

下水道管渠流出モデル（スロットモデル）の圧力波伝播速度算定式

Evaluation Equation of Pressure Wave Speed in SLOT Model of Urban Storm Sewer Runoff Model

魚谷 牧夫*・渡辺 政広**・右近 雄大***・友近 榮治****

Makio UOTANI*, Masahiro WATANABE**, Takehiro UKON***, Eiji TOMOCHIKA****

InfoWorks, MOUSE, and SWMM models have been used widely in urban storm water runoff analyses. However, the pressure wave speed in these models, which is one of essential runoff parameters to determine the accuracy of simulation results, has not been made clear. In this paper, considering the storage of runoff water in a lateral pipe, the elastic deformation of a pipe wall, and the compressibility of runoff water, the continuity and momentum equations of a pressurized flow in storm sewer pipe systems are derived, and then the evaluation equation of the speed is derived.

Key words: Pressure wave speed, Lateral pipe, Surcharged flow, SLOT model, Urban drainage runoff model

1. 緒 言

近年、都市の下水道流域では、いわゆるゲリラ豪雨などにより、浸水氾濫災害が頻繁に発生している。これを軽減・防止する対策を立案するためには、この浸水氾濫現象を精度高くシミュレートできる流出解析モデル^{[1][4]}が必要であり、そのようなモデルとして、従前^[5]より、InfoWorks モデル、Mouse モデル、XP-SWMM モデルなどが広く用いられてきている。

このモデルを適用する場合の問題点は、スロット幅あるいは圧力波伝播速度が明確に定義されないままになっている点にある。すなわち、スロット幅（圧力波伝播速度）の違いによって、浸水氾濫解析結果に大きい違いが現れる。しかしながら、それらの定義式・評価式は明らかにされておらず、解析の経済性や容易さなどから、適当な値のスロット幅（圧力波伝播速度）が用いられているのが実情である。

本論文では、実情の下水道管渠システムに多数存在している取付管を考慮し、下水道管渠における非定常圧力流れ（満管流れ）に対する流れの基礎式を導出し、これをもとにスロット幅（圧力波伝播速度）の評価式を導き出した。

* ジャイカインドネシア事務所産業公害管理シニア海外ボランティア
Senior Volunteer, Industrial Pollution Control, JICA Indonesia Office

** 愛媛大学大学院理工学研究科生産環境工学専攻教授
Professor, Department of Engineering for Production and Environment, Graduate School of Science and Engineering, Ehime University

*** 日本興業株式会社開発部主任
Chief Engineer, Department of Production and Development, Nihon Kogyo Co., Ltd.

**** 愛媛大学大学院理工学研究科博士後期課程生産環境工学専攻
Doctoral Course Student, Department of Engineering for Production and Environment, Graduate School of Science and Engineering, Ehime University

原稿受理 平成23年10月31日

2. 下水道管渠における圧力流れ（満管流れ）の流れの基礎式

水の圧縮性、管壁の弾性変形、取付管での流出水貯留を考慮して、プリズマチックな下水道管渠における非定常圧力流れ（満管流れ）の運動方程式および連続の式を導出する。

2.1 連続の式

Fig. 1 に示すような、取付管が接続する下水道管渠の微小区間 Δx の非定常圧力流れに、質量保存則を適用すると、次式を得る。

$$\rho AV \Delta t - \left\{ \rho AV + \frac{\partial(\rho AV)}{\partial x} \Delta x \right\} \Delta t = \frac{\partial(\rho A \Delta x)}{\partial t} \Delta t + \rho \frac{A_L}{\sin \theta} \frac{\partial y}{\partial t} \Delta t \cdot N \Delta x \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここに、 A ：管渠の断面積、 V ：断面平均流速、 ρ ：水の密度、 A_L ：取付管の断面積、 θ ：取付管の取付角度、 y ：水深、 N ：取付管の管渠単位長さあたりの設置本数、 Δx ：微小区間の長さ、 Δt ：微小時間間隔、 x ：距離、 t ：時間。

