工学ジャーナル　第 11 巻
2012 年 3 月

直交系列生成の理論

Generation Theory of Orthogonal Complex Number Sequence Sets

大上健二 *

Kenji　OHUE *

The four basic problems in generation of orthogonal complex number sequence sets having zero cross-correlation, lowest peak cross-correlation and polyphase elements have been unsolved. In this paper these problems are solved by using Ohue-Okahisa,Ohue-Uto and Alltop theorems for the inverse discrete Fourier transform of Chirp sequences. An application of the orthogonal complex number sequence sets to the smear transform which is an orthogonal transform spreading signals optimally is shown.

Key words : Orthogonal complex number sequence sets, Ohue-Okahisa,Ohue-Uto and Alltop theorems, Zero cross-correlation, Lowest peak cross-correlation, Polyphase elements, Chirp sequences

１．　まえがき

スペクトル拡散通信方式，著作権保護のための電子透かし法及び遠距離レーダや水中音波探知のパルス圧縮法などの拡散符号を構成するために，直交系列が用いられる．直交系列の生成においては，**2.** で述べる第一問題から第四問題の４つの基本問題が未解決であった．筆者は大上・岡久の定理 [7] 及び大上・宇戸の定理 [9] を明らかにし，これらの定理と Alltop の定理を用いて直交系列の第二問題から第四問題の基本問題を解いた．本論文では，直交系列の４つの基本問題の解を示す．チャープ系列を母系列としその逆離散フーリエ変換を施すことにより第二問題から第四問題の特性を有する直交周期複素数系列セットを生成している．また，一般化されたチャープ系列を定義しこの一般化された母系列を用いて相互相関関数の絶対値を不変とする直交周期複素数系列セットの族を生成している．この直交周期複素数系列セットの族が第二問題から第四問題の特性を有する直交周期複素数系列セットを包含することを用いて，さらに新しい直交周期複素数系列セットを生成している．最後に，筆者が提案した拡散能力の最も優れた直交変換であるスミア変換への適用例を示す.

２．直交系列の未解決の基本問題と解

直交系列の未解決の基本問題と解は以下のとおりである．

直交系列の基本問題

第一問題：任意長の擬直交有限系列の生成

* 愛媛大学大学院理工学研究科（790-8577 愛媛県松山市文京町３番）
Graduate School of Science and Engineering, Ehime University, 3 Bunkyo-cho, Matsuyama, 790-8577 Japan
原稿受理　平成 23 年 10 月 28 日

第二問題：任意周期の多相直交周期系列の生成

第三問題：相互相関関数の絶対値が一様となる任意周期の直交周期系列セットの生成

第四問題：相互相関関数が零範囲を有する任意周期の直交周期系列セットの生成.

直交系列の基本問題の解

第一問題の解————論文［1］

第二問題の解————論文［2］，［7］，［8］

第三問題の解————論文［3］，［6］，［7］

第四問題の解————論文［4］，［5］，［6］，［7］，［9］

論文

［1］　大上健二，”鋭い自己相関関数をもつ有限複素数系列の生成法，” 信学論 (A),vol. J 76 − A, no. 3，pp.493-499，March 1993.

［2］　大上健二，岡久卓也，”チャープ系列に基づく任意周期の多相直交周期系列の生成法”, 信学論 (A)，vol. J 84 − A， no.8，pp.1054-1062，Aug. 2001.

［3］　大上健二，”チャープ系列に基づく相互相関の尖頭値が最小な任意周期の直交周期複素数系列セットの生成法”，信学論 (A)，vol. J 86 − A，no.3 ,pp.288-297，March 2003.

［4］　大上健二，宇戸寿幸，”周期的な零相互相関範囲を有する任意周期の直交周期複素数系列セットの生成法，” 信学論 (A)，vol. J 89 − A，no.12, pp.1185-1197，Dec. 2006.

［5］　大上健二，宇戸寿幸，”零シフトを含むシフト区間で零相互相関範囲を有する任意周期の直交周期複素数系列セットの生成法，” 信学論 (A),vol. J 91 − no.3, pp.411-428，March 2008.

