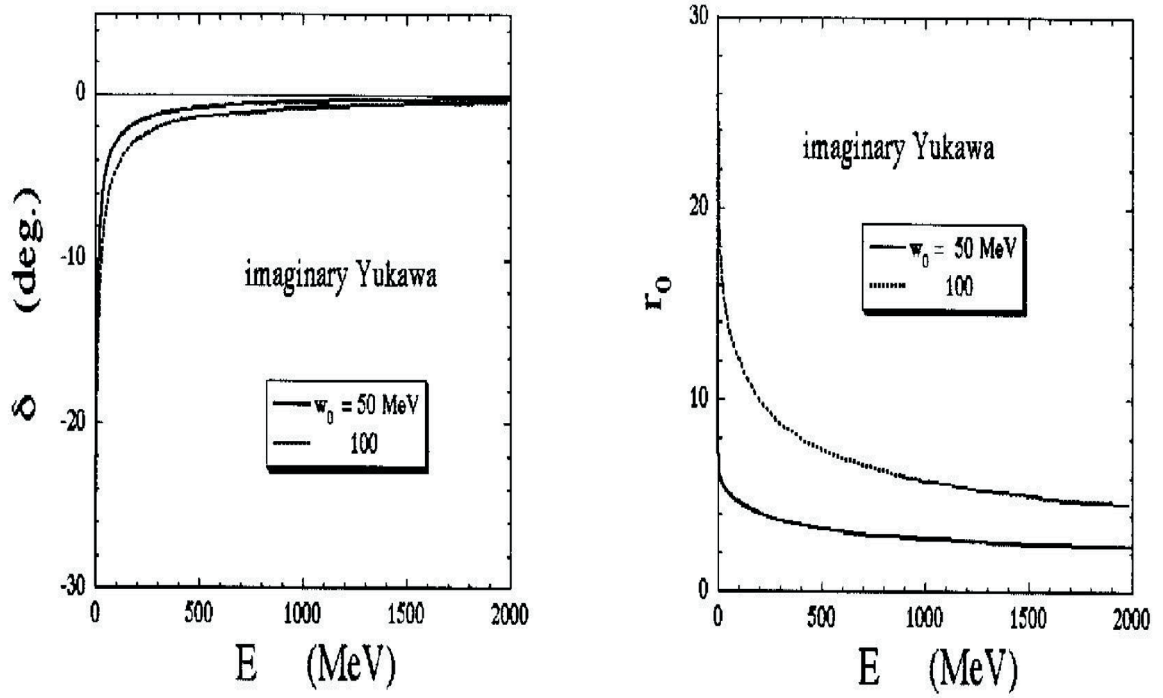


Fig. 6: Energy dependence of phase shift (a) and reflection parameter (b) in the 2nd Born approximation for the Yukawa potential.

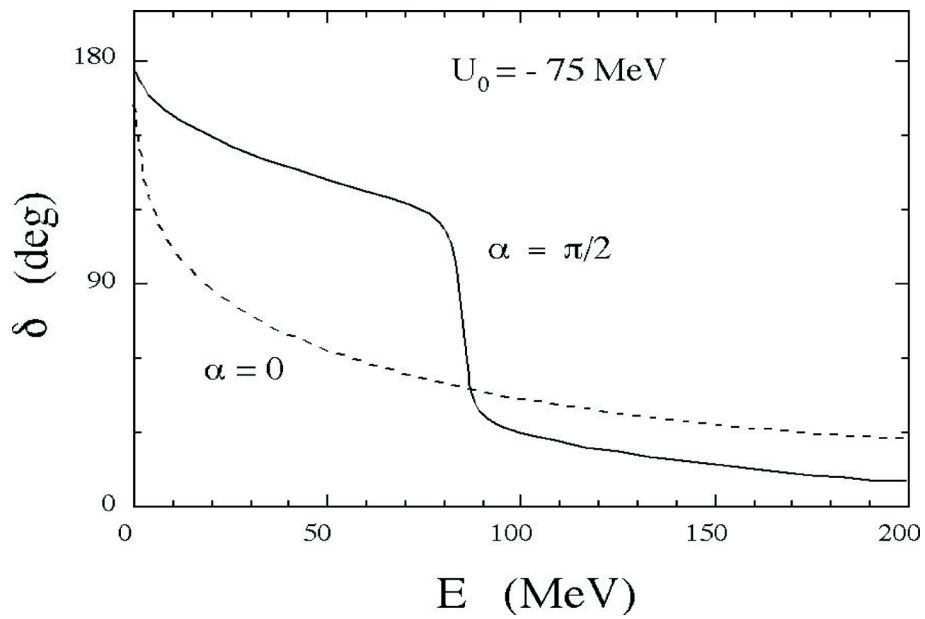


Fig. 7: The s-wave phase shift δ_0 for $U_0 = -75$ MeV.

