愛媛大学教育学部紀要　教育科学　第38巻　第1号　169～182　1991

高等学校における微積分教育の研究〔III〕

―― 第三章　高等学校における微積分教育の思想 ――

石　川　廣　美
（数学教育研究室）

（平成3年4月8日受理）

端的にいえば，今日の我が国の高等学校での微積分教育は大学志向教育であって，例えば“何のための微積分教育か”といったような，高等学校としての微積分教育の根源的な問題には無関心である。否，無関心を装っているというのが本当かもしれない。そのような無関心さは，もはや高等学校における微積分教育の体質的思想的欠陥となりつつあるように思われる。

そこで本研究では，一章を興し《高等学校における微積分教育の思想》という章を設けたのである。固より，筆者はこのような深遠なテーマについて高邁な理論を構築する力があると自負しているのでは決してない。筆者は，前章までに考察した旧制の中学校や高等女学校ならびに今日の高等学校における微積分教育の歴史を踏まえ，その反省の上に立って将来を展望し，将来の微積分教育の実践の思想にいささかでも貢献できる考察ができればと考えているに過ぎないのである。

§1.　微積分教育の目的

本章では，まず最初に，高等学校における微積分教育の目的について考察することにしたい。この高等学校における微積分教育の目的は，言うまでもなく，「高等学校の目的」の中で，さらに溯って「教育の目的」の中でみていかなければならないであろう。教育の目的や高等学校の目的については様々な論議がされているようであるが，ここではそれらを専ら教育基本法および学校教育法によってみていくことにする。

教育基本法は教育の目的を次のように述べている。

第一条（教育の目的）

教育は，人格の完成をめざし，平和的な国家及び社会の形成者として，真理と正義を愛し，個人の価値をたっとび，勤労と責任を重んじ，自主的精神に充ちた心身ともに健康な国民の育成を期して行われなければならない

ところで，かつて数学教育界は，この第一条にいう教育の目的を次のように三段に分けて考えたのであった。そして，人格の内容を下の(イ)～(ホ)ととらえ，それに忠実に則って数学教育の目的を定めようとしたのであった。[(1)]

㈠　人格の完成をめざし　・・・・・教育全体の在り方を示す

㈡　平和的な国家及び社会の形成者として　・・・・・・人格の，社会に対する関係を示す

(三) (イ) 真理と正義を愛し
(ロ) 個人の価値をたっとび
(ハ) 勤労と責任を重んじ ・・・・・ 人格の内容を示す
(ニ) 自主的精神に充ち
(ホ) 心身ともに健康な
国民を育成する

実際，学制改革によって昭和23年（1948）に誕生した新制高等学校の最初の学習指導要領である『中学校高等学校学習指導要領　数学科編（試案)』[2]（昭和26年）は，数学科の一般目標を次のように述べているのである。(傍線筆者)

(1) 数学の有用性と美しさを知って，真理を愛し，これを求めていく態度を養う
(2) 明るく正しい生活をするために，数学の果している役割の大きいことを知り，正義に基づいて自分の行為を律していく態度を養う
(3) 労力や時間などを節約したり活用したりする上に，数学が果している役割の大きいことを知り，これを勤労に生かしていく態度を養う
(4) 自主的に考えたり行ったりする上に，数学が果している役割の大きいことを知り，数学を用いて自主的に考えたり行ったりする態度を養う

（以下略）

今日からみれば，数学教育のこのような目標の掲げ方には無理があり，自然さを欠くように思える。最も根本的には，教育という人間の精神活動の目的や目標が，法律等によって規定し得るものかどうかが問われるのであろうが，それはさておくとしても，この教育基本法の第一条の眼目である「教育は人格の完成をめざす」というところの，その人格の内容は本当に上の(イ)〜(ホ)なのであろうか。そして結局「人格の完成をめざす」とはどういうことであろうか。

これは極めて奥深い哲学的心理学的，そしてまた社会学的概念でもあろうことは承知するが，ここではそれを教育基本法制定時の趣意に従うに止めたい。実は，昭和22年の文部省訓令第四号は〈教育基本法制定の要旨〉の中で次のように述べているのである。

思うに，教育は，真理を尊重し，人格の完成を目標として行われるべきものである。人格の完成とは，個人の価値と尊厳との認識に基づき，人間の具えるあらゆる能力を，できるかぎり，しかも調和的に発展せしめることである。

これは，古来いい慣らされた言葉でいえば「人は教育によって人となることができる」という哲学に基づくもののように思われる。

そもそも数学が教育の内容となる理由は，その実用性と共に，真理を愛し科学的合理的精神に満ちた人間の育成に寄与することができるというところにあるとされてきた。我が国の場合は，小学校のみならず中等学校においても，数学の実用性という面が強く意識されてきたことは否めないが，ヨーロッパでは，古くから，数学は人格の形成に大きく寄与するものであるとする考え方が強く，その伝統は今日にまで受け継がれてきているといわれている。