［6］　大上健二，宇戸寿幸，”相互相関関数の絶対値を不変とする直交周期複素数系列セットの族，” 信学論 (A)，vol. J 91 − A，no. 11，pp.1058-1071，Nov. 2008.

［7］　大上健二，宇戸寿幸，”大上・岡久の予想の証明，” 信学論 (A)，vol. J 92 − A, no. 4, pp.246-248，April. 2009.

［8］　大上健二，宇戸寿幸，”任意周期の新しい多相直交周期系列の生成法，信学論 (A), vol. J 92 − A，no. 11，pp.917-920，Nov. 2009.

［9］　大上健二，宇戸寿幸，”零相互相関範囲を有する直交周期複素数系列セットの生成に用いた大上・宇戸の予想の証明，” 信学論 (A)，vol. J 95 − A，no. 2, Feb. 2012 (印刷中).

３．　直交系列生成に用いた定理

直交系列生成の第二問題から第四問題は，以下の大上・岡久の定理 [7]，大上・宇戸の定理 [9] 及び Alltop の定理 [4] を用いて解かれる.

［大上・岡久の定理］

周期 N が奇数であるとき R が $0 < |R| < N$ を満たす N と互いに素な整数であり，周期 N が偶数であるとき $2R$ が $0 < |2R| < N$ を満たす N と互いに素な整数であるならば,

$$\left| \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\ell=0}^{N-1} e^{\,j\frac{2\pi}{N}\{R\ell^2+k\ell\}} \right| \;=\; 1 \quad (k=0,1,2,3,\cdots,N-1) \tag{1}$$

となる．ただし，$j = \sqrt{-1}$ である.

［大上・宇戸の定理］

偶数である周期を N_e とし，

$$N_e \ = \ 2^{\alpha_0} p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} \cdots p_m^{\alpha_m}$$

と素因数分解されるとする．ただし，$p_i(i=1,2,3,\cdots,m)$ は奇素数であり，$\alpha_i(i=0,1,2,3,\cdots,m)$ は正整数である．N_e の約数の集合 $\mathbf{H}_{N_e}$ および $\mathbf{H}^c_{N_e}$ を，それぞれ，

$$\mathbf{H}_{N_e} = \{r \mid r = 2^{\alpha_0} \times d,\ d \in \{p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} \cdots p_m^{\alpha_m}\text{の約数}\}\}$$
$$\mathbf{H}^c_{N_e} = \{2^{\alpha_0 - 1} p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} \cdots p_m^{\alpha_m}\text{の約数}\}$$

とする．また，$R \in \{\frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \cdots, \frac{N_e - 1}{2}\}$ とし，$gcd(2R, N_e) = L$ とする．ここで，$gcd(\cdot,\cdot)$ は最大公約数を表す.

このとき，$L \in \mathbf{H}_{N_e}$ かつ $\frac{2R}{L} \in \{2,4,6,8,10,\cdots,p_{min}-1\}$ であるか，または $L \in \mathbf{H}^c_{N_e}$ であるならば，$k = 0,1,2,3,\cdots,N_e - 1$ に対して，

$$\left|\frac{1}{N_e}\sum_{h=0}^{N_e-1} e^{\,j\frac{2\pi}{N_e}\{R\cdot h^2 + kh\}}\right| = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{L}{N_e}} & (k \equiv 0 \pmod{L}) \\ 0 & (otherwise) \end{cases} \tag{2}$$

となる．ただし，p_{min} は $\frac{N_e}{L}$ の最小素因数であり奇素数である.

また，$L \in \mathbf{H}_{N_e}$ かつ $\frac{2R}{L} \in \{1,3,5,7,9,\cdots,p_{min}-2\}$ であるならば，$k = 0,1,2,3,\cdots,N_e - 1$ に対して，

$$\left|\frac{1}{N_e}\sum_{h=0}^{N_e-1} e^{\,j\frac{2\pi}{N_e}\{R\cdot h^2 + kh\}}\right| \ = \ \begin{cases} \sqrt{\dfrac{L}{N_e}} & (k \equiv \dfrac{L}{2} \pmod{L}) \\ 0 & (otherwise) \end{cases} \tag{3}$$

となる..

