工学ジャーナル　第 7 巻
2008 年 3 月

ランダムな δ 型磁場を持つシュレーディンガー作用素のスペクトルについて

The spectrum of Schrödinger operators with random δ magnetic fields

野村 祐司*

Yuji NOMURA*

Abstract: We shall consider the Schrödinger operators on $\mathbf{R}^2$ with the magnetic field given by a non-negative constant field plus random δ magnetic fields of the Anderson type or of the Poisson-Anderson type. We shall investigate the spectrum of these operators by the method of the admissible potentials by Kirsch–Martinelli [23]. Moreover, we shall prove the lower Landau levels are infinitely degenerated eigenvalues when the constant field is sufficiently large, by estimating the growth order of the eigenfunctions using the entire function theory by Levin [25]. This article is based on the joint work with Takuya Mine(Kyoto Institute of Technology).

Key words: random magnetic field, spectrum, Landau level.

1. 緒言

δ 型の磁場は，物理学者の Aharonov–Bohm [1] によって研究されて以来，Aharonov-Bohm 磁場と呼ばれる．Aharonov-Bohm 効果との関係もあり，この磁場について多くの研究がなされてきた（ Ruijsenaars [33], Nambu [29], Ito-Tamura [21], およびそこにある文献を参照されたい）．特に Geyler–Grishanov [19] および Geyler–Šťovíček [20] においては、δ 型磁場を持つ 2 次元のパウリ作用素の zero-mode の無限次の縮退について調べられている．峯拓矢は [27] において，一様磁場と有限個の δ 型磁場，あるいは間隔の開いた δ 型磁場を持つシュレーディンガー作用素のスペクトルの構造を調べた．一方我々は [28] において周期的な δ 型磁場を持つ場合について研究した．そこで本論説においては，δ 型磁場の位置がランダムな場合，および磁場の強さがランダムな場合のシュレーディンガー作用素の基本的なスペクトルの構造について述べたい．この系に関しては、いくつかの物理学における論文 [16, 17, 10, 11, 12] でも扱われている．

$\mathbf{R}^2$ 上の微分作用素 $\mathcal{L}_\omega$ を

$$\mathcal{L}_\omega = \left(\frac{1}{i}\nabla + \mathbf{a}_\omega\right)^2$$

と定義する．ここで ω は確率空間 Ω の要素であり，$\mathbf{a}_\omega$ は磁場ベクトルポテンシャルである．ベクトルポテンシャル $\mathbf{a} = (a_x, a_y)$ に対応する磁場は

$$\operatorname{curl}\mathbf{a} = \partial_x a_y - \partial_y a_x$$

によって超関数の意味で定義される．

* 愛媛大学大学院 理工学研究科 電子情報工学専攻 情報工学コース
* Department of Computer Science, Graduate School of Science and Engineering, Ehime University, 3 Bunkyo-cho, Matsuyama, Ehime 790-8577, Japan.
email: nomura@cs.ehime-u.ac.jp

平成 19 年 8 月 31 日 受付 , 平成 19 年 11 月 7 日 受理

本論説において扱われる磁場 $\operatorname{curl}\mathbf{a}_\omega$ は，以下で定義されるものである：

$$\operatorname{curl}\mathbf{a}_\omega(z) = B + \sum_{\gamma\in\Gamma_\omega} 2\pi\alpha_\gamma(\omega)\delta(z-\gamma) \tag{1}$$

ここで B は非負の定数であり，Γ_ω は $\mathbf{R}^2$ における離散集合, $\alpha_\gamma(\omega)$ は $[0,1)$ に値をとり, δ は原点における Dirac 測度である．$\alpha_\gamma(\omega)$ の整数の差はゲージ変換によって取り除くことができるので，$\alpha_\gamma(\omega)$ が $[0,1)$ に値をとるという仮定は一般性を失わないことに注意する．

2. δ 型ランダム磁場

本論説においては，以下の二つの場合を扱う．

(i) **アンダーソン タイプ ランダム δ 型磁場.**
集合 Γ_ω はランク 2 の格子 Γ で ω とは独立であるとする，即ち

$$\Gamma_\omega = \Gamma = \mathbf{Z}e_1 \oplus \mathbf{Z}e_2$$

となる線形独立なベクトル e_1, e_2 が存在すると仮定する．確率変数 $\{\alpha_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ は独立同分布であり，その分布を

$$\mu = \mathbf{P}\circ\alpha_\gamma^{-1}$$

と表す．ここで $\mathbf{P}$ は確率空間 Ω 上の確率測度であり，μ は γ に依らない．$\operatorname{supp}\mu = \{0\}$ の場合は自明であるので，

$$\operatorname{supp}\mu \neq \{0\} \tag{2}$$

と仮定する．

$$\bar{\alpha} = \mathbf{E}[\alpha_\gamma], \quad p = \mathbf{P}\{\alpha_\gamma \neq 0\} \tag{3}$$