教育の目的が「人格の完成をめざす」ものであるならば，高等学校における微積分教育の目的もまた然りであり，高等学校における微積分教育は，この目的達成のための一翼を担うものであると考えるのが当然であろう。

次に高等学校の目的についてみてみよう。学校教育法第四十一条は，高等学校の目的を以下のように述べている。

高等学校は，中学校における教育の基礎の上に，心身の発達に応じて，高等普通教育及び専門教育を施すことを目的とする

ところで，相良惟一はこれについて次のように解説している。

高等学校は，中学校における「中等」普通教育の基礎の上に，「高等」普通教育および専門教育を施すもので，学校制度上は中等教育の前期としての中学校につづく後期を担当する。特に注目すべきことは，高等学校が「高等普通教育及び専門教育」を施すことを目的として二重の目的をもっていることである。このことは高等学校が学校制度上大学に接続する学校であることには違いないが，性格として大学への準備段階でないこと，つまり高等学校教育をもって中等教育の完成としていることを示すものである。(3)

この相良のいうように，高等学校の性格は，大学への準備段階ではなく，高等学校の教育をもって中等教育を完成させる性格のものと考えるのが正当であろうと思われる。従って，高等学校の数学の性格もまた然りであり，高等学校における微積分は大学への準備段階としての微積分ではなく，高等学校の微積分としての一応のまとまりをつけるものと考えるべきであろう。

しかしながら，昨今の高等学校の微積分教育は，大学教育のための準備教育，いわばかつての予科教育のようになり，その本来の性格に悖るものとなってはいないだろうか。これはひとり我が国だけの傾向ではない。例えば，十余年前，アメリカの高等学校での数学教育について，M. クラインは，やや皮肉ぎみに，次のように述べているのであるが，その状況は今日でもそれほど変わっていないと思われる。

我々の高等学校のカリキュラムが19世紀の遺物であることを知っている人は多くはないと思われる。それは限られた知識の大学教授によって作られ，大学がより高い水準の数学教育の立案に着手することを決めたとき，高等学校に手渡されたものである。高等学校は親切にも，これらのコースを引き取って，従順な子供のように，生徒を大学の勉強のために教え準備させる役割を快く受け入れた。かくして「大学に結び付いた教育（educating the college bound）」が決まり文句となって反復された。この過去の亡霊が付きまとい我々を悩ませて，それを振り払うことができず，自由になれそうにない。(4)

諸外国もそうであったが，我が国の数学教育も，数学教育の現代化にみられたように，大学からの，すなわち数学という学問からの要請には従順であった。そして今日，高等学校の数学教育は，否，小学校の算数教育でさえも，大学に結び付いた教育を志向し過ぎてきてはいないだろうか。高等学校の数学教育は，上にみた教育の目的ならびに高等学校の目的を認識し，その本来の目的に則った教育を行っていかなければならない。高等学校における数学教育は数学による教育であるが，それは人間教育の一環に他ならない。

高等学校における微積分教育の目的は，高等学校としての一応のまとまりのついた微積分について，その概念を修得させて，微積分の威力・すばらしさ・面白さを感得させ，そのことを通して，先にみた人格の完成に寄与していくものであると筆者は考えている。

§2.　微積分の教材としての価値

大正から昭和にかけての先覚の努力がようやく実って，昭和17年（1942）に初めて微積分が

中等教育に細々と導入されたのであったが，それが今では高等学校までの数学教育の頂上に大きく聳え立つ教材となっている。そして，小学校・中学校・高等学校の数学教育はこの頂上にある微積分を目指してひた走っている。かつて矢野健太郎は「小学校の上級から中学校，高等学校の初級へかけて，大部分の生徒が息が切れるようなスピードで教授される数学は，じつはこの微積分を理解するためであったといってもいい過ぎではない」(5) と述べていたのであるが，それほど我が国の数学教育は，微積分を目指して，微積分への道をひた走ってきたのである。