［**Alltop** の定理］

奇数である周期を N_o とし，$R \in \{1,2,3,\cdots,N_o - 1\}$ とする．$gcd(R, N_o) = L$ であるならば，$k = 0,1,2,3,\cdots,N_o - 1$ に対して，

$$\left|\frac{1}{N_o}\sum_{h=0}^{N_o-1} e^{\,j\frac{2\pi}{N_o}\{R\cdot h^2 + kh\}}\right| = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{L}{N_o}} & (k \equiv 0 \pmod{L}) \\ 0 & (otherwise) \end{cases} \tag{4}$$

となる.

４． 直交系列の生成法

（１）擬直交有限複素数系列の生成

要素の絶対値が零でない任意長の直交有限複素数系列の生成法は存在しない．そこで，任意長の擬直交有限複素数系列を以下に求める．今，長さが奇数 N_o である有限複素数系列 $\mathbf{Z}_{N_o}(\alpha)$ を生成する母関数 $G^{\alpha}_{N_o}(\omega)$ を

$$G^{\alpha}_{N_o}(\omega) = e^{\,j\alpha\frac{(N_o-1)T}{\tau_{max}}\theta'(\omega)} \tag{5}$$

とする．ここで，α は位相係数であり，$\theta'(\omega)$ は $-\frac{\pi}{T} \leq \omega \leq \frac{\pi}{T}$ を一周期とする周期関数である．また，τ_{max} は $\theta'(\omega)$ の最大遅延偏差であり，

$$\tau_{max} = \max_{|\omega| \leq \frac{\pi}{T}} \{\frac{d\theta'(\omega)}{d\omega}\} - \min_{|\omega| \leq \frac{\pi}{T}} \{\frac{d\theta'(\omega)}{d\omega}\} \tag{6}$$

である．

この母関数 $G_{N_o}^{\alpha}(\omega)$ より生成される有限複素数系列を

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_{N_o}(\alpha) \;\; = \;\; & [Z_{-\frac{N_o-1}{2}}(\alpha), Z_{-\frac{N_o-1}{2}+1}(\alpha), Z_{-\frac{N_o-1}{2}+2}(\alpha), \cdots, Z_{-2}(\alpha), Z_{-1}(\alpha), Z_0(\alpha), Z_1(\alpha), Z_2(\alpha), \\ & \cdots, Z_{\frac{N_o-1}{2}-1}(\alpha), Z_{\frac{N_o-1}{2}}(\alpha)] \end{aligned} \tag{7}$$

とする．ここで，要素 $Z_k(\alpha)$ $(k = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \cdots, \pm\frac{N_o-1}{2})$ は，

$$Z_k(\alpha) \;\; = \;\; \frac{T}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} G_{N_o}^{\alpha}(\omega) \; e^{\,jk\omega T} d\omega \tag{8}$$

である [1]．

そこで，$0 < \alpha < 1$ かつ $\alpha \approx 1$ を満たす位相係数 α の値を ξ とすると，$0 < \alpha \leq \xi$, $N_o \gg 0$ における有限複素数系列 $\mathbf{Z}_{N_o}(\alpha)$ は鋭い自己相関関数をもつ有限複素数系列となる [1]．　長さが偶数 N_e である有限複素数系列 $\mathbf{Z}_{N_e}(\alpha)$ は，式 (7) の系列 $\mathbf{Z}_{N_o}(\alpha)$ の最初の要素 $Z_{-\frac{N_o-1}{2}}(\alpha)$ または最後の要素 $Z_{\frac{N_o-1}{2}}(\alpha)$ を除いて構成する．

（２）多相直交周期系列セットの生成

位相係数が R であるチャープ系列 $\mathbf{G}_N(R) = [G_0(R), G_1(R), G_2(R), \cdots, G_{N-1}(R)]$ を逆離散フーリエ変換して生成される，周期が N である周期複素数系列を $\mathbf{Z}_N(R) = [Z_0(R), Z_1(R), Z_2(R), \cdots, Z_{N-1}(R)]$ とする [2]〜[5]．そうすると，周期複素数系列 $\mathbf{Z}_N(R)$ は直交周期複素数系列となり，その要素 $Z_k(R)$ は，

