工学ジャーナル　第 7 巻
2008 年 3 月

間欠カオス力学系のエルゴード定理[1]

Ergodic Theorems for Dynamical Systems with Intemittent Chaos

井　上　友　喜[2]

Tomoki INOUE [3]

Abstract: We consider dynamical systems with intermittent chaos. In particular, we consider one-dimensional dynamical systems with indifferent fixed points (fixed points with derivative one). Typical orbits under such dynamical systems display intermittent behaviour. Many such maps have absolutely continuous ergodic infinite invariant measures. We study the limit of the ratio of the ergodic sum of f to that of g, where the integrals of f and g are infinite with respect to the absolutely continuous invariant measure. If f and g are real analytic functions on $[0, 1]$, the result in this article makes it clear whether the ratio of the ergodic sum of f to that of g converges in the Lebesgue measure or not.

Key words: Ergodic theorem, Dynamical system, Intermittent chaos, Invariant measure

1. はじめに

カオス的な振る舞いと比較的安定した振る舞いが交互に不規則に現れるような力学系は間欠カオス力学系と呼ばれている。そのような力学系は，比較的簡単な一次元写像の反復による力学系としてつくることができる。また，$1/f$ ゆらぎをつくることが知られている。こうした力学系はエルゴード的無限不変測度をもつ場合が多い。なお，連分数展開に関連した力学系もエルゴード的無限不変測度をもつ場合がある。

無限不変測度は，不変確率測度と比べるとなじみの薄いものと思うが，その無限不変測度をもつような系において，統計的に重要な量である平均を考察する。特に，エルゴード的無限不変測度をもつ間欠カオスを生じる一次元離散力学系について，具体的な力学系の例をあげて考えている問題を説明した上で，測度無限大の集合への平均訪問回数を示す個別エルゴード定理など論文 [4] で得られた結果を述べる。この論文 [4] では，論文 [2] 及び [3] で得られた結果をさらに発展させた研究を行っている。

2. 準備

まず，不変測度，エルゴード的といった基本的な用語を確認しておこう。次の定義において，$(X, \mathcal{A}, \mu)$ を $\sigma-$ 有限測度空間とする。数学の用語に不慣れな読者は適当に読み飛ばしてもよいが，X は考えている

[1] Ergodic Theory and Dynamical Systems vol 24 (2004) pp.525-545

[2] 松山市文京町３　愛媛大学大学院理工学研究科電子情報工学専攻

[3] Department of Electrical and Electronic Engineering, Faculty of Engineering, Ehime University, Matsuyama, Japan

平成 19 年 8 月 31 日 受付 , 平成 19 年 10 月 31 日 受理

全体空間のことであり，例えば，区間を思い浮かべてもらえばよい。また，$\mathcal{A}$ は集合族であり，μ は長さや面積などを一般化した測度であり，例えば，f を非負の関数として，$\mu(A)=\int_A f(x)dx$ のようなものを思い浮かべてもらえばよい。このとき，測度 μ が 可測変換 $T:X\to X$ の不変測度であるとは，任意の $A\in\mathcal{A}$ に対して $\mu(T^{-1}(A))=\mu(A)$ となることである。測度 μ が 可測変換 $T:X\to X$ についてエルゴード的であるとは，$T^{-1}(A)=A\quad\mu$-a.e. となる $A\in\mathcal{A}$ が $\mu(A)=0$ または $\mu(X\setminus A)=0$ をみたすことである。通常，エルゴード性はよく知られている後述の個別エルゴード定理が成り立つような意味で使われることが多い。しかし，μ が無限測度，すなわち $\mu(X)=\infty$ の場合には，そのような形で定義することはできない。本稿では μ が無限測度の場合を後で考えいくことになる。

ここで，有限測度空間，すなわち $\mu(X)<\infty$ において，よく知られている個別エルゴード定理を述べる。

よく知られている個別エルゴード定理.　$(X,\mathcal{A},\mu)$ を有限測度空間，μ は 可測変換 $T:X\to X$ のエルゴード的不変測度とし，$f\in L^1(\mu)$ とする。このとき，μ-a.e.x (μ に関してほとんどすべての x) に対して