それでは，これほどに微積分が重視されてきた理由は何であろうか。そもそも微積分は，これを創案したニュートンやライプニッツの意図の通り，否，それを遥かに越えて，力学を語る言語としてはもとより，広く近代文明を創る道具として極めて有用なものであった。そして今日，微積分はもはや現代の数学ではないが，それでもこれは現代の科学文明にとって有用なものであり，かつこれからもそうであり続けるであろう。M. カチ等は「現在でもなお，力学の法則を書き表したり物体の運動を計算したりするのに，微分積分法より，概念的にも技術的にもまさっているものはないと確信できる」(6) と述べている。加えて，数学の中での解析学の地位は，秋月康夫の言葉を借りれば「今日といえども数学の大宗」(7) なのであって，微積分は直接的にその解析学につながるものである。さらにいえば，微積分こそはより進んだあらゆる分野の数学の基礎として極めて重要なものである。すわなち，微積分を差し置いては，数学の大宗である解析学を修めることができないばかりか，他の分野の数学を修めることも不可能なのであって，ここに微積分の重要性が存するのである。

このような微積分そのものの実用性と，より進んだ数学を修めるための基礎としての重要性とが，高等学校において微積分が価値ある教材であるとされる大きな理由となっていることは確かであろう。数学という教科に限らず，どの教科にあっても，その教科での教材は実用性とともに学問の基礎として重要なものが選定されるのは当然のことだからである。将来，大学の理工学部系に進む生徒は勿論であるが，他の学部系に進む生徒であってもその幾割かの者，そしてまた高等学校から技術者になっていく者等にとっては，高校学校の微積分はこのような意味で価値のあるものに違いない。

しかしながら，一方において，かなり多くの生徒にとっての高校学校での微積分の価値は，その実用性とか，ましてや，より進んだ数学を修得するための基礎として重要であるというところにそのままあるのではなく，このことは実に背景にあって，その背景の下での遊戯性にあると考えられるのである。実際，多くの生徒は高等学校での微積分を基礎としてさらに進んだ数学を学習するということはないのである。また多くの生徒にとっては，学窓を離れてからは，恐らく，微積分は一生に一度も使うことのないものなのである。

高等学校での微積分の中でよくみられるものは，微分法を用いて関数の極値を求めたり，積分法を用いて面積や体積等を求めることであるが，それは実用になるわけではない。しかも，関数の極値を求めたければ，何も微分法を用いなくても，独立変数の値を小刻みにとって関数値を計算し，点をつないでグラフを描けば求まることである。面積を知りたければ，図形をくりぬいてその重さをはかることによって求められるであろう。立体の体積は，その立体の模型を作り水につけることによって求められるであろう。このようにする方が微積分法を用いるよりも実際的かも知れない。

しかしながら，関数の極値や図形の面積や体積等が微積分によって求められるということは

すばらしいことであり面白いことである。その微積分の威力・すばらしさ・面白さは心ある人を堪能させずにはおかないであろう。微積分には実用的な面もさることながら，知的遊戯としての豊かな応用・豊かな展開が考えられるのである。そこのところに高等学校の微積分の教材としての大きな価値があると思うのである。

微積分は，知的遊戯として学習者を堪能させて余りあるすぐれた素材なのである。

§３．　微積分の道具性

本章の§１で述べた微積分教育の目的を達成し，また§２で述べた微積分の価値を認識させるためには“問題を解く”ということが是非とも必要である。何故ならば，微積分の概念を修得させるということも，微積分の威力・すばらしさ・面白さを感得させるということも，それは問題を解くということを抜きにしては考えられないことだからである。先にＮＣＴＭ（全米数学教員協議会）は「問題解決は1980年代における学校数学の焦点でなければならない」[8]と勧告したのであったが，“問題を解く”ということは，殊更にある年代においてのみ強調されるものではなく，その重要性はいつの時代の数学教育においても認識されていなければならない。

ここで大切なことは，数学教育での問題を解くというその目的は，数学者が問題を解く目的と本質的に異なっているということである。数学者が問題を解くのは，未だ解決されていない問題があって，その未知の問題を解くことが目的であるが，数学教育では未だ解決されていない問題を解くことが目的では決してない。高等学校における微積分教育での問題を解く目的は，そのことによって微積分の概念を修得させ，微積分の威力・すばらしさ・面白さを感得させることにある。

例えば，よくみられる

３次曲線　$y=x^3-6x^2+9x+5$　のグラフを描け

という問題を考えてみよう。もしも２次曲線　$y=ax^2+bx+c$　のグラフならば，$y=ax^2$ のグラフを基にして，平行移動という方法によって容易に描くことができる。勿論，それはこの二つのグラフが合同だからである。しかしながら，上の３次曲線のグラフは　$y=x^3$　のグラフと合同ではない。従って，$y=x^3$　のグラフを基にして，それを平行移動して描こうという方法は通用しない。そこで威力を発揮するのが微分法であって，上のような問題を解かせる真の狙いは，微分法を修得させるとともに微分法の威力・すばらしさ・面白さを実際に感じとらせることにあるのである。３次曲線を描くこと自体は何ほどの役に立つものでもないことは既に述べた通りである。