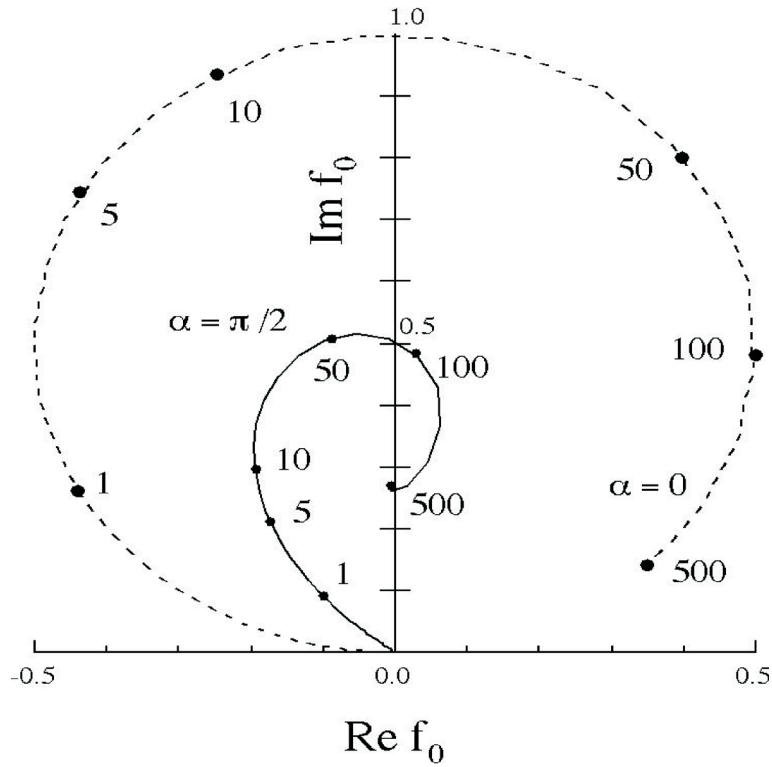


Fig. 8: The s-wave Argand diagram for $U_0 = -75$ MeV. The numbers attached to the curve are the values of energy in MeV.

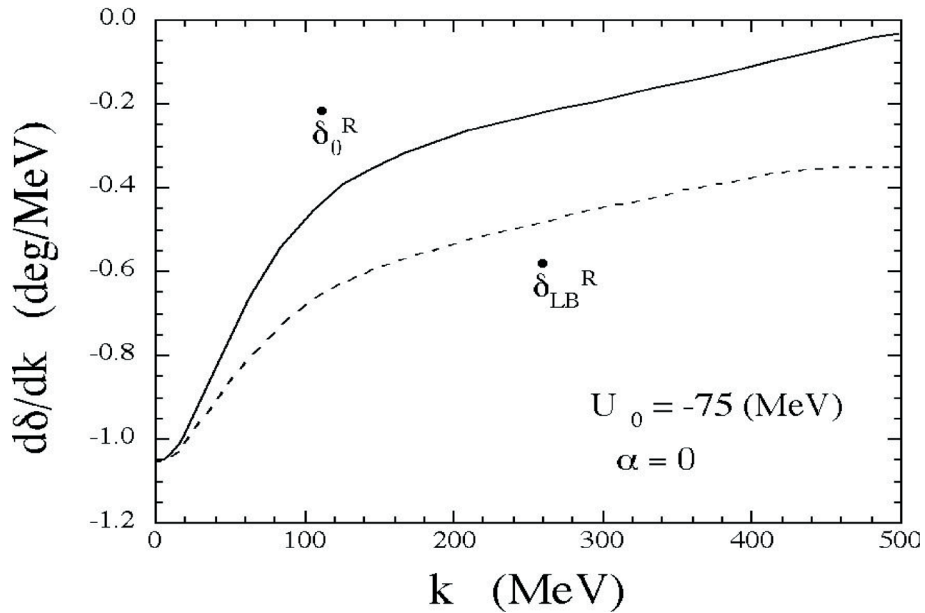


Fig. 9: The derivative of s-wave phase shift with k , $\dot{\delta}_0^R$ and “lower bound” $\dot{\delta}_{LB}^R$ for $U_0 = -75$ MeV with $\alpha = 0$.