上式を、展開・変形・整理すると、次式を得る。

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{1}{A} \frac{dA}{dt} + \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{A} \frac{A_L}{\sin \theta} \frac{\partial y}{\partial t} N = 0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$; \quad \frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + V \frac{\partial \rho}{\partial x}, \quad \frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + V \frac{\partial A}{\partial x}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial y}{\partial t} + V \frac{\partial y}{\partial x} \quad \dots\dots\dots (3)$$

上式左辺の第1項および第2項は、水が圧縮性であり、管壁が弾性変形するので、それぞれ、次のように書き表すことができる。

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{K} \frac{dp}{dt} = \frac{1}{K} \frac{\rho g}{1 - \frac{\rho g}{K} y} \frac{dy}{dt} \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$\frac{1}{A} \frac{dA}{dt} = \frac{D}{\delta E} \rho g \frac{dy}{dt} \quad \dots\dots\dots (5)$$

ここに、 p ：水圧、 K ：水の体積弾性係数、 D ：管径、 δ ：管壁の厚み、 E ：管材のヤング係数、 g ：重力加速度。

式(4)、(5)を式(2)に代入し、式(3)の関係を考慮すると、次の連続の式を得る。

$$\frac{\partial y}{\partial t} + V \left(1 - \frac{a^2}{g} \frac{N}{A} \frac{A_L}{\sin \theta} \right) \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{a^2}{g} \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$; \quad a = \sqrt{\frac{\frac{K}{\rho}}{\frac{1}{1 - \frac{\rho g}{K} y} + \frac{KD}{\delta E} + \frac{K}{\rho g} \frac{N}{A} \frac{A_L}{\sin \theta}}} \quad \dots\dots\dots (7)$$

連続の式(6)における a (式(7)) は、後述するように、下水道管渠の圧力流れにおける微小擾乱の伝播速度、すなわち圧力波伝播速度を表している。

さて、ここで、

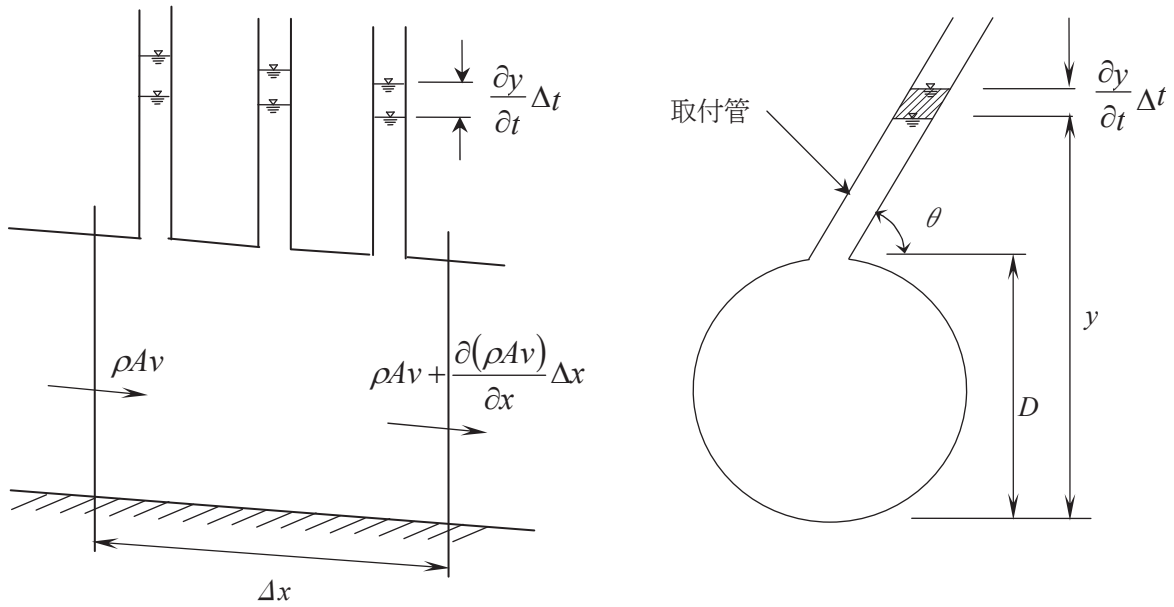


Fig. 1 A sewer pipe reach for the derivation of continuity equation.