ところで，平林一栄は次のように述べているが，これは今日の高等学校における微積分教育にとって，傾聴すべきもののように思われる。

> 「数学は，問題解決の方法・道具として生まれた」という命題は，歴史的にも心理発生的にも正しいにも拘わらず，数学教育ではしばしば無視されてきた。それは，人間は道具を道具として使うだけでは満足せず，それを知識として洗練したり，体系化したりすることに強い興味をもっているからであろう。洗練された知識からは，その道具性がほとんど認められないことが多いのは，あたかも美術品としての刀剣から，それが人殺しの道具として造られたものであったことを意識できないのと同様であろう。[9]

高等学校における微積分教育が，微積分を体系化することに興味をもち，それに努めるのは当然のことであろう。しかし，それが微積分の道具性を見失うものであってはならない。微積分を体系化すること自体が大切な数学教育活動であることはいうまでもないが，微積分という道具を，そこで実際に使えるように洗練し整備するために体系化するのだという認識が必要ではなかろうか。平林は，微積分が美しく体系化されることによって，その道具性が意識できなくなるという側面があると，我々に向かって警鐘を鳴らしているように思えてならない。

一方，W．H．フェラーは，数学を

(1)　形式的論理的内容

(2)　直観的背景

(3)　応用

の三つの相に分け，どの分野の数学でも，その全体の構造や魅力は，この三つの相を正しい関係において考えなければ鑑賞できないであろうと述べているが，(10) 我々の高等学校での微積分教育においても，微積分を，できるだけこのような三つの相の全体についての関連で指導していかなければならないであろう。

微積分の道具としての切れ味の威力・すばらしさ・面白さは，それを自然科学や工学等の問題に応用することによってこそ鑑賞されるものであるが，とかく昨今の微積分教育は，この領域への拘わりを敬遠しているようにみえる。実際，微積分の応用といっても，それはせいぜい極値を求めたり，曲線で囲まれた図形の面積を求めたりすることであって，数学内での応用に止まっているのである。第一章でみたように，かつて中等教育に微積分を導入しようとしていた頃の先覚の微積分教育案には，物理的な領域での応用ということにかなりの意を用いていたことを思い起こすのである。

高等学校におけるこれからの微積分教育は，微積分の道具性ということをより強く意識し，微積分という道具を実際に応用する場面を豊富に提供して，微積分の威力・すばらしさ・面白さを一層感得させるものとしていかなければならないと思うのである。

§4．　微積分教育での「学」と「術」

周知のように，微分と積分とはその可能性と実際の具体的な計算とについて対照的である。すなわち，微分可能性は連続性よりも厳しい条件であるが，しかし具体的な関数について実際に微分することは容易である。他方，連続関数は例外なく積分可能であるが，しかし具体的な関数について実際に積分することは，初等的な関数についてさえ困難である。実は，ここには高等学校における微積分教育にとっての「学」と「術」の問題が横たわっているように思われる。

ところで，平林一栄は数学教育における「学」と「術」という側面に注目して，極めて示唆に富む考察をされている。(11) その中で平林は，最近の学校数学は「学」を志向しすぎて「術」の側面を軽視する傾向があることを指摘している。そして平林はまた，20世紀初頭のあの数学教育改造運動は「学」に対する「術」の精神の復興をめざしたものであるということができそうだと述べている。この平林の見解はまさに卓見であり，筆者は，今日および将来の数学教育を展望するとき，数学教育はこの「学」と「術」との問題に最も留意していかなくてはならないと思っている。

すでに第二章でも述べたように，我が国の数学教育は「学」を志向し過ぎて反省はしたが，しかし依然として「学」を志向する傾向は根強いのである。数学教育では，まず学習指導要領が数学者とその一族によって作られ，次に教科書や参考書も数学者とその一族によって作られ，そして数学の教師によって指導されるのである。従って，殊更に「学」への志向を意識しないでも，ことは自然と「学」の性格をもった方向に進むのである。このことを十分に自覚しなければ，数学教育は，やがて，数学者とその一族の，数学者とその一族による，数学者とその一族のための教育となりかねないであろう。

さて，それでは「学」とは，そして「術」とは一体何であろうか。筆者には残念ながら「学」の何たるかを，また「術」の何たるかを定義する力はない。従って勿論，「学」と「術」との区別を明確にしてみせることはできない。そこで，筆者は，平林の上の論考の中での教示に従って，『アリストテレス全集Ｉ，分析論後書』の中にある加藤信朗の〈訳者註〉，すなわち

“技術”も“科学”も原因にもとづく事物の認識であるが，技術は事物の制作に関わり，科学は制作に関係せぬ，事物の存在の観照に関わると考えられる (12)