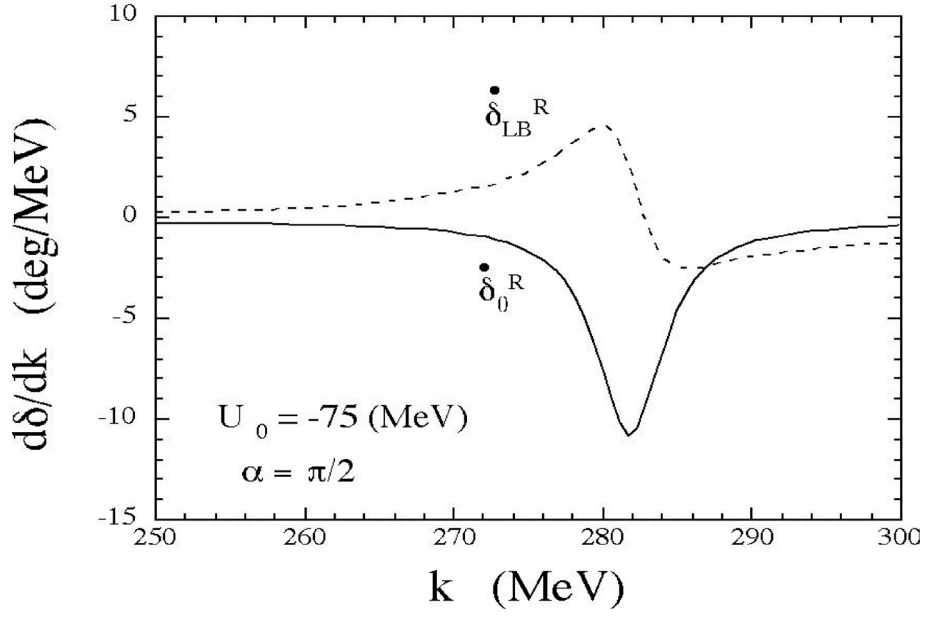


Fig. 10: The derivative of s-wave phase shift with k , $\dot{\delta}_0^R$ and “lower bound” $\dot{\delta}_{LB}^R$ for $U_0 = -75$ MeV with $\alpha = \alpha/2$. In this figure the range of momentum is taken from 250 to 300 MeV/c.

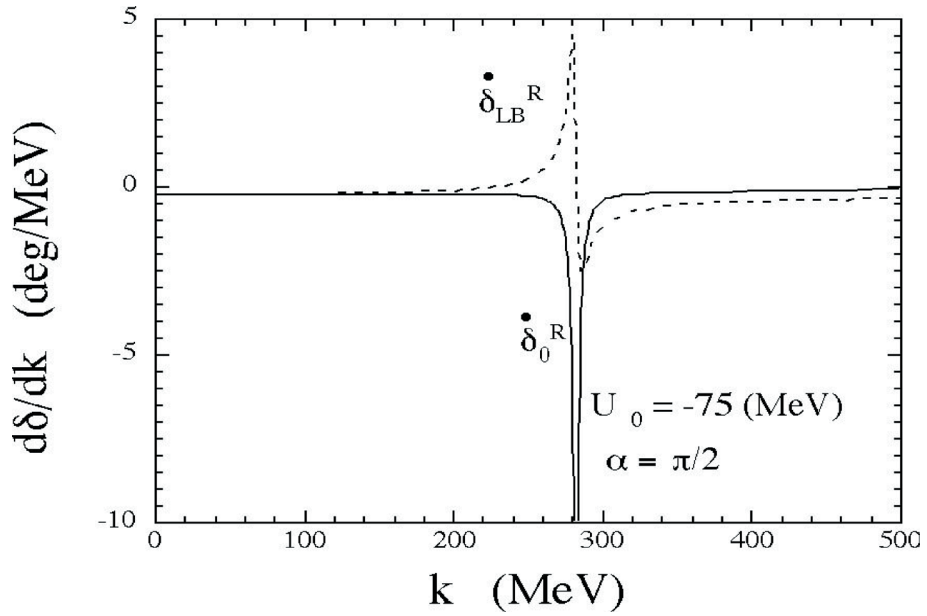


Fig. 11: The derivative of s-wave phase shift with k , $\dot{\delta}_0^R$ and “lower bound” $\dot{\delta}_{LB}^R$ for $U_0 = -75$ MeV with $\alpha = \alpha/2$. In this figure the range of momentum is taken from 0 to 500 MeV/c. We show in this figure the gross structure of $d\delta/dk$ given in Fig. 10.