$$a_0 = \sqrt{\frac{\frac{K}{\rho}}{1 - \frac{\rho g}{K} y}} \quad (\text{水の圧縮性に起因する圧力波伝播速度}) \dots\dots\dots (8)$$

$$a_r = \sqrt{\frac{\frac{K}{\rho}}{\frac{KD}{\delta E}}} = \sqrt{\frac{\delta E}{\rho D}} \quad (\text{管壁の弾性変形に起因する圧力波伝播速度}) \dots\dots\dots (9)$$

$$a_L = \sqrt{\frac{\frac{K}{\rho}}{\frac{K N A_L}{\rho g A \sin \theta}}} = \sqrt{\frac{g A \sin \theta}{N A_L}} \quad (\text{取付管での水の貯留に起因する圧力波伝播速度}) \dots\dots (10)$$

と表すこととすると、式(7)は、

$$a = \sqrt{\frac{\frac{K}{\rho}}{\frac{1}{1 - \frac{\rho}{K} g y} + \frac{\rho}{\delta E} + \frac{K N A_L}{\rho g A \sin \theta}}} = \frac{a_0}{\sqrt{1 - \frac{g y}{a_0^2} + \frac{a_0^2}{a_r^2} + \frac{a_0^2}{a_L^2}}} \dots\dots\dots (11)$$

と表され、連続の式は、次式のように表されることとなる。

$$\frac{\partial y}{\partial t} + V \left(1 - \frac{a^2}{a_L^2} \right) \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{a^2}{g} \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad \dots\dots\dots (12)$$

2.2 運動方程式

Fig. 2 に示すような、取付管が接続するプリズマチックな下水道管渠の微小区間 Δx の非定常圧力流れに、運動量の定理を適用すると、まずは、次式が得られる。

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho A V^2) \Delta x + \frac{\partial}{\partial t} (\rho A V) \cdot \Delta x = - \frac{\partial P}{\partial x} \Delta x + \rho g A S_0 \Delta x - \tau_0 S \Delta x \quad \dots\dots\dots (13)$$

$$; \quad \tau_0 = \rho g R S_f, \quad S_f = \frac{n |V| V}{R^{4/3}}, \quad \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \rho g \left(y - \frac{D}{2} \right) A \right\} \quad \dots\dots\dots (14)$$

ここに、 P : 全水圧、 S_f : 摩擦勾配、 S_0 : 管渠勾配、 S : 潤辺、 τ_0 : 壁面剪断応力、 n : マニングの粗度係数、 R : 径深。

水の圧縮性、管壁の弾性変形が運動量の流れに及ぼす影響は無視し得る程度であるので、式(13)を変形・展開・整理してゆくと、次の運動方程式が得られる。

$$\frac{1}{g} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{V}{g} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial x} - S_0 + \frac{n^2 |V| V}{R^{4/3}} = 0 \quad \dots\dots\dots (15)$$