を拠り所とし，ある種の慄きをもちながらも，この言葉の中の“技術”を「術」，“科学”を「学」として理解していくことにしたい。

このような理解に基づいて，高等学校における微積分教育での「学」とは何か，「術」とは何かを考察してみることにする。ここではまず微分係数を取り上げてみよう。

周知のように

c およびその近くで定義されている関数　$f(x)$ について

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$$

の極限値が存在するとき，$f(x)$ は $x=c$　で微分可能であるといい，この極限値を $f'(c)$ で表す。すなわち

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}=f'(c)$$

この $f'(c)$ を $x=c$ における $f(x)$ の微分係数というのであった。この微分係数の定義を，ここでは次の二つの事柄に分けて考えてみたい。

(i)比　$\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}$　において，x が c に限りなく近づいたときの極限値の存在が問題であるが，上の比は x が c に限りなく近づいていったときのその究極においては

$$\frac{0}{0}$$

となるようにみえる。

(ii)しかしながら，具体的な関数，例えば

$f(x)=x^2$，$f(x)=x^3$

について，$x=c$　における微分係数を実際に計算すると

$$f'(c)=\lim_{x\to c}\frac{x^2-c^2}{x-c}=\lim_{x\to c}(x+c)=2c$$

$$f'(c)=\lim_{x\to c}\frac{x^3-c^3}{x-c}=\lim_{x\to c}(x^2+cx+c^2)=3c^2$$

となって，容易に求めることができる。

数学史によれば，微積分学を確立するための最初の課題の一つは(i)での極限の不思議な姿を解明し，(i)と(ii)との間のギャップを埋める理論を構築することであった。そのために膨大な哲学が生まれたのであった。而して，この理論を完成したのはあの A. L. コーシー（1789〜1857）であって，それはやっと19世紀になってからのことであった。彼は，それまでの全ての人が固執し，そのために失敗していったところの，限りなく近づいてその究極にまでいってしまうという観念を捨ててしまって，限りなく近づいていくその途中の状態をみることにしたことは周知の通りである。

さて，(i)は「事物の制作に関係せぬ，事物の存在の観照に関わるもの」とみることができ，(ii)は「事物の制作に関わるもの」とみることができるのではなかろうか。そうだとすれば，この例では

微分係数の存在について観照するのが「学」

であり

具体的な関数について，実際に微分係数を求めるのは「術」

であるということができよう。

このように考えるならば，極限についてその存在の観照に関わるところはすべて「学」ということになろう。例えば，高等学校での定積分の定義，すなわち

極限値

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,\Delta x \qquad \text{ただし,}\quad \Delta x=\frac{b-a}{n},\ x_k=a+k\,\Delta x$$

が存在するとき，関数 $f(x)$ は区間［a，b］において積分可能であるといい

これを

$$\int_a^b f(x)dx$$

で表す

では，極限値

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,\Delta x$$

の存在の観照に関わるのは「学」である。

そして，具体的な関数について，実際に定積分の値を計算して求めていくのは「術」ということになろう。

また，例えば，平均値の定理，すなわち

関数 $f(x)$ が閉区間［a，b］で連続，開区間（a，b）での微分可能ならば

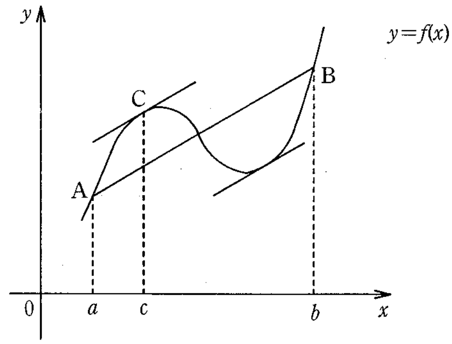
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c) \qquad (a<c<b)$$

となる c が存在する

は，まさに「学」そのものであろう。この平均値の定理や，あの代数学の基本定理のような，いわゆる存在定理といわれるものは，そのすべてが「学」そのものといえよう。

ところで，微積分教育の中での「術」は“学あっての術”でなければならないことは当然であろう。しかしながら，存在の観照に関わる本格的な「学」を志向することは，高等学校での

微積分教育では到底できることではなく，すべきものでもないことは上にみた若干の例によっても明白であろう。従って，高等学校における微積分教育での「学」は存在の観照が図形的直観的にされるものとならざるを得ないであろう。例えば，上の平均値の定理をもし取り扱うのであれば，あの実数 c の存在は，これを右のような図によって直観的に観照するということである。



高等学校での微積分は今日のみならず，21世紀においても「術」であるべきだと筆者は考えている。そして，それは上のような意味での「学」に立脚して行われていくものである。