$$\begin{aligned} Z_k(R) \;\; &= \;\; \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\ell=0}^{N-1} G_\ell(R) \; e^{\,j\frac{2\pi k\ell}{N}} \\ &= \;\; \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\ell=0}^{N'} e^{\,j\frac{2\pi}{N}\{R\ell^2\}} e^{\,j\frac{2\pi k\ell}{N}} \\ & \quad + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\ell=N'+1}^{N-1} e^{\,j\frac{2\pi}{N}\{R(N-\ell)^2\}} e^{\,j\frac{2\pi k\ell}{N}} \\ & \quad (k = 0, 1, 2, 3, \cdots, N-1) \end{aligned} \tag{9}$$

となる [2]〜[5]．ここで，

$$N' \;\; = \;\; \begin{cases} \dfrac{N-1}{2} & (N = \text{奇数}) \\ \dfrac{N}{2} & (N = \text{偶数}) \end{cases} \tag{10}$$

である．

今，周期 N が奇数であるとき R が $0 < |R| < N$ を満たす N と互いに素な整数であり，周期 N が偶数であるとき $2R$ が $0 < |2R| < N$ を満たす N と互いに素な整数であるならば，直交周期複素数系列 $\mathbf{Z}_N(R)$ の要素の絶対値 $|Z_k(R)|$ は，大上・岡久の定理と式 (9) より，

$$\begin{aligned} |Z_k(R)| \;\; &= \;\; \left| \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\ell=0}^{N-1} e^{\,j\frac{2\pi}{N}\{R\ell^2+k\ell\}} \right| \\ &= \;\; 1 \;\; (k = 0, 1, 2, 3, \cdots, N-1) \end{aligned} \tag{11}$$

となる [2]．したがって，式（11）で表される要素 $Z_k(R)$ $(k = 0, 1, 2, 3, \cdots, N-1)$ で構成される直交周期複素数系列 $\mathbf{Z}_N(R)$ は多相直交周期系列となる．すなわち，生成される周期が N である多相直交周期系列セット $\mathcal{S}_N$ は,

$$\mathcal{S}_N = \{\mathbf{Z}_N(R) \mid R \in \mathcal{V}(N)\} \tag{12}$$

となる [2], [8]．ここで，位相係数の集合 $\mathcal{V}(N)$ は,

$$\mathcal{V}(N) \ = \ \begin{cases} \{ \ R \mid gcd(|R|, N) = 1, \ |R| \in \{1, 2, 3, \cdots N-1\} \ \} & (N = \text{奇数}) \\ \{ \ R \mid gcd(|2R|, N) = 1, \ |2R| \in \{1, 2, 3, \cdots N-1\} \ \} & (N = \text{偶数}) \end{cases} \tag{13}$$

である．多相直交周期系列セット $\mathcal{S}_N$ の大きさは，N のオイラーの関数の値に等しい．

今，周期が N であるチャープ系列 $\mathbf{G}_N(R)$ を一般化したチャープ系列 $\mathbf{G}_N^{\mu,\gamma,\delta}(R)$ を,

$$\mathbf{G}_N^{\mu,\gamma,\delta}(R) = [G_0^{\mu,\gamma,\delta}(R), G_1^{\mu,\gamma,\delta}(R), G_2^{\mu,\gamma,\delta}(R), \cdots, G_{N-1}^{\mu,\gamma,\delta}(R)] \tag{14}$$

とする [6]．　ここで，$\mathbf{G}_N^{\mu,\gamma,\delta}(R)$ の要素 $G_h^{\mu,\gamma,\delta}(R)(h = 0, 1, 2, \cdots, N-1)$ は,

$$G_h^{\mu,\gamma,\delta}(R) \ = \ \begin{cases} e^{\,j\frac{2\pi}{N}\cdot R\{(h-\gamma)^2+\delta\}} \quad (h = 0, 1, 2, \cdots, \mu) \\ \\ e^{\,j\frac{2\pi}{N}\cdot R\{(N-(h-\gamma))^2+\delta\}} \\ \qquad\qquad (h = \mu+1, \mu+2, \mu+3, \cdots, N-1) \end{cases}$$
$$((\mu, \gamma, \delta) \in \mathcal{N} \times \mathcal{N} \times \mathcal{R}) \tag{15}$$