と表すことにする．ここで $\mathbf{E}[X]$ は確率変数 X の期待値を表す．$\{\alpha_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ は同分布であるので，$\bar{\alpha}$ および p という値は γ に依らない．

(ii) **ポアソン-アンダーソン タイプ ランダム δ 型磁場**
集合 Γ_ω を平均測度 $\rho dxdy$ のポアソン彷徨測度の台とする．ここで ρ は正の定数である（ポアソン彷徨測度については Reiss [31] または Ando–Iwatsuka–Kaminaga–Nakano [3] を参照）．$\{\alpha_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma_\omega}$ は (2) を満たす分布測度 μ を持つ独立同分布な確率変数であり，それらは Γ_ω とは独立であるとする．また (3) と同じ記号を使うこととする．

(1) を満たすベクトルポテンシャル $\mathbf{a}_\omega$ は次のように構成される．以下，$z=(x,y)\in\mathbf{R}^2$ と 複素数 $z=x+iy\in\mathbf{C}$ を同一視し，$L^2(\mathbf{R}^2)=L^2(\mathbf{R}^2;dxdy)$ を $L^2(\mathbf{C})=L^2(\mathbf{C};dxdy)$ とみなすことにする．

$$\phi_\omega(z) = \frac{B\bar{z}}{2} + \frac{\alpha_0(\omega)}{z} + \sum_{\gamma\in\Gamma_\omega\setminus\{0\}} \alpha_\gamma(\omega)\left(\frac{1}{z-\gamma}+\frac{1}{\gamma}+\frac{z}{\gamma^2}\right) \tag{4}$$

とし（ただし，$0\notin\Gamma_\omega$ ならば $\alpha_0(\omega)=0$ とする），

$$\mathbf{a}_{\phi_\omega}(z) = (\operatorname{Im}\phi_\omega(z), \operatorname{Re}\phi_\omega(z))$$

とすると，

$$\operatorname{curl}\mathbf{a}_\omega(z) = B + \sum_{\gamma\in\Gamma_\omega} 2\pi\alpha_\gamma(\omega)\delta(z-\gamma)$$

が超関数の意味で成り立つことが分かる．

微分作用素 $\mathcal{L}_\omega$ の Friedrichs 拡張として，ヒルベルト空間 $L^2(\mathbf{R}^2)$ 上の自己共役作用素 H_ω を定義する．エルゴード理論により ω と独立な $\mathbf{R}$ 上の閉集合 Σ で，確率 1 で

$$\sigma(H_\omega) = \Sigma \tag{5}$$

が成り立つものが存在する．ここで $\sigma(H_\omega)$ は作用素 H_ω のスペクトルである．また，不等式

$$H_\omega \geqq B$$

により

$$\Sigma \subset [B, \infty) \tag{6}$$

がわかる．一様磁場を持つシュレーディンガー作用素 H_0 を以下の作用素 L_0 の Friedrichs 拡張として定義しよう．

$$L_0 = \left(\frac{1}{i}\nabla + \mathbf{a}_0\right)^2, \ \mathbf{a}_0 = \left(-\frac{By}{2}, \frac{Bx}{2}\right), \ D(L_0) = C_0^\infty(\mathbf{R}^2).$$

ここで $D(L_0)$ は作用素 L_0 の定義域であり，$C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$ は $\mathbf{R}^2$ にコンパクトな台を持つ ∞ 階微分可能な関数の全体の集合を表す．H_0 のスペクトルはよく知られている：

$$\sigma(H_0) = \begin{cases} [0,\infty) & (B=0), \\ \bigcup_{n=1}^\infty \{E_n\} & (B>0). \end{cases}$$