§5.　微積分の内容構成

高等学校における微積分教育では，微積分の基礎的な概念にまで深入りして，数学的厳密性を志向すべきではない。けれども，そのことによって微積分教育はその意義を失うものではない。高等学校における微積分教育は“微積分学”を建設することではないからである。

もともとニュートンとライプニッツによって創案された頃の微積分は，数学的に厳密な基礎の上に構築されたものではなかったのであった。それでも，力学をはじめ自然現象等の解明に多用され見事な成果をあげたのであった。微積分は多用される中で，漸く19世紀になって，今日のような厳密なものが完成したのであった。このような歴史的事実を省みるならば，高等学校においては直観に基づく微積分を構築し，微積分の計算技法に習熟させて，知的遊戯としての豊かな応用を体験させることが主眼とされてよいはずである。数学的厳密性のようなものは，こうした体験を経ての後に，その必要が生じた時にその時点で考えられるべきものではなかろうか。

米山国蔵は次のように述べている。

> 数学において最も理解しやすく，最も明瞭な部分は，必ずしも最も簡単なもの，最も初めに来るものではなく，むしろ最も簡単なものと最も複雑なものとの中間に位置するものであるように思われる。あたかも最も見やすい物体は最大なものでも最小なものでもなく，また非常に遠いものでも非常に近いものでもなく，これらの中間のものであるように，最も理解しやすい観念は，非常に複雑なもの，非常に簡単なものではないのである。(13)

米山のいうように，微積分も初めの方にある部分と後の方にある部分との中間にある部分が最も明瞭な理解しやすい部分であり，高等学校での微積分はそこで展開されて十分ではないだろうか。

これまでの数学教育は，それが挫折すると，その原因が数学的な基礎部分に深入りし過ぎたことにあっても，そのことを反省する以上に，内容を縮小し削除するということによって対処しようとしてきた。そのような姿勢が，豊かな展開・豊かな応用のできにくいものとし，学校数学を魅力のない面白くないものにしてきたように思われる。我々は，先に，20世紀初頭のあの〈数学教育改造運動〉は，数学的な基礎部分には深入りせず，学校数学の豊かな展開と実用化を志向して花開いたが，20世紀後半の〈数学教育現代化運動〉は，数学的な基礎部分に深入

りし，学校数学の数学化を志向して挫折したのをみてきたのであった。

さて，このような歴史的反省の上に立って，筆者は，高等学校におけるこれからの微積分教育は，以下の二つの姿勢の下に行われていくべきであると考えている。

まず第一は，いわゆる微積分全体の内容の内の中間部分において，高等学校での微積分としての一応のまとまりをつけ，豊かな展開・豊かな応用が期待できる内容構成にしていくことである。

そのような姿勢に立てば，高等学校において最も教養的文科的コースでも，微積分は微分と積分との両方が指導内容とならなければならない。分析と総合は共に科学における重要な方法であるが，いわば，微分はその分析に相当し，積分は総合に相当するものである。この両方が指導内容となってこそ，まとまりのついた豊かな展開・豊かな応用が期待でき，§1でみた高等学校の目的に添うことになるのである。すでに第一章および第二章でみたように，とかく，高等学校におけるこれまでの微積分教育では，微分は指導内容としても，積分は指導内容とはしなかったり，または軽く扱うという姿勢がとられがちであったのであった。最も教養的文科的なコースでも，このような姿勢はとるべきではないと筆者は考えるのである。しかし勿論，そこにおいての微積分の扱い方は極めて直観的で，関数の範囲も整関数に限定してよいであろう。

そして，高等学校で最も数学を多く学習するコースでは，現行の内容の上に，少なくとも次の三つの内容を加えることが考えられなければならないであろう。

(1) 関数の範囲を逆三角関数にまで拡大して，初等関数についての微積分を完結すること

我々は先に第二章において，今日の高等学校が発足した当初の『解析Ⅱ』では，この逆三角関数を含むすべての初等関数についての微積分が取り扱われていたのをみたのであった。しかしながら，それ以降の高等学校における微積分教育では，初等関数のうちで，次の実線で囲んである逆三角関数の微積分だけが内容から除外されてきているのである。

- 初等関数
  - 代数関数
    - 有理関数
    - 無理関数
  - 初等超越関数
    - 指数関数
    - 対数関数
    - 三角関数
    - 逆三角関数