である．$\mathcal{N} = \{0, 1, 2, \cdots, N-1\}$ であり，$\mathcal{R}$ は実数の集合である．

一般化されたチャープ系列 $\mathbf{G}_N^{\mu,\gamma,\delta}(R)$ を逆離散フーリエ変換することにより導出される直交周期複素数系列を

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_N^{\mu,\gamma,\delta}(R) \ &= \ [\, Z_0^{\mu,\gamma,\delta}(R), Z_1^{\mu,\gamma,\delta}(R), Z_2^{\mu,\gamma,\delta}(R), \cdots, Z_{N-1}^{\mu,\gamma,\delta}(R)\,] \\ &\quad ((\mu, \gamma, \delta) \in \mathcal{N} \times \mathcal{N} \times \mathcal{R}) \end{aligned} \tag{16}$$

とする．ここで，$\mathbf{Z}_N^{\mu,\gamma,\delta}(R)$ の要素 $Z_k^{\mu,\gamma,\delta}(R)$ は，式 (15) より,

$$\begin{aligned} Z_k^{\mu,\gamma,\delta}(R) \ &= \ \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{h=0}^{N-1} \ G_h^{\mu,\gamma,\delta}(R) \ e^{\,j\ \frac{2\pi kh}{N}} \\ &= \ \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{h=0}^{\mu} \ e^{\,j\frac{2\pi}{N}R\{(h-\gamma)^2+\delta\}} e^{\,j\frac{2\pi kh}{N}} \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{h=\mu+1}^{N-1} \ e^{\,j\frac{2\pi}{N}R\{(N-(h-\gamma))^2+\delta\}} e^{\,j\frac{2\pi kh}{N}} \\ &\quad (k = 0, 1, 2, \cdots, N-1) \end{aligned} \tag{17}$$

である．

この一般化されたチャープ系列 $\mathbf{G}_N^{\mu,\gamma,\delta}(R)$ を用いて生成した一般化された多相直交周期系列セット $\hat{\mathcal{S}}_N$ は,

$$\hat{\mathcal{S}}_N = \{\mathbf{Z}_N^{\gamma,\delta}(R) \mid R \in \mathcal{V}(N), \ (\gamma, \delta) \in \mathcal{N} \times \mathcal{R}\} \tag{18}$$

となる [8]．この一般化された多相直交周期系列セット $\hat{\mathcal{S}}_N$ は，式 (12) の多相直交周期系列セット $\mathcal{S}_N$ を包含し $\hat{\mathcal{S}}_N \supset \mathcal{S}_N$ となる．

（３）相互相関の尖頭値が最小な直交周期複素数系列セットの生成

異なる位相係数 R と R' に対応するチャープ系列 $\mathbf{G}_N(R)$ と $\mathbf{G}_N(R')$ をそれぞれ逆離散フーリエ変換して生成される直交周期複素数系列を $\mathbf{Z}_N(R)$ と $\mathbf{Z}_N(R')$ とする．そうすると，直交周期複素数系列 $\mathbf{Z}_N(R)$ と $\mathbf{Z}_N(R')$ の相互相関関数 $\varphi_{\mathbf{Z}_N(R)\mathbf{Z}_N(R')}(k)$ は,

$$\varphi_{\mathbf{Z}_N(R)\mathbf{Z}_N(R')}(k) = \frac{1}{N}\sum_{\ell=0}^{N-1} Z_{(k+\ell) \bmod N}(R) \cdot \overline{Z_\ell(R')}$$
$$= \frac{1}{N}\sum_{\ell=0}^{N-1} G_\ell(R) \cdot \overline{G_\ell(R')} \cdot e^{\,j\frac{2\pi k\ell}{N}}$$
$$(k = 0, 1, 2, 3, \cdots, N-1) \tag{19}$$

となる [3].