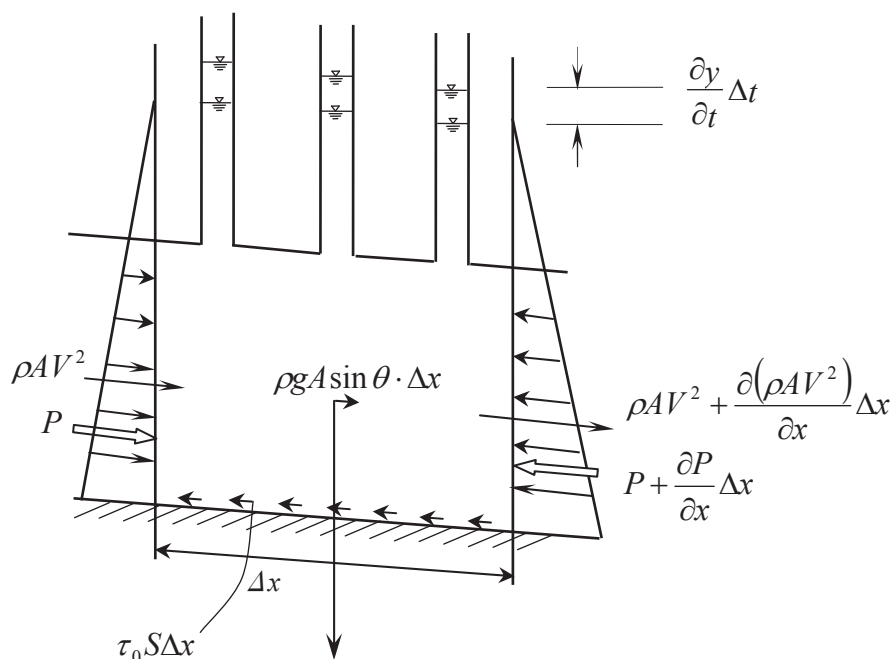


Fig. 2 A sewer pipe reach for the derivation of momentum equation.

2.3 圧力波伝播速度（微小擾乱の伝播速度）

水平に近い下水道管渠において、緩やかな流れである非定常圧力流れが流れているとする。水理量の定常成分に下添字 0 を、微小な非定常成分に上添字 ' を付すこととすると、

$$V = V_0 + V', \quad y = y_0 + y', \quad R = R_0 + R' \quad \dots\dots\dots (16)$$

と表され、これらを式(12)および式(15)に代入すると、次式を得る。

$$\frac{\partial(y_0 + y')}{\partial t} + (V_0 + V') \left(1 - \frac{a^2}{a_L^2} \right) \frac{\partial(y_0 + y')}{\partial x} + \frac{a^2}{g} \frac{\partial(V_0 + V')}{\partial x} = 0 \quad \dots\dots\dots (17)$$

$$\frac{1}{g} \frac{\partial(V_0 + V')}{\partial t} + \frac{(V_0 + V')}{g} \frac{\partial(V_0 + V')}{\partial x} + \frac{\partial(y_0 + y')}{\partial x} - S_0 + \frac{n^2(V_0 + V')^2}{(R_0 + R')^{4/3}} = 0 \quad \dots\dots\dots (18)$$

上式を展開・変形・整理してゆくにあたり、次の各項

$$V' \frac{\partial V'}{\partial x}, \quad V' \frac{\partial y'}{\partial x}, \quad V_0 \frac{\partial y'}{\partial x}, \quad V_0 \frac{\partial V'}{\partial x}, \quad V' \frac{\partial V_0}{\partial x}, \quad V' \frac{\partial y_0}{\partial x} \dots\dots\dots$$

が微小であり、定常流れに対しては次の各式

$$V_0 \left(1 - \frac{a^2}{a_L^2} \right) \frac{\partial y_0}{\partial x} + \frac{a^2}{g} \frac{\partial V_0}{\partial x} = 0, \quad \frac{V_0}{g} \frac{\partial V_0}{\partial x} + \frac{\partial y_0}{\partial x} - S_0 + \frac{n^2 V_0}{R_0^{4/3}} = 0, \quad \frac{\partial y_0}{\partial t} = \frac{\partial V_0}{\partial t} = 0$$

が成立することを考慮すると、次式が得られる。

$$\frac{\partial y'}{\partial t} + \frac{a^2}{g} \frac{\partial V'}{\partial x} = 0 \quad \dots\dots\dots (19)$$

$$\frac{1}{g} \frac{\partial V'}{\partial t} + \frac{\partial y'}{\partial x} = 0 \quad \dots\dots\dots (20)$$

式(20)を t で偏微分し、式(19)を x で偏微分して、両式を加え合わせると、次式が得られる。

$$\frac{\partial^2 y'}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y'}{\partial x^2} \quad \dots\dots\dots (21)$$

上式は、1次元波動方程式を表しており、 a が微小擾乱の伝播速度、すなわち圧力波伝播速度を表していることがわかる。

2.4 下水道管渠における非定常圧力流れの基礎式

ここで、2.1 で導出した連続の式 (12) における a 、 a_0 、 a_r 、 a_L について、これらが実流域の下水道管渠網においてどのような値をとるかについて検討する。