これは，高等学校において微積分に一応のまとまりをつける意味からは不自然であろう。

さらに，例えば

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\sin^{-1}\frac{x}{a}\qquad(a>0)$$

$$\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}\qquad(a\neq 0)$$

等は，重要な公式であり，その応用も非常に広範なものであることを留意すべきであろう。

(2) マクローリンの展開を加え，関数が多項式によって近似されることを認識させること

これは微積分教育にとって最も重要な課題の一つである。

今日までの高等学校における微積分教育では，例えば，不定形

$$\frac{0}{0} \qquad \frac{\infty}{\infty} \qquad \infty-\infty$$

の極限を求める場合では，専ら次のような特殊な技巧を用いる指導に終始してきている。

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sqrt{1+x}-1}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sqrt{1+x}+1}{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)}\cdot x$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot(\sqrt{1+x}+1)=2$$

これは，決して微積分の，そしてまた微積分教育の本筋をいくものではないであろう。ここではマクローリンの展開を利用して

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sqrt{1+x}-1}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\cdots\cdots}{\dfrac{x}{2}-\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{x^3}{16}-\cdots\cdot}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{x^4}{120}-\cdots\cdots}{\dfrac{1}{2}-\dfrac{x}{8}+\dfrac{x^2}{16}-\cdots\cdots}=2$$

とするのが本筋であり自然ではなかろうか。

一般に，関数

$$f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$$

の極限を求める場合には，$p(x)$, $q(x)$ をマクローリン展開して

$$f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots}{b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots}$$

とし，有理分数関数の極限を求めることに帰着させるのが数学的には勿論のこと，数学教育的にも正当であるように思われる。特殊な技巧はこのような方法が無理な場合に指導されるものであろう。

ところで，このマクローリン展開も，極めて直観的にではあるが，今日の高等学校が発足し当時のあの『解析Ⅱ』では内容となっていたのであった。そこでは

> e^x, $\sin x$, $\cos x$ はあらゆる x の値に対して，$(1+x)^m$（m は任意の実数），$\log(1+x)$ は絶対値が1よりも小さい x の値に対して，いずれも
>
> $$f(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots\cdots\cdots\cdots$$
>
> の形の無限級数に書かれることが証明されている。

というように扱い，これに基づいて，次のような五つの基本的な関数の展開が取り上げられていたのであった。

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\cdots$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots\cdots$$

$$\sin x=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots\cdots$$

$$\log(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots\cdots \qquad |x|<1$$

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\cdots\cdots \qquad |x|<1,\ (m \text{ は実数})$$

筆者は，この『解析Ⅱ』の時代のような扱い方が，今日においてもなお有力な実際的な扱い方であり，このような扱い方で導入すべき内容であると思っている。テーラーの定理，すなわち

関数　$y=f(x)$　が閉区間［a，b］でn－1回微分可能で，$f^{(n-1)}(x)$ は［a，b］で連続かつ（a，b）で微分可能であるとき

$$f(b)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(b-a)+\frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1}+R_n,$$

$$R_n=\frac{f^{(n)}(a+\theta(b-a))}{n!}(b-a)^n, \quad (0<\theta<1)$$

となるθが存在する

というようなものに，理論的には勿論のこと，形式的にも立ち入ることは避けなければならないと考える。

(3) 特異積分を加え，これによって1変数関数に関する微積分の一応のまとまりをつけること

これについても理論的な面に立ち入ることは避けなければならない。例えば，関数 $f(x)$ が区間（a，b］で連続で，$x=$a で不連続であるとき

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx \quad (\text{右辺が存在するとき})$$

と定義し，具体的な関数について，右辺の極限値の存在を確認し，そのようにして特異積分の計算をしていくという扱い方をすべきである。無限積分，例えば

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{N\to+\infty}\int_a^N f(x)dx$$

についても同様である。

勿論，このような特異積分を導入しても，例えばベーター関数やガンマー関数等を直ちに取り上げようとすることは適切ではないであろう。それよりも，積分概念を拡張していくという，数学的な思想に触れることが大切であろうと思う。

高等学校における微積分教育が第二にとるべき姿勢は，微積分の内容を微分方程式を中核に意識して構成することである。そもそもニュートンは，万有引力の法則を確立するために，力

学や運動学の問題を微分方程式に立式し，それを解く必要から微積分を創案したのであった。微積分はその発祥からも応用上からも微分方程式を中核に意識するものであって，我々が通常，微分，積分，微分方程式などといっているのは，教育的指導順序のための便宜的分類に過ぎない。微積分の全体としてのまとまりや構造，そして，その威力・すばらしさ・面白さは微分方程式を中核にしてこそ感得させられるものではなかろうか。

然るに，平成元年（1989）に告示された学習指導要領は，それまであった微分方程式を削除してしまったのである。これは全く不可解である。微分方程式を復活させること，それは微積分教育にとってまさに“焦眉の急”であるといいたい。

しかし，その場合の微分方程式は従前の程度でよいというわけではない。第二章でみたように，従前の学習指導要領では，最も多く数学を学習するコースにおいてさえも，20余年にわたり，微分方程式はほぼ一貫して