今，周期 N が奇数であるとき $(R-R')$ が $0 < |R-R'| < N$ を満たす整数であり，周期 N が偶数であるとき $2(R-R')$ が $0 < 2|R-R'| < N$ を満たす整数であるならば，直交周期複素数系列 $\mathbf{Z}_N(R)$ と $\mathbf{Z}_N(R')$ の相互相関関数の絶対値 $|\varphi_{\mathbf{Z}_N(R)\mathbf{Z}_N(R')}(k)|$ は，式（9），(19) より，

$$|\varphi_{\mathbf{Z}_N(R)\mathbf{Z}_N(R')}(k)| = \left|\frac{1}{N}\sum_{\ell=0}^{N-1} e^{\,j\frac{2\pi}{N}\{(R-R')\ell^2+k\ell\}}\right|$$
$$(k = 0, 1, 2, \cdots, N-1) \tag{20}$$

となる [3].

したがって，周期 N が奇数であるとき $(R-R')$ が $0 < |R-R'| < N$ を満たす N と互いに素な整数であり，周期 N が偶数であるとき $2(R-R')$ が $0 < 2|R-R'| < N$ を満たす N と互いに素な整数であるならば，直交周期複素数系列 $\mathbf{Z}_N(R)$ と $\mathbf{Z}_N(R')$ の相互相関関数の絶対値 $|\varphi_{\mathbf{Z}_N(R)\mathbf{Z}_N(R')}(k)|$ は，大上・岡久の定理と式（20）より，

$$\begin{aligned}|\varphi_{\mathbf{Z}_N(R)\mathbf{Z}_N(R')}(k)| &= \left|\frac{1}{N}\sum_{\ell=0}^{N-1} e^{\,j\frac{2\pi}{N}\{(R-R')\ell^2+k\ell\}}\right| \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \quad (k = 0, 1, 2, \cdots, N-1)\end{aligned} \tag{21}$$

となる [3]．よって，式（21）で表される相互相関関数をもつ直交周期複素数系列 $\mathbf{Z}_N(R)$ と $\mathbf{Z}_N(R')$ は相互相関の尖頭値が最小な直交周期複素数系列対となる [3]．すなわち，奇数周期及び偶数周期をそれぞれ N_o 及び N_e とすると，生成される相互相関の尖頭値が最小な奇数周期及び偶数周期の直交周期複素数系列セット $\mathcal{S}_{N_o}$ 及び $\mathcal{S}_{N_e}$ は，それぞれ，

$$\mathcal{S}_{N_o} = \{\mathbf{Z}_{N_o}(R) \mid R \in \{\ell + a, \ell = 0, 1, 2, \cdots, q_{min} - 1\}\} \tag{22}$$
$$\mathcal{S}_{N_e} = \{\mathbf{Z}_{N_e}(R) \mid R \in \{\frac{\ell + b}{2}, \ell = 0, 1\}\} \tag{23}$$

となる [3], [6]．ここで，q_{min} は N_o の最小素因数であり，a 及び b は実数である．

（４）零相互相関範囲を有する直交周期複素数系列セットの生成

系列セットの任意の異なる２つの要素である系列 $\mathbf{Z}_N(R)$ と $\mathbf{Z}_N(R')$ の相互相関関数の絶対値 $|\varphi_{\mathbf{Z}_N(R)\mathbf{Z}_N(R')}(k)|$ $(k = 0, 1, 2, \cdots, N-1)$ が

$$\begin{aligned}|\varphi_{\mathbf{Z}_N(R)\mathbf{Z}_N(R')}(k)| &= \left|\frac{1}{N}\sum_{\ell=0}^{N-1} e^{\,j\frac{2\pi}{N}\{(R-R')\ell^2+k\ell\}}\right| \\ &= \begin{cases}\sqrt{\dfrac{L}{N}} & (k \equiv 0 \pmod{L}) \\ 0 & (otherwise)\end{cases}\end{aligned} \tag{24}$$

を満たす系列セット $\mathbf{S}_N^A(L-1)$ を，タイプ A の零相互相関範囲をもち零相互相関範囲の大きさが $L-1$ である直交周期複素数系列セットと呼ぶ [4]．また，系列セットの任意の異なる 2 つの要素である系列 $\mathbf{Z}_N(R)$ と $\mathbf{Z}_N(R')$ の相互相関関数の絶対値が

$$|\varphi_{\mathbf{Z}_N(R)\mathbf{Z}_N(R')}(k)| = \left|\frac{1}{N}\sum_{\ell=0}^{N-1} e^{\,j\frac{2\pi}{N}\{(R-R')\ell^2+k\ell\}}\right| = \begin{cases}\sqrt{\dfrac{L}{N}} & (k \equiv \dfrac{L}{2} \pmod L) \\ 0 & (otherwise)\end{cases} \tag{25}$$