に対する導関数は

$$\frac{d\delta_0^R}{dk} > -a + \frac{a}{2ka} \sin 2(\delta_0^R + ka) \quad (7)$$

である。ここで δ_0^R は s 波の phase shift である。これが s 波に対する Wigner 条件である [3]。上の不等式の右辺の第 1 項 $-a$ は Laplace の意味での因果律を表している。この関係は散乱が弾性散乱であるとき、すなわち S 行列がユニタリー $|S| = 1$ にのみ成り立っている。これは Wigner の (7) 式の導出の仕方を調べてみると明らかであるが、また (7) 中に吸収の効果を表す因子がないことからも了解される。

さて、そうだとすると吸収の効果があるときに (7) のような式を得ることができるかどうか問題であろう。このことを Wigner の導出法にしたがって調べてみよう。

力が働かない領域 $r > a$ での波動関数は

$$r\psi = I(r) - e^{i\delta} I^*(r) \quad (8)$$

ここで、 $I(r)$ は入射球面波の動径部分を表し、 $I^*(r)$ は対応した球面発散波を表しており、星印 $*$ は複素共役を表す。phase shift δ は複素数となり、 $\delta = \delta^R + i\delta^I$ と表される。波動関数を

$$I(r)I'(r)^* - I^*(r)I'(r) = 2i \quad (9)$$

となるように規格化する。ここでプライム (prime) は r に対する導関数を表す。

$r = a$ での ψ の対数微分の逆数 R は

$$R = \frac{I - e^{2i\delta} I^*}{I' - e^{2i\delta} I'^*} \quad (10)$$

ここで、変数 r のない I, I' 等は $r = a$ での値である。したがって、

$$e^{2i\delta} = (I - I'R)(I^* - I'^*R)^{-1} \quad (11)$$

Wigner の取り扱いでは R を multi-channel 行列として非弾性効果を取り入れているが、ここでは R を単一 channel として非弾性効果は複素 phase shift をとることによって考慮している。(11) から real phase shift と imaginary phase shift の運動量による変化はそれぞれ

$$\begin{aligned} \frac{d\delta_0^R}{dk} \equiv \dot{\delta}^R &= \frac{1}{2} \text{Re}[\dot{I}'I^* - \dot{I}I'^*] + \frac{1}{4} \text{Re}[(\dot{I}'I' - \dot{I}'I)e^{-2i\delta}] + \frac{1}{4} \text{Re}[(\dot{I}^*I'^* - \dot{I}^*I^*)e^{2i\delta}] \\ &+ \text{Re}\left[\frac{\dot{R}}{(I - I'R)(I^* - I'^*R)}\right] \end{aligned} \quad (12)$$

$$\frac{d\delta_0^I}{dk} \equiv \dot{\delta}^I = \frac{1}{4} \text{Im}[(\dot{I}'I' - \dot{I}'I)e^{-2i\delta}] + \frac{1}{4} \text{Im}[(\dot{I}^*I'^* - \dot{I}^*I^*)e^{2i\delta}] + \text{Im}\left[\frac{\dot{R}}{(I - I'R)(I^* - I'^*R)}\right] \quad (13)$$

で与えられる。

s 波に対しては $I_0(r) = k^{-1/2}e^{ikr}$ であるから、(12) は

$$\dot{\delta}_0^R = -a + \frac{a}{4ka} \left(\frac{1}{r} + r\right) \sin 2(\delta_0^R + ka) + \text{Re}\left[\frac{\dot{R}}{(I - I'R)(I^* - I'^*R)}\right] \quad (14)$$

ここで, $r \equiv |S_0| = e^{-2i\delta_0^I}$ である。弾性散乱の場合には因果律の議論から \dot{R} が正であることが示されるので, (7) の不等式が得られる。しかし, 入射粒子束の吸収が起こる場合の議論はされていない。

このような unitarity を満たしている場合とは違うアプローチをしよう。(12) 式は Schrödinger 方程式に対しては恒等式のようなものである。したがって, \dot{R} の符号を Schrödinger 方程式の解を使って optical model の場合に調べてみよう。一つでも \dot{R} の符号が正であることに反する結果が得られれば, $\frac{d\delta_0^R}{dk}$ の下限がないことがいえるであろう。