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f(T^k(x))=\frac{\int f d\mu}{\mu(X)} \tag{1}$$

となる。特に，$A\in\mathcal{A}$ とすると，μ-a.e.x に対して

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}1_A(T^k(x))=\frac{\mu(A)}{\mu(X)} \tag{2}$$

となる。ここで，1_A は A の定義関数，すなわち，$x\in A$ のとき $1_A(x)=1$ であり，$x\in A$ でないとき $1_A(x)=0$ である。

上の式 (2) の左辺を A への平均訪問回数とよぶ。

上記の定理では，$\mu(X)<\infty$ と仮定しているが，$\mu(X)=\infty$ のときは，定理にある式の右辺はどうなるだろうか。式 (2) について考えると，$\mu(A)<\infty$ のときは容易に想像がつくように A への平均訪問回数は 0 になるが，$\mu(A)=\infty$ のときは A への平均訪問回数さえこの定理からはわからない。

$\mu(X)=\infty$ のときには，Hopf の比例エルゴード定理と呼ばれる次のような定理が知られているが，この定理も今述べたような問題に対しては有効ではない。

比例エルゴード定理.　$(X,\mathcal{A},\mu)$ を σ-有限測度空間，μ は 可測変換 $T:X\to X$ のエルゴード的不変測度とし，$f,g\in L^1(\mu),\quad g\neq 0$ とする。このとき，μ-a.e.x に対して

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=0}^{n}f(T^k(x))}{\sum_{k=0}^{n}g(T^k(x))}=\frac{\int f d\mu}{\int g d\mu} \tag{3}$$

となる。

この定理の条件を満たさない $\int f d\mu=\infty, \int g d\mu=\infty$ となるような場合に，(3) 式はどのようになるのだろうか。本稿では，無限不変測度をもつような一次元写像 T を採り上げ，$\int f d\mu=\infty, \int g d\mu=\infty$ となるような場合にこのような極限を考える。このような極限を考えることにより，前に述べた $\mu(A)=\infty$ のときの A への平均訪問回数も明らかになる。

3. 一次元写像の不変測度と考える問題

本節では，具体的な一次元写像がどのような不変測度をもつかを述べ，どのような問題を考えようとしているのかを述べる。

例 1.

$$T(x)=\begin{cases}2x & \text{for } x\in[0,\frac{1}{2})\\ 2x-1 & \text{for } x\in[\frac{1}{2},1]\end{cases}$$

とおくと，$[0,1]$ 区間上のルベーグ測度がエルゴード的不変測度となる。したがって，$[0,1]$ 区間の可測集合 A への平均訪問回数は，A のルベーグ測度 (A が区間なら A の長さ) になり，何ら問題は生じない。

一般に，後で述べる条件 (i)-(iv) のもとで，

$$\inf_x T'(x) > 1$$

ならば，ルベーグ測度と同値なエルゴード的不変確率測度が存在する。$\inf_x T'(x) > 1$ が崩れるとどうなるだろうか。次にあげる写像は，$T'(0) = 1$ となっている。

例 2.

$$T(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1-x} & \text{for } x \in [0, \frac{1}{2}) \\ 2x - 1 & \text{for } x \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

この例では，$\mu(D) = \displaystyle\int_D \frac{1}{x}\mathrm{Leb}(dx)$ (ただし Leb はルベーグ測度) とおくと，μ がエルゴード的不変測度となることが知られている。したがって，小さな $\epsilon > 0$ に対して，$\mu([0,\epsilon]) = \infty$ となり，$[0,\epsilon]$ への平均訪問回数は全く自明というわけではないが，$\mu([\epsilon,1]) < \infty$ であることから，$[\epsilon,1]$ への平均訪問回数は 0 であることがわかり，その結果，$[0,\epsilon]$ への平均訪問回数は 1 であることは明らかである。

$T'(0) = T'(1) = 1$ となるようにするとどうなるだろうか。次の例はそのようなものである。

例 3.

$$T(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1-x} & \text{for } x \in [0, \frac{1}{2}) \\ \dfrac{2x-1}{x} & \text{for } x \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