を満たす系列セット $\mathbf{S}_N^B(L-1)$ を，タイプ B の零相互相関範囲をもち零相互相関範囲の大きさが $L-1$ である直交周期複素数系列セットと呼ぶ [4]．

式（24）のタイプ A の相互相関関数をもつ直交周期複素数系列セット $\mathbf{S}_N^A(L-1)$ の生成においては，式（2）及び式（4）が成立するという大上・宇戸の定理及び Alltop の定理が用いられており，式（25）のタイプ B の相互相関関数をもつ直交周期複素数系列セット $\mathbf{S}_N^B(L-1)$ の生成においては，式（3）が成立するという大上・宇戸の定理が用いられている [4],[6]．すなわち，周期的な零相互相関範囲を有する任意の奇数周期の直交周期複素数系列セット $\mathcal{S}_{N_o}^A(\frac{N_o}{q_i}-1)$ は，

$$\mathcal{S}_{N_o}^A(\frac{N_o}{q_i}-1) = \{\mathbf{Z}_{N_o}(R) \mid R \in \{\frac{(\ell+a)N_o}{q_i}, \ell=0,1,2,\cdots,q_i-1\}\} \tag{26}$$

となる [4],[6]．ここで，q_i は N_o の素因数であり，a は実数である．

周期的な零相互相関範囲を有する任意の偶数周期の直交周期複素数系列セット $\mathcal{S}_{N_e,\,\mathrm{I}}^A(\frac{N_e}{p_i}-1)$，$\mathcal{S}_{N_e,\,\mathrm{II}}^A(\frac{N_e}{p_i}-1)$，$\mathcal{S}_{N_e,\,\mathrm{III}}^B(\frac{N_e}{p_i}-1)$ 及び $\mathcal{S}_{N_e,\,\mathrm{IV}}^A(\frac{N_e}{2}-1)$ は，それぞれ，

$$\mathcal{S}_{N_e,\,\mathrm{I}}^A(\frac{N_e}{p_i}-1) = \{\mathbf{Z}_{N_e}(R) \mid R \in \{\frac{(\ell+b)N_e}{2p_i}, \ell=0,2,4,6,\cdots,p_i-1\}\} \tag{27}$$

$$\mathcal{S}_{N_e,\,\mathrm{II}}^A(\frac{N_e}{p_i}-1) = \{\mathbf{Z}_{N_e}(R) \mid R \in \{\frac{(\ell+b)N_e}{2p_i}, \ell=1,3,5,7,\cdots,p_i-2\}\} \tag{28}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_{N_e,\,\mathrm{III}}^B(\frac{N_e}{p_i}-1) = \{\mathbf{Z}_{N_e}(R), \mathbf{Z}_{N_e}(R')\}\ (R \in \{\frac{(\ell+b)N_e}{2p_i}, \ell=0,2,4,6,\cdots,p_i-1\},\\ R' \in \{\frac{(\ell+b)N_e}{2p_i}, \ell=1,3,5,7,\cdots,p_i-2\}\ )\end{aligned} \tag{29}$$

$$\mathcal{S}_{N_e,\,\mathrm{IV}}^A(\frac{N_e}{2}-1) = \{\mathbf{Z}_{N_e}(R) \mid R \in \{\frac{(\ell+b)N_e}{4}, \ell=0,1\}\} \tag{30}$$

となる [4],[6]．ここで，p_i は N_e の 2 以外の素因数であり，b は実数である．

零シフトを含むシフト区間で零相互相関範囲を有する任意周期の直交周期複素数系列セットは，タイプ B の零相互相関範囲をもつ直交周期複素数系列セット $\mathbf{S}_N^B(L-1)$ であり，また，タイプ A の零相互相関範囲をもつ直交周期複素数系列セット $\mathbf{S}_N^A(L-1)$ を用いてその要素である系列を巡回置換することにより生成した [5],[6]．