ここで $E_n = (2n-1)B$ はランダウ準位と呼ばれる．$B > 0$ のとき，ランダウ準位は全て無限次に縮退した固有値となる．

3. 主結果

まずアンダーソン タイプ についての結果を述べる．以下では $\lambda \in \mathbf{R}$ と自己共役作用素 H に対して，

$$\mathrm{mult}(\lambda; H) = \dim \mathrm{Ker}(H - \lambda)$$

と表すことにする．

Theorem 0..1 $\mathbf{a}_\omega$ をアンダーソン タイプ とする．このとき以下が成り立つ：

(i)
$$\mathrm{supp}\,\mu \cap (\{0\} \cup \{1\}) \neq \emptyset \tag{7}$$

とすると，$\Sigma \supset \sigma(H_0)$ が成り立つ．特に， $B = 0$ であるならば

$$\Sigma = [0, \infty)$$

となる．

(ii)
$$\mathrm{supp}\,\mu \cap (\{0\} \cup \{1\}) = \emptyset \tag{8}$$

かつ $B = 0$ であるとすると，

$$\inf \Sigma > 0$$

となる．

(iii) $n \in \mathbf{N} = \{1, 2, \ldots\}$ に対して, 確率 1 で

$$\mathrm{mult}(E_n; H_\omega) = \infty \mathrm{if}\ \frac{B|\mathcal{D}|}{2\pi} + \bar{\alpha} > np,$$
$$\mathrm{mult}(E_1; H_\omega) = 0 \mathrm{if}\ \frac{B|\mathcal{D}|}{2\pi} + \bar{\alpha} < p$$

が成り立つ．ここで $\mathcal{D}$ は Γ の基本領域であり、

$$\mathcal{D} = \left\{ se_1 + te_2 \mid -\frac{1}{2} \leqq s < \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2} \leqq t < \frac{1}{2} \right\}$$

と与えられ， $|\mathcal{D}|$ は $\mathcal{D}$ の面積である．

(iv) (8) および $B > 0$ とする．$R = \min_{\gamma \in \Gamma, \gamma \neq 0} |\gamma|$ とし，$\alpha_- = \inf \operatorname{supp} \mu$，$\alpha_+ = \sup \operatorname{supp} \mu$ と定義する．このとき任意の $n_0 \in \mathbf{N}$ に対して, n_0, α_-, α_+ のみによる定数 $C > 0$ と $c > 0$ が存在して，以下が成り立つ：もし $BR^2 \geqq C$ ならば, 最初から n_0 番目までのランダウ準位 $E_1, \ldots, E_{n_0}$ は，確率 1 で孤立した無限次に縮退した H_ω の固有値であり，

$$\Sigma \cap [B, E_{n_0+1}) = \bigcup_{n=1}^{n_0} \{E_n\} \cup S_n$$

が成り立つ．ただし S_n は $\mathbf{R}$ の閉集合で

$$S_n \subset \bigcup_{\alpha \in \operatorname{supp} \mu} [E_n + (2\alpha - e^{-cBR^2})B, E_n + (2\alpha + e^{-cBR^2})B]$$

を満たす.

磁場 $\operatorname{curl} \alpha_\omega$ が周期関数の時には，同様の結果が得られている ((ii) については [26, Proposition 7.7], (iii) および (iv) については [28, Theorem 1.1] を参照)．上の定理の (iii) および (iv) は，次のことを主張する：よりエネルギーの低いランダウ準位は，δ 型の摂動に関して、たとえそれがランダムであっても安定な傾向にある．また上の結果を，滑らかなポテンシャルの場合の結果 (Zak [34], Dinaburg–Sinai–Soshnikov [14]) と比べることは興味深い．この場合には, ランダウ準位は広がってしまい，その中心には連続スペクトルが出現すると信じられている．

次にポアソン-アンダーソン タイプ の結果を述べよう．以下，$[x]$ は x の整数部分を表し，$\operatorname{frac}(x)$ は x の少数部分（即ち $\operatorname{frac}(x) = x - [x]$) を表す.

Theorem 0..2 $\mathbf{a}_\omega$ をポアソン-アンダーソン タイプとする．このとき以下が成り立つ：

(i) $\Sigma \supset \sigma(H_0)$．特に， $B = 0$ ならば, $\Sigma = [0, \infty)$.

(ii) $B > 0$ とする．

$$F = \{\operatorname{frac}(\alpha_1 + \cdots + \alpha_m) \mid \alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \operatorname{supp} \mu,\ m \in \mathbf{N}\} \tag{9}$$

とする．このとき

$$\Sigma \supset \bigcup_{n=1}^{\infty} (E_n + 2BF) \tag{10}$$

が成り立つ．ここで $E_n + 2BF = \{E_n + 2B\alpha \mid \alpha \in F\}$ である．特に，F が $[0, 1)$ で稠密であれば,

$$\Sigma = [B, \infty) \tag{11}$$

が成り立つ.