このいわゆる“下限”を (7) の一般化として

$$\dot{\delta}_{LB}^R \equiv -a + \frac{a}{4ka} \left(\frac{1}{r} + r \right) \sin 2(\delta_0^R + ka) \quad (15)$$

と定義する。これはもし \dot{R} が正定値であれば, 下限である。

同じ質量 m をもつ 2 つの粒子の散乱に対する Schrödinger 方程式の解を調べよう。ポテンシャル V を便宜上

$$V(r) = e^{i\alpha} V_0(r) \quad (16)$$

とする。ここで, V_0 はある実のポテンシャルとし, α は実数の位相因子とする。 V_0 に対して次のような井戸型ポテンシャルを仮定する。

$$\begin{aligned} V_0(r) &= U_0 \quad r \leq a, \\ &= 0 \quad r > a. \end{aligned} \quad (17)$$

ここで U_0 は負の定数である。井戸型ポテンシャルの部分波の解はあらすじを前論文 [1] で示してあるが, 大抵の量子力学の書物にも出ている。

深さ $U_0 = -75 \text{ MeV}$ で到達距離 $a = 1/140 (\text{MeV})^{-1}$ の井戸型ポテンシャルを考え, 粒子の質量を $m = 938 \text{ Mev}$ としよう。

$\alpha = 0$ と $\pi/2$ の解を Fig. 7-10 に示す。ここで, エネルギー E は $E = k^2/2m$ である。 $\alpha = 0$ に対しては Wigner の上限を満たしていることがわかる。 $\alpha = \pi/2$ に対しては $E = 85 \text{ MeV}$ の近くで異常に大きな $|\dot{\delta}_0^R|$ を示し, δ_0^R は $\pi/2$ をよこぎっている。(15) 式で与えた一般化された下限 $\dot{\delta}_{LB}^R$ の計算値は下限としては役に立たないことが示された。ということは吸収がある場合には \dot{R} はもはや正定値ではないことを示している。reflection parameter r が 0 に近づくととき正弦関数は -1 の値をとるので, 現象論的に見ると下限 (15) の下方の極限は $-\infty$ である。したがって, optical model 型の吸収があるときには \dot{R} がどうであろうと意味をもつ phase shift の運動量での導関数を与えることはできない。

4 Levinson の定理と擬似束縛状態

ポテンシャルが虚数部を含むときに, 弾性散乱の位相の変化に対して Levinson の定理を一般化できれば興味深いであろう。しかし, これは単に理論的な意味の上であって実際上の意味はあまりない。実ポテンシャルについて Levinson の定理では

$$\delta^R(E = \infty) - \delta^R(E = 0) = n_b \pi \quad (18)$$

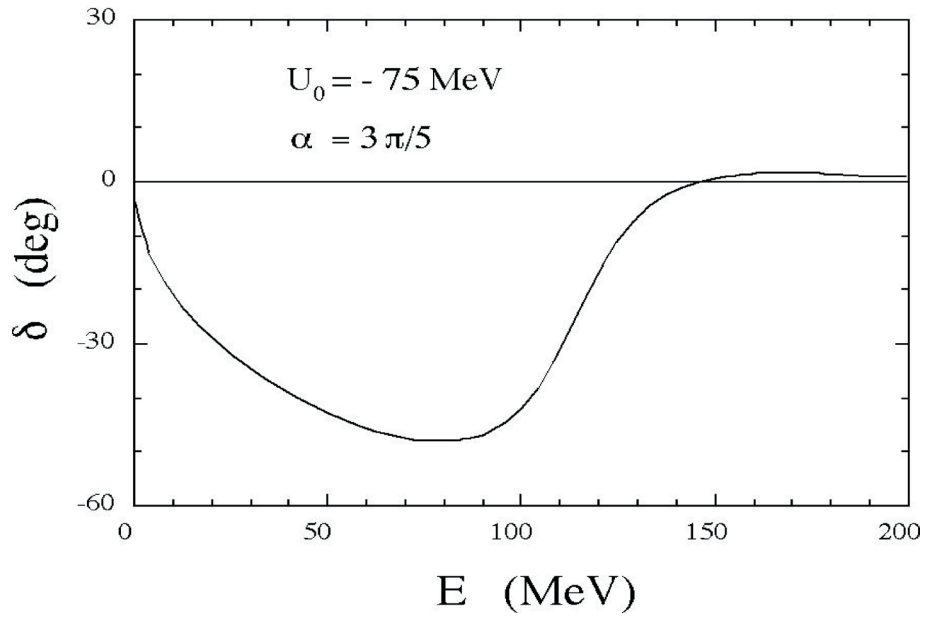


Fig. 12: The s-wave phase shift δ_0 for $U_0 = -75$ MeV with $\alpha = 3\pi/5$ up to 200 MeV.