微分方程式の意味

$\frac{dy}{dx}=ky$ （kは定数）の程度の微分方程式を解くこと

の二点に極めて小さく限定されたものになっていたのであった。微分方程式の意味を取り上げているのはよいことであるが，しかし，微分方程式の意味が理解されるのは，問題（素材）から微分方程式を立式し，その微分方程式を解き，その解かれた解を解釈することによって初めの問題が解決されるというこの一連の過程を経てのことである。解く微分方程式の種類が従前のようにあまりにも小さく限定されると，微分方程式に立式する素材が極めて限定された範囲のものとならざるをえない。例えば，あの身近かな単振動を素材とすることすらできないのである。何故ならば，それを立式すれば，定数係数ではあるが，2階の微分方程式となるからである。従って，従前のように，微分方程式の種類を小さく限定しては，微分方程式の意味は理解され難いのである。

微分方程式の種類をあまりにも小さく限定してしまっては，微分方程式が微積分の中核とはなり得ないばかりか，単なるアクセサリーにしか過ぎなくなるであろう。筆者は，高等学校において最も多く数学を学習するコースでは，次の種類の微分方程式を取り上げるのがよいと考えているのである。

(イ) 変数分離形，1階の線形微分方程式，およびこれらに容易に帰着させることができる程度の微分方程式

(ロ) 定数係数の2階線形微分方程式

この(ロ)の微分方程式の同次形については，すでに高等学校での指導内容となったことがあるのは，第二章でみてきたところである。

尚，高等学校において，最も教養的文科的なコースでの微分方程式は，整関数の範囲の積分で解かれる程度の

簡単な変数分離形

に止めてよいであろう。しかし，ここでも微分方程式が微積分の中核となるべきことには変わりはない。

筆者は，これからの高等学校における微積分の内容構成は，以上のような二つの姿勢の上に立って行われなければならないと考えているのである。この微積分の内容は，第二章でみたあのケンブリッヂ報告のようなものと比較すれば，著しく水準の低い控えめなものとみえよう。

例えば，多変数関数の微積分は高等学校における微積分教育にとって，可能性のある魅力のある教材であることは承知している。しかし，その一部分だけを導入するのであれば，それは高等学校における微積分としての一応のまとまりをつけるという意味から不適当である。また，まとまりをもたせて相当な量の内容を導入するとすれば，他の教材を大幅に縮小するか削除しなければ不可能であろう。いずれにしても，多変数関数の微積分を高等学校の内容とすることは，早急にはできることではないように思われる。それよりも，高等学校における微積分教育は，1変数関数について，充実したまとまりのあるものとしていくことが肝要であると筆者は考えているのである。

確かに，一切の制約・条件を無視すれば，あのケンブリッヂ報告のような微積分教育案を掲げることも可能であろう。しかし，およそ教育は，教育的社会的な制約・条件を無視して行うことは不可能である。教育的社会的な制約・条件を考慮しない微積分教育案は，いつの時代にあっても，所詮は fantasy でしかないのである。

参 考 文 献

(1) 小林善一，井上義夫：『数学教授法』，共立出版，1974, P. 28

(2) 文部省：『中学校高等学校学習指導要領　数学科編（試案)』，中部図書，1951, P. 1

(3) 相良惟一：『精解学校六法（昭和61年度版)』，協同出版，1985, P. 53

(4) Morris Kline :「NACOME, Implication for Curriculum Design」, Mathematics Teacher, Octover, 1976, P. 453

(5) 矢野健太郎：「Finite Mathematics」，数学セミナー，Vol. 4, No. 4, 日本評論社，1965, P. 1

(6) マーク・カチ，スタニスラウ・ウラム：石原繁訳：『数学の展開』，現代の教養 4，サイエンスクロペディアブルタニカ日本支社，1968, P. 314

(7) 秋月康夫：『数学的な考え』，明治図書，1973, P. 187

(8) MCTM :『An Agenda for Action, Recommendations for School Mathematics of the 1980s』, NCTM, 1980

(9) 平林一栄：『数学教育の活動主義的展開』，東洋館出版社，1987, P. 10

(10) W. Feller :『An Introduction to Probatility Theory and Its Applications, Volume 1』, John Wiley, 1968, P. 1

(11) 平林一栄：『数学教育における「学」と「術」の理念』，中国四国数学教育学会，数学教育学研究紀要，第7号，1981, PP. 81～84

(12) アリストテレス；加藤信朗訳：『アリストテレス全集，分析論後書』，岩波書店，1971, P. 773

(13) 米山国蔵：『数学の精神・思想・方法』，東海大学出版会，1976, P. 159