この例では，$\mu(D) = \displaystyle\int_D \frac{1}{x(1-x)}\mathrm{Leb}(dx)$ とおくと，μ がエルゴード的不変測度となることが知られている。したがって，小さな $\epsilon > 0$ に対して，$\mu([0,\epsilon]) = \infty$，$\mu([1-\epsilon,1]) = \infty$ となり，例 2 で考えたような方法では $[0,\epsilon]$ への平均訪問回数すら求めることはできない。以下では，この例を少し一般化した写像に対して，$[0,\epsilon]$ への平均訪問回数も含めて，エルゴード理論的な極限を考える。

4. 条件の設定と得られた結果

簡単のため，例 3 を少しだけ一般化した次のような写像を考える（本当はもっと一般化することができるが，本稿では簡単な場合にとどめる)。$0 < c < 1$ とし，$T : [0,1] \to [0,1]$ は次の条件をみたすとする：

(i) T を区間 $(0,c)$ と $(c,1)$ に制限したものは C^2 級で，それぞれ $(0,c]$ と $[c,1)$ へ C^2 級関数として拡張できる;

(ii) $T(0) = 0,\quad T(1) = 1$;

(iii) $T(0,c) = (0,1)$ ，$T(c,1) = (0,1)$;

(iv) $T'(x) > 1$ for $x \neq 0, c, 1$.

さらに，A を 0 の小さな近傍，B を 1 の小さな近傍とし，

$$T(x) - x = \theta_0 x^{d_0} + o(x^{d_0}) \quad \text{in } A \tag{4}$$

$$x - T(x) = \theta_1 (1-x)^{d_1} + o((1-x)^{d_1}) \quad \text{in } B \tag{5}$$

をみたすとする。ここで，$\theta_0 > 0,\ d_0 \geq 1$ ，$\theta_1 > 0,\ d_1 \geq 1$ は定数である。

注意. T は，ルベーグ測度と同値な $\sigma-$ 有限エルゴード的不変測度 μ をもち，μ は $\mu([0,1]\setminus(A\cup B)) < \infty$ をみたす。さらに，$d_0 \geq 2 \iff \mu(A) = \infty$，$d_1 \geq 2 \iff \mu(B) = \infty$ である。

このことから，$d_0 \geq 2$，$d_1 \geq 2$ のときには前節で説明したのと同様に，$[0, \epsilon]$ への平均訪問回数はよく知られている定理からは得られない。

ここでは，$\int f d\mu = \infty, \int g d\mu = \infty$ となるような場合に，極限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n} f(T^k(x))}{\sum_{k=0}^{n} g(T^k(x))} \tag{6}$$

が何らかの意味で存在するかどうか，存在するとすればどのような値になるのかを調べる。ただし，f, g の積分が無限大というだけでは議論不能である。そこで，f, g として，次のような条件を満たす f_A, f_B を考える。

m_0, m_1 を実定数として，$1_A, 1_B$ に次のように重みをつける:

$$f_A(x) = x^{m_0} \cdot 1_A(x), \quad f_B(x) = (1-x)^{m_1} \cdot 1_B(x).$$

このような f_A, f_B を考えておけば，f, g が実解析的な関数であれば，(6) のような極限を計算することができる。また，$m_0 = 0, m_1 = 0$ のとき，$f_A = 1_A, f_B = 1_B$ となるので，軌道の A への訪問回数と B への訪問回数の比の極限を得ることができる。さらに，この極限値がわかると $\mu([0,1]) = \infty$ となる場合には，この値を用いて，A への平均訪問回数を求めることができる。

既に述べたことからわかるように，もし，$f_A, f_B \in L^1(\mu)$ であれば，Hopf の比例エルゴード定理 ([1]) により，極限 (6) は a.e.x に対して $\int f_A d\mu / \int f_B d\mu$ であることがわかり，何ら問題を生じない。

$\int f_A d\mu = \infty, \int f_B d\mu = \infty$ となる場合を問題にしているので，$\int f_A d\mu < \infty$ であるための条件を提示しておく。なお，これは [5] で議論されたことから得られる結果である。