(iii) 確率 1 で

$$\operatorname{mult}(E_n; H_\omega) = \infty \text{if } \frac{B}{2\pi\rho} + \bar{\alpha} > np,$$
$$\operatorname{mult}(E_1; H_\omega) = 0 \text{if } \frac{B}{2\pi\rho} + \bar{\alpha} < p$$

が成り立つ.

「F が $[0,1)$ で稠密」という仮定は，μ の台が無理数を含むか，または無限集合であれば成り立つ．よって (11) が主張することは，ほとんどの場合スペクトル $\sigma(H_\omega)$ は可能なエネルギーの範囲を全て埋める．(11) は一般的に (即ち有理数の有限集合の場合にも) 成り立つと思われるが，現段階では証明されていない．主張 (iii) は Theorem 0..1 の (iii) に対応している，なぜなら $1/\rho$ が平均測度 $\rho dxdy$ のポアソン点分布の”基本領域”の面積とみなせるからである（すなわち $|\mathcal{D}| = 1/\rho$ とすると $\mathbf{E}[\#(\Gamma. \cap \mathcal{D})] = 1$).

証明のアイデアを述べよう．微分作用素 $\mathcal{A}_\phi$ および $\mathcal{A}_\phi^\dagger$ を

$$\mathcal{A}_\phi = 2\partial_z + \phi(z), \quad \mathcal{A}_\phi^\dagger = -2\partial_{\bar{z}} + \overline{\phi(z)}, \tag{12}$$

と定義する．ここで $\partial z = (\partial_x - i\partial_y)/2$, $\partial \bar{z} = (\partial_x + i\partial_y)/2$ である．また

$$\mathcal{L}_\phi = \left(\frac{1}{i}\nabla + \mathbf{a}_\phi\right)^2,$$

$$\mathbf{a}_\phi(z) = (\operatorname{Im}\phi(z), \operatorname{Re}\phi(z))$$

とすると，これらの作用素は次の正準交換関係

$$\mathcal{L}_\phi = \mathcal{A}_\phi^\dagger \mathcal{A}_\phi + B = \mathcal{A}_\phi \mathcal{A}_\phi^\dagger - B$$

を，$\mathcal{D}'(\mathbf{C} \setminus \Gamma)$ 上の作用素として満たす．これを $\phi(z) = \phi_\omega(z)$ の場合に適用し，ランダウ準位に対応する一般化固有関数を具体的に求める．これに拡張した Levin の整関数の理論を用いて，この一般化固有関数の増大度を精密に調べることにより，$L^2(\mathbf{R}^2)$ 固有関数であるかどうかを判定し，ランダウ準位が無限次に縮退した固有値であるか否かを導く．

参考文献

[1] Y. Aharonov and D. Bohm, Significance of electromagnetic potentials in the quantum theory, *Phys. Rev.* **115** (1959) 485–491.

[2] S. Albeverio, F. Gesztesy, R. Høegh-Krohn and H. Holden, *Solvable models in quantum mechanics*, Springer-Verlag, New York, 1988.

[3] K. Ando, A. Iwatsuka, M. Kaminaga and F. Nakano, The spectrum of Schroedinger operators with Poisson type random potential, *Ann. Henri Poincare'* **7** (2006), no. 1, 145–160.

[4] Y. Avishai, R. M. Redheffer and Y. B. Band, Electron states in a magnetic field and random impurity potential: use of the theory of entire functions, *J. Phys. A* **25** (1992), 3883–3889.

[5] Y. Avishai and R. M. Redheffer, Two dimensional disordered electronic systems in a strong magnetic field, *Phys. Rev. B* **47** (1993), no. 4, 2089–2100.

[6] Y. Avishai, M. Ya. Azbel and S. A. Gredeskul, Electron in a magnetic field interacting with point impurities, *Phys. Rev. B* **48** (1993), no. 23, 17280–17295.

[7] J. L. Borg, a private communication.

[8] J. L. Borg and J. V. Pulé, Lifshits tails for random smooth magnetic vortices, *J. Math. Phys.* **45** (2004), no. 12, 4493–4505.

[9] G. Chistyakov, Y. Lyubarskii and L. Pastur, On completeness of random exponentials in the Bargmann-Fock space, *J. Math. Phys.* **42** (2001), no. 8, 3754–3768.

[10] J. Desbois, C. Furtlehner and S. Ouvry, Random magnetic impurities and the Landau problem, *Nuclear Physics B*, **453** (1995), no. 3, 759–776.

[11] J. Desbois, C. Furtlehner and S. Ouvry, Density correlations of magnetic impurities and disorder, *J. Phys. A: Math. Gen.* **30** (1997), no. 21, 7291–7300.