（５）直交周期複素数系列セットの族の生成

式 (14) で表される一般化されたチャープ系列 $\mathbf{G}_N^{\mu,\gamma,\delta}(R)$ を逆離散フーリエ変換することにより導出される直交周期複素数系列セットを $\{\mathbf{Z}_N^{\mu,\gamma,\delta}(R)\}$ とする．この直交周期複素数系列セット $\{\mathbf{Z}_N^{\mu,\gamma,\delta}(R)\}$ を用いて構成される直交周期複素数系列セットの族 $\{\{\mathbf{Z}_N^{\mu,\gamma,\delta}(R)\}, (\mu,\gamma,\delta) \in \mathcal{N}\times\mathcal{N}\times\mathcal{R}\}$ は，相互相関関数の絶対値が $(\mu,\gamma,\delta)-$ 不変である直交周期複素数系列セットの族となる [6]．そこで，式 (22),(23),(26)〜(30) で表される直交周期複素数系列セットがこれらの直交周期複素数系列セットの族の要素であることを用いて，さ

らに新しい**4.**の (3),(4) の相互相関特性をもつ直交周期複素数系列セットを生成した [6].

5. スミア変換への適用

ここで生成した直交周期複素数系列 $\mathbf{Z}_N(R)$ を用いて筆者が提案した拡散能力の最も優れた直交変換であるスミア変換を構成することができる．入力複素数系列を $\mathbf{x} = [x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{N-1}]$，スミア変換された拡散複素数系列を $\mathbf{y} = [y_0, y_1, y_2, \cdots, y_{N-1}]$ とすると，スミア変換対は,

$$\mathbf{y}^t = \mathbf{S} \cdot \mathbf{x}^t \tag{31}$$

$$\mathbf{x}^t = \mathbf{D} \cdot \mathbf{y}^t \tag{32}$$

となる．ここで，$\mathbf{S}$ はスミア変換行列であり，

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\sqrt{N}}[\sigma^0(\mathbf{Z}_N(R))^t, \sigma^1(\mathbf{Z}_N(R))^t, \sigma^2(\mathbf{Z}_N(R))^t, \cdots, \sigma^{N-1}(\mathbf{Z}_N(R))^t] \tag{33}$$

である．$\sigma^k(\cdot)$ は k-右巡回置換を表す [5]．記号 t は転置である．また，$\mathbf{D}$ はデスミア変換行列であり $\mathbf{D} = \overline{\mathbf{S}}^t$ である．記号 $\bar{\cdot}$ は複素共役である．$\mathbf{Z}_N(R)$ は直交周期複素数系列であるので $\mathbf{D} \cdot \mathbf{S} = \mathbf{E}$ が成り立つ．ここで，$\mathbf{E}$ は単位行列である．すなわち，入力複素数系列にスミア変換を施して得られる拡散複素数系列にデスミア変換を施すと，元の入力複素数系列に完全に復元される．一方，拡散複素数系列に加算された複素信号はデスミア変換が施され，復元された系列全体に拡散される．

6. むすび

ここで述べた相互相関特性をもつ任意周期の直交周期複素数系列セットは群遅延特性が線形であるチャープ系列を母系列とする場合に限り生成できる．このチャープ系列は周波数スペクトルの振幅値が一様である単一インパルスを最適に拡散する直交周期複素数系列の母系列である．一般に周波数スペクトルが $[r_k]$ である信号系列を最適に拡散する直交周期複素数系列はその周波数 k における群遅延特性の傾斜をその周波数 k における信号系列のパワースペクトル値 $|r_k|^2$ に比例するように母系列の位相特性 $[\theta_k]$ を定義することにより構成できる．その場合ここで述べたような相互相関特性をもつ任意周期の直交周期複素数系列セットの生成法を構成することはできない．また，本論文で求めた任意周期の直交周期系列の生成法は直交周期複素数系列の生成法であり複素数の世界で成り立つ．実数の世界は複素数の世界を鏡で写した世界であるので，実数の世界における本論文で述べた特性を有する任意周期の直交周期実数系列セットの生成法を構成することはできない．