定理 1 ([4]). $d_0 - m_0 < 2$ と $f_A \in L^1(\mu)$ は同値である。

当然，同様のことは f_B についても成り立つ。$d_0 - m_0 \geq 2$ かつ $d_1 - m_1 \geq 2$ のとき，すなわち $\int f_A d\mu = \infty, \int f_B d\mu = \infty$ である場合に下記の定理を得た。

定理 2 ([4]). $2 \leq d_0 - m_0 < d_1 - m_1$ (or $2 \leq d_1 - m_1 < d_0 - m_0$) の場合は，Leb-a.e.$x$ に対して $f = f_A$，$g = f_B$ としたときの極限 (6) は 0 (or ∞) となる。

定理 3 ([4]). $d_0 - m_0 = d_1 - m_1 = 2$ の場合は，Leb-a.e.x に対して

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n} f_A(T^k(x))}{\sum_{k=0}^{n} f_B(T^k(x))} = \infty, \quad \liminf_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n} f_A(T^k(x))}{\sum_{k=0}^{n} f_B(T^k(x))} = 0$$

であるが，

$$\rho = \frac{\theta_1 M_1}{\theta_0 M_2}$$

とおくと，任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Leb}\left(\left\{x; \left|\frac{\sum_{k=0}^{n} f_A\left(T^k(x)\right)}{\sum_{k=0}^{n} f_B\left(T^k(x)\right)} - \rho\right| > \varepsilon\right\}\right) = 0$$

となる。ただし，$M_1 = \lim_{x\uparrow c} T'(x)$，$M_2 = \lim_{x\downarrow c} T'(x)$ である。また，θ_0，θ_1 は (4) 式と (5) 式で与えられたものである。

なお，$d_0 - m_0 = d_1 - m_1 > 2$ の場合には，Leb-a.e.x に対して

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n} f_A(T^k(x))}{\sum_{k=0}^{n} f_B(T^k(x))} = \infty, \quad \liminf_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n} f_A(T^k(x))}{\sum_{k=0}^{n} f_B(T^k(x))} = 0$$

となることは [3] と同様にして示すことができる。ただし，定理 3 にあるような ρ をとることはできない。

A, B への平均訪問回数について，ここで得られた結果の系としてまとめると次のようになる。

系 1. $2 \le d_0 < d_1$ (or $2 \le d_1 < d_0$) の場合は，Leb-a.e.x に対して

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} 1_A(T^k(x)) = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} 1_B(T^k(x)) = 1$$

となる。

系 2. $d_0 = d_1 = 2$ の場合は，任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Leb}\left(\left\{x; \left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} 1_A(T^k(x)) - \frac{\theta_1 M_1}{\theta_0 M_2 + \theta_1 M_1}\right| > \varepsilon\right\}\right) = 0$$

となる。

系 3. $d_0 = d_1 \ge 2$ の場合は，Leb-a.e.x に対して

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} 1_A(T^k(x)) = 1, \quad \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} 1_A(T^k(x)) = 0$$

となる。

5. 結び

よく知られている個別エルゴード定理や Hopf の比例エルゴード定理では扱えないような場合においても，４節で述べたようにエルゴード理論的極限の存在がわかった。これは，今後の無限測度系のエルゴード理論的研究の基礎となる部分になると思われる。

参　考　文　献

[1] J.Aaronson. *An introduction to infinite ergodic theory.* Mathematical surveys and monographs **50**, AMS, 1997.

[2] T.Inoue. Ratio ergodic theorems for maps with indifferent fixed points. Ergodic Theory and Dynamical Systems. **17**, pp.625-642, 1997.

[3] T.Inoue. Sojourn times in small neighborhoods of indifferent fixed points of one-dimensional dynamical systems, Ergodic Theory and Dynamical Systems. **20**, pp.241-257, 2000.

[4] T.Inoue. Ergodic sums of non-integrable functions under one-dimensional dynamical systems with indifferent fixed points, Ergodic Theory and Dynamical Systems. **24**, pp.525-545, 2004.

[5] M.Thaler. Estimates of the invariant densities of endomorphisms with indifferent fixed points. Israel J. Math. **37**, pp.304-314, 1980.