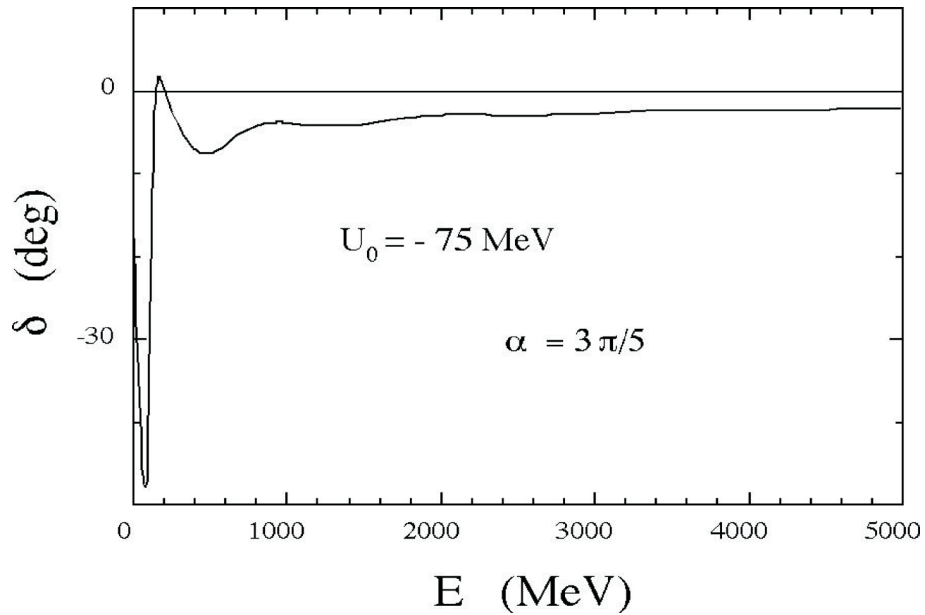


Fig. 13: The s-wave phase shift δ_0 for $U_0 = -75$ MeV with $\alpha = 3\pi/5$ up to 5 GeV.

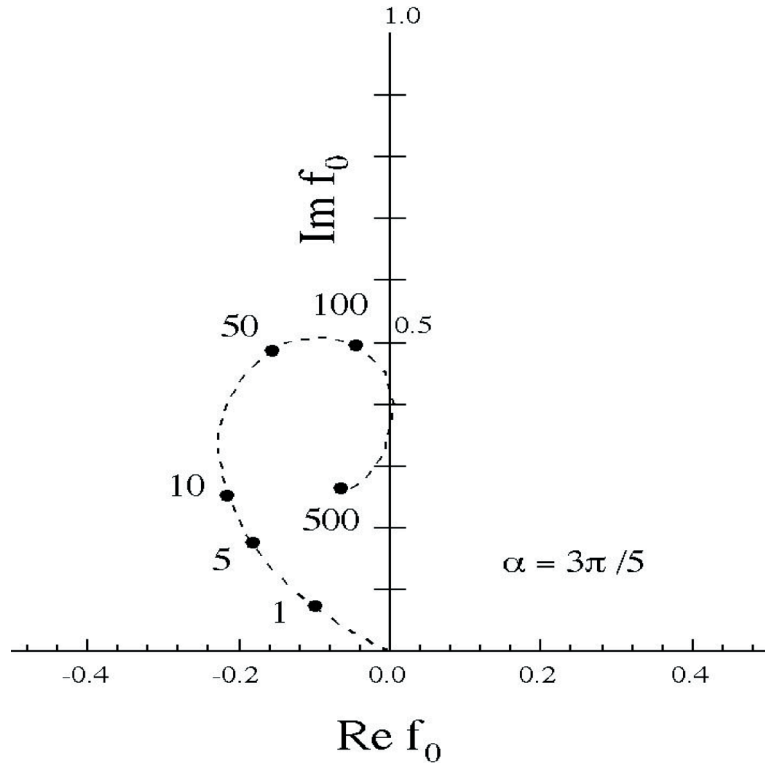


Fig. 14: The s-wave Argand diagram for $U_0 = -75$ MeV with $\alpha = 3\pi/5$. The numbers attached to the curve are the values of energy E in MeV.