[12] J. Desbois, S. Ouvry and C. Texier, Hall conductivity for two-dimensional magnetic systems, *Nuclear Physics B*, **500** (1997), no. 1, 486–510.

[13] T. C. Dorlas, N. Macris and J. V. Pulé, Characterization of the spectrum of the Landau Hamiltonian with delta impurities, *Comm. Math. Phys.* **204** (1999), no. 2, 367–396.

[14] E. I. Dinaburg, Y. G. Sinai and A. B. Soshnikov, Splitting of the low Landau levels into a set of positive Lebesgue measure under small periodic perturbations, *Comm. Math. Phys.* **189** (1997), no. 2, 559–575.

[15] P. Exner, P. Št'ovíček and P. Vytřas, Generalized boundary conditions for the Aharonov-Bohm effect combined with a homogeneous magnetic field, *J. Math. Phys.* **43** (2002), no. 5, 2151–2168.

[16] A. K. Geim, S. J. Bending, and I. V. Grigorieva, Asymmetric scattering and diffraction of two-dimensional electrons at quantized tubes of magnetic flux, *Phys. Rev. Lett.* **69** (1992), 2252–2255.

[17] A. K. Geim, S. J. Bending, I. V. Grigorieva, and M. G. Blamire, Ballistic two-dimensional electrons in a random magnetic field, *Phys. Rev. B* **49** (1994), 5749–5752.

[18] V. A. Geĭler, The two-dimensional Schrödinger operator with a homogeneous magnetic field and its perturbations by periodic zero-range potentials, *St. Petersburg Math. J.* **3** (1992), no. 3, 489–532.

[19] V. A. Geyler and E. N. Grishanov, Zero Modes in a Periodic System of Aharonov-Bohm Solenoids, *JETP Letters* **75** (2002), no. 7, 354–356.

[20] V. A. Geyler and P. Šťovíček, Zero modes in a system of Aharonov-Bohm fluxes, *Rev. Math. Phys.* **16** (2004), no. 7, 851–907.

[21] H. T. Ito and H. Tamura, Aharonov-Bohm effect in scattering by point-like magnetic fields at large separation, *Ann. Henri Poincaré* **2** (2001), no. 2, 309–359.

[22] W. Kirsch, Random Schrödinger operators. A course, in *Schrödinger operators* (Sønderborg, 1988), 264–370, Lecture Notes in Phys., 345, Springer, Berlin, 1989.

[23] W. Kirsch and F. Martinelli, On the spectrum of Schrödinger operators with a random potential, *Comm. Math. Phys.* **85** (1982), no. 3, 329–350.

[24] A. Laptev and T. Weidl, Hardy inequalities for magnetic Dirichlet forms, Mathematical results in quantum mechanics (Prague, 1998), *Oper. Theory Adv. Appl.*, **108** (1999), 299–305.

[25] B. Ja. Levin, *Distribution of zeros of entire functions*, American Mathematical Society, 1964.

[26] M. Melgaard, E.-M. Ouhabaz and G. Rozenblum, Negative discrete spectrum of perturbed multi-vortex Aharonov-Bohm Hamiltonians, *Ann. Henri Poincaré* **5** (2004), no. 5, 979–1012; Errata, *ibid.* **6** (2005), no. 2, 397-398.

[27] T. Mine, The Aharonov-Bohm solenoids in a constant magnetic field, *Ann. Henri Poincaré* **6** (2005), no. 1, 125–154.

[28] T. Mine and Y. Nomura, Periodic Aharonov-Bohm Solenoids in a Constant Magnetic Field, *Rev. Math. Phys.* **18** (2006), no. 8, 913–934.

[29] Y. Nambu, The Aharonov-Bohm problem revisited, *Nuclear Phys. B* **579** (2000), no. 3, 590–616.

[30] M. Reed and B. Simon, *Methods of modern mathematical physics. I. Functional analysis. Second edition*, Academic Press, 1980.

[31] R.-D. Reiss, *A course on point processes*, Springer-Verlag, New York, 1993.

[32] G. Rozenblum and N. Shirokov, Infiniteness of zero modes for the Pauli operator with singular magnetic field, *J. Funct. Anal. 233* (2006), no. 1, 135–172.

[33] S. N. M. Ruijsenaars, The Aharonov-Bohm effect and scattering theory, *Ann. Physics* **146** (1983), no. 1, 1–34.

[34] J. Zak, Group-theoretical consideration of Landau level broadening in crystals, *Phys. Rev.* **136** (1964) no. 3A, A776–A780.