松山市街地流域において調査した結果を、Table 1 に示す。

これより、 $a \approx a_L$ であり、従って、 $V \left(1 - \frac{a^2}{a_L^2} \right) \frac{\partial y}{\partial x}$ は微小項として削除することができ、よって、実流

域の下水道管渠網における非定常圧力流れの基礎式は、次のように表されることとなる。

Table 1 Values of pressure wave speeds: a , a_0 , a_r , and a_L in the combined sewer pipe system of Matsuyama city

Pipes						Evaluated Values of a_0, a_r, a_L, a			
Sewer Pipe			Lateral Pipe			a_0 (m/s)	a_r (m/s)	a_L (m/s)	a (m/s)
D (m)	δ (m)	E (N/m ²)	d (m)	N (pipes/m)	θ (degree)				
0.25	0.028	28,000	0.15	1/14	25	1,446	1,771	13	13
0.5	0.042			1/17			1,534	28	28
1.0	0.082			1/20			1,515	61	61
2.0	0.145			1/24			1,425	133	132

注) その他共通条件:

- 水の密度: $\rho = 1,000 \text{ kg/m}^3$
- 水の体積弾性係数 (10°C): $K = 2.09 \times 10^9 \text{ (N/m}^2)$
- 水深: $y = 2 \text{ m}$
- 管渠の弾性係数: $E = 2.8 \times 10^4 \text{ N/mm}^2$ (鉄筋コンクリート管)

$$\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{a^2}{g} \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad \dots\dots\dots (22)$$

$$; a = \frac{a_0}{\sqrt{1 - \frac{gy}{a_0^2} + \frac{a_0^2}{a_r^2} + \frac{a_0^2}{a_L^2}}} \approx \sqrt{\frac{gA \sin \theta}{NA_L}} \quad \dots\dots\dots (23)$$

$$\frac{1}{g} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{V}{g} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial x} - S_0 + \frac{n^2 |V| V}{R^{4/3}} = 0 \quad \dots\dots\dots (24)$$

なお、上の下水道管渠における非定常圧力流れの基礎式は、渡辺ら^[6]が既に提案している、スロット・モデルの流れの基礎式と同一である。

3. 結 論

本論文では、はじめに、これまで明らかにされてこなかった、下水道管渠網における非定常圧力流れに対する流れの基礎式（運動方程式および連続の式）を、水の圧縮性、管壁の弾性変形、取付管における流出水貯留を考慮して、導出した。これより、これまで明らかにされてこなかった、下水道管渠網における非定常圧力流れの圧力波伝播速度の算定式（評価式）が、明確に示された。

次に、実流域の下水道管渠網における下水道管渠、取付管の諸量・諸元を調査した結果より、圧力波伝

播速度を算定した結果、おおむね 15～150 m/s の値をとるであろうことが分かった。

参 考 文 献

- [1] 川池健司・井上和也・戸田圭一：非構造格子の都市氾濫解析への適用, 水工学論文集, 第 44 卷, pp. 461-466, 2000.
- [2] 井上和也：洪水氾濫解析モデル, 京都大学防災研究所年報, 第 48 号 A, pp. 1-13, 2005.
- [3] 内田龍彦・川原能久：任意の境界条件を有する二次元浅水流の高精度解析手法の開発, 水工学論文集, 第 50 卷, pp. 799-804, 2006.
- [4] 関根正人・中村 淳・中村康朋：河川からの越水を伴う都市域の内水・外水氾濫過程に関する数値解析, 水工学論文集, 第 52 卷, pp. 865-870, 2008.
- [5] (財)下水道新技術推進機構：流出解析モデル利活用マニュアル -雨水対策における流出解析モデルの運用手引き-, (財)下水道新技術推進機構, 2003.
- [6] Pandit Saroji KUMAR・重田尚秀・岡 佳宏・渡辺政広・川崎 達：スロット・モデルの適用性の向上に関する検討, 水工学論文集, 第 52 卷, pp. 877-882, 2008.