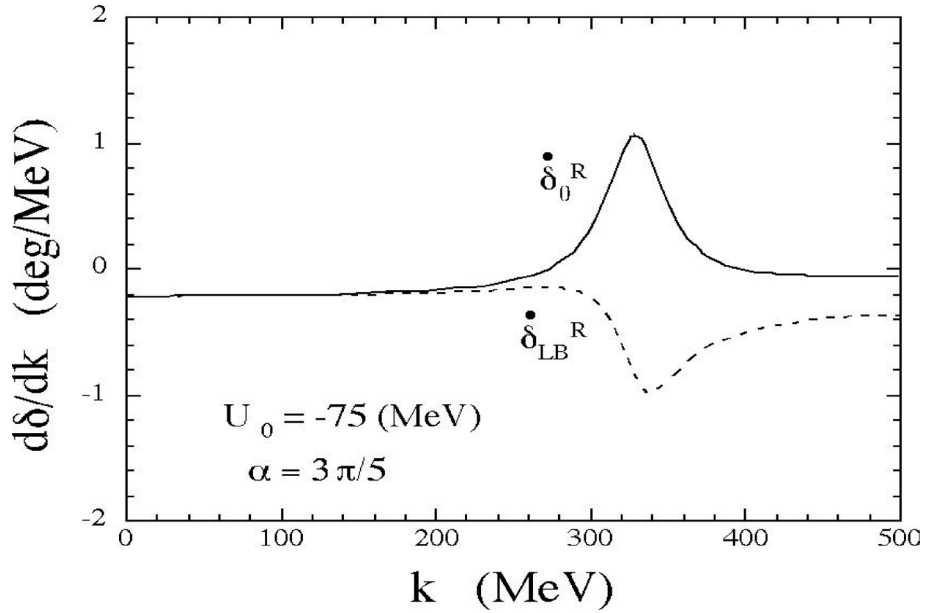


Fig. 15: The derivative of s-wave phase shift with k , $\dot{\delta}_0^R$, and the “lower bound” $\dot{\delta}_{LB}^R$ for $U_0 = -75$ MeV with $\alpha = 3\pi/5$.

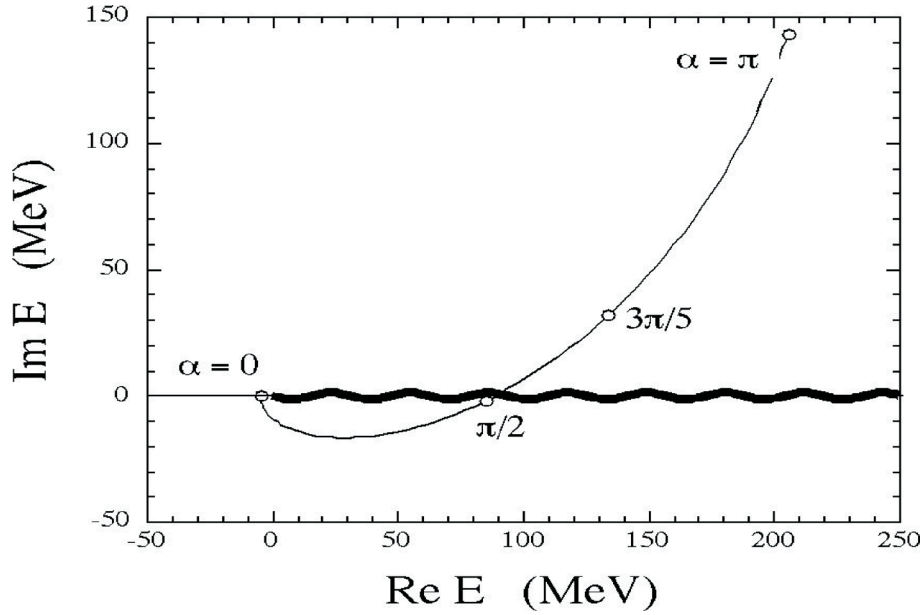


Fig. 16: The s-wave pole trajectory on the complex energy plane for $U_0 = -75$ MeV with α changing from 0 to π . The thick wavy line indicates the cut.

である。ここで、 E は粒子の入射エネルギーであり、 n_b は束縛状態の数である。

負のエネルギー $E < 0$ に対してポテンシャルが虚部を持てば、複素ポテンシャルにおいては一般に安定な束縛状態は現れない。したがって、Levinson の定理の一般化とは n_b が束縛状態と複素エネルギー平面での physical sheet の下半面 ($\text{Im}k > 0$) に現れる pole (極) との数の和である。下半面上のこれらの pole は擬束縛状態 (pseudo bound state) と呼んでもいい。それらは虚数ポテンシャルによって負の実軸から正の実軸へと移っていくからである。

$\alpha = 0$ に対する s 波の解では 1 個の束縛状態を負の実軸上にもっている。一方、 $\alpha = \pi/2$ に対しては physical sheet の下半面に擬束縛状態が 1 個現れる。Fig.1-4a に示された、これらの α の値に対する解は確かに $\delta^R(E = \infty) - \delta^R(E = 0) = \pi$ という条件にあっている。

$\alpha = 3\pi/5$ のときには s 波の部分波振幅が Figs. 11-15 に示される。このときには phase shift は $\delta^R(E = \infty) - \delta^R(E = 0) = 0$ にあっている。Fig. 12 に複素エネルギー平面上の pole の軌跡を示している。この軌跡は負の実軸上にある $\alpha = 0$ に対応した束縛状態の pole から出発して、 α の値を $\alpha = \pi$ まで変えている。図から軌跡は α の値が $\pi/2$ のわずかに上で unphysical sheet の上半面に移動している。その場合にはもはや physical sheet の下半面には擬束縛状態の pole はなく、 $\alpha = 3\pi/5$ の結果は、このわれわれの推測を支持している。

部分波振幅 $f_0 = (S_0 - 1)/2i$ は $\alpha = \pi/2$ のときに、点 $(\text{Re}f_0, \text{Im}f_0) = (0.5, 0)$ の上方を通過しており、 $\alpha = 3\pi/5$ のときには同じ点の下を通過している。このことは α が $\pi/2$ から $3\pi/5$ へと変化するとき、擬束縛状態の pole が physical sheet の下半面から unphysical sheet の上半面へと移動するので、physical sheet の上半面での S 行列要素のゼロ点が実のエネルギー軸を上から下へと unphysical sheet の下半面へ向かって横切っているという事実を反映している。複素ポテンシャルに対する、これらの pole とゼロ点との振舞は始めの実ポテンシャルの性質を反映している。

5 結言

この論文では3つのことについて議論した。第1に純虚数ポテンシャルが連続でも phase shift の符号の変化があり、したがって沢田の推測は一般的には正しくない。第2に Wigner の phase shift の運動量変化の下限条件は虚数ポテンシャルのときには成立しない。第3に純虚数ポテンシャルでは安定な束縛状態の pole は存在しないが、擬束縛状態というべき pole が存在する。しかし、実ポテンシャルと虚ポテンシャルの割合が変わるとその pole の位置が移動していき、 $\alpha = \pi/2$ より少し大きくなったところでこのような擬束縛状態は存在しなくなる。このことは $\alpha = 3\pi/5$ での phase shift が $\delta(E = \infty) - \delta(E = 0) = 0$ を満たすことからわかる。ここで行ったと同じような議論を単純化した 2 channel の Schrödinger 方程式に対しても行うことは今後の問題として残される。

参考文献

- [1] 矢野 忠, 和田 武, 広重 昇, 江沢康生: 吸収の real phase shift への効果再論, 工学ジャーナル, 第4巻, pp.47-56, 2005.
- [2] S. Sawada: private communication
- [3] E. Wigner: Lower Limit for the Energy Derivative of the Scattering Phase Shift, Phys. Rev., **98**,1, pp.145-147, 1955.
- [4] Ref [1] pp.51-53.
- [5] G. Hida and T. Yano: Effects of Absorption on the Real Phase shift, Prog. Theor. Phys., **36**, 3, pp.658-659, 1966.
- [6] G. Hida, S. Sawada, T.Yano and M.Yonezawa: Hrad Core and Absorption in a Two-channel Model for Proton-Proton Collision, Prog. Theor. Phys., **37**,4, pp.692-701, 1967.
- [7] M. L. Goldberger and K. M. Watson: *Collision Theory*, pp. 256-258, Dover, 2004.
- [8] R. G. Newton: *Scattering Theory of Waves and Particles*, pp. 421-422, Dover, 2002.