愛媛大学教育学部紀要　教育科学　第38巻　第2号　135～161　1992

高等学校における微積分教育の研究〔Ⅳ〕

―― 第四章　個個の具体的な内容の指導に関する実践的考察（その1）――

石　川　廣　美
（数学教育研究室）

（平成3年9月17日受理）

この《高等学校における微積分教育の研究》の冒頭で述べた目的を達成するためには，前章までの考察に加えて，個個の具体的な内容の指導に関する考察も不可欠であろう。そこで，本章では，次のような10項目の具体的な内容を取り上げ，それらの指導と取り扱い方についての実践的考察を行うこととした。

§1.　関数の連続について
§2.　合成関数の導関数について
§3.　変曲点について
§4.　平均値の定理について
§5.　自然対数の底eの導入について
§6.　対数微分法・対数積分法について
§7.　不定積分の定義について
§8.　定積分の定義について
§9.　定積分での置換積分法について
§10.　$\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ について

実は，筆者はかなりの期間にわたって，高等学校の先生方の数学教育の研究に拘わってきた。その間に，微積分の個個の具体的な内容の指導や取り扱い方についての，実践上の問題を問われてもきたのであった。上記の10項目は，それに筆者の考える問題点を加え，これからの高等学校における微積分教育を展望して，発展的に整理して取り上げたものである。高等学校の微積分教育は，上記の10項目のそれぞれについて，その中にある具体的な問題に対する，正鵠を射た，しかも裃を脱いだ真に実践的な解答を求めていると考える。

そこで，本章での考察は，形式には拘らず，問いに答える形をとることにした。すなわち，上記の10項目のそれぞれについて，まず実践上の問題点をまとめて，それを［問］として掲げ，次にそれに対する［答］をおくことにした。

尚，本研究［Ⅳ］では，上記の10項目の内の§1から§5までの五つの項目について考察する。§6から§10までの五つの項目についての考察は，次の研究［Ⅴ］で（その2）として行うことにしている。

§1. 関数の連続について

［問］　関数の連続に関する事柄は学習指導要領に示された内容ではないが，教科書には連続の定義が次のような形ででてきている。

> $x=a$ とその近くで定義された関数 $f(x)$ が
> $$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$$
> を満たすとき，$f(x)$ は $x=a$ で連続であるという。

この定義の取り扱い方には苦慮している。このような連続の定義を本格的に取り扱うべきであろうか。もし取り扱うとすればどのようにしていったらよいであろうか。

［答］　率直に言って，高等学校でこのような定義を本格的に取り扱うことができるとは思われない。歴代の学習指導要領が“関数の連続性”について，これを積極的に取り上げようとしないのは十分頷けることである。

まず第一に，高等学校での微積分の中に，この連続の定義を導入することの難しさが那辺にあるかを次の(i)，(ii)に分けてみてみよう。

(i)　解析的な表現にすることの難しさ

この連続の定義式を分解してみれば

(イ)　$\lim_{x\to a} f(x)$ が存在すること

(ロ)　$f(a)$ が存在すること

(ハ)　$\lim_{x\to a} f(x)$ と $f(a)$ とが等しいこと

ということになる。従って，なぜこのような(イ)，(ロ)，(ハ)の三つの条件を満たすとき，関数 $f(x)$ は $x=a$ で連続であると定義するのかを生徒に理解させ納得させなければならない。

そのためには

連続関数というものは，グラフに表したときに
一つのつながった曲線になっている

という通俗的な意味を抽象化して，解析的な表現にしたものが上の(イ)，(ロ)，(ハ)であることを理解させなければならない。これは難しいことである。そこで，よくみられる方法は“不連続なグラフ”を持ち出して，次のような説明をすることによって納得させようとするものである。

例えば，以下のグラフはどれも $x=1$ で切れていて連続ではない。

この連続でない様子を解析的に表現すると，次のページの図の左から順に

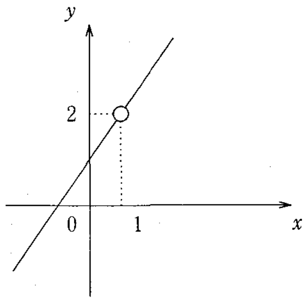
○　$f(1)$ が存在しない

○　$\lim_{x\to 1} f(x)$ が存在しない。（また $f(1)$ も存在しない）

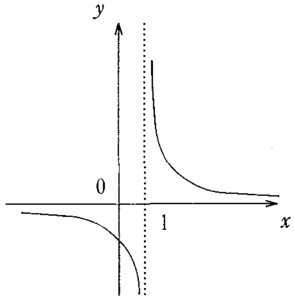
○　$\lim_{x\to 1} f(x)$ も $f(1)$ も存在するが $\lim_{x\to 1} f(x)\neq f(1)$

となるであろう。$x=1$ で連続でない原因はこのようになっている。従って，連続の定義には，先の(イ)，(ロ)，(ハ)が要求されることになり，また，それで十分となろう。

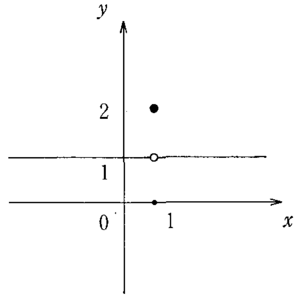
このような説明によって，要するに



$f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$



$f(x)=\dfrac{1}{x-1}$



$f(x)=\begin{cases}2\cdots x=1\\1\cdots x\neq 1\end{cases}$

連続関数というものは グラフに表したときに 一つのつながった曲線 になっている． （直観的通俗的な意味）	抽象化 $\Longrightarrow$	(イ) $\lim_{x\to a}f(x)$ が存在すること． (ロ) $f(a)$ が存在すること． (ハ) $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$ であること． （解析的な表現）

ということを生徒に理解させ納得させなければならないであろうから，この過程の指導は相当に難しいものであると思われる。

(ii) 解析的な表現の意味の難しさ

この連続の定義を導入することの難しさは，(i)でみたような，通俗的な意味から解析的な表現に抽象化するその過程だけにあるわけではない。この定義の導入の難しさは，

$$\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$$

という解析的な表現そのものの意味の指導の難しさにもあるのである。

ここで念のために

$$\lim_{x\to a}f(x)=f(a) \qquad \cdots\cdots(1)$$

について，その解析的な意味の概略をみておくことにする。

まず極限の概念，すなわち

$$\lim_{x\to a}f(x)=\alpha \qquad \cdots\cdots(2)$$

についてであるが，この意味について留意すべき点はつぎのようなことであろう。

① 極限値αは $f(x)$ が近づく一定の値である

② $f(x)$ が一定の値αに限りなく近づくのであって，
　必ずしもこの値をとるわけではない

③ $x\to a$ とは，x が a と異なっていて，x が a に
　限りなく近づくことである

ところで，式(2)は，

$$x\to a \text{ のとき } f(x)\to\alpha \qquad \cdots\cdots(2)'$$

とも表現されるのであるが，(2)$'$ のように矢印(→)で表現した場合には，尚更上記のことには注

意を払わねばならない。すなわち(2)′では矢印(→)が二つ用いられているが，同じ矢印でも

$x \to a$ は，$x \neq a$ かつ x が a に限りなく近づくこと

を意味するのであるが

$f(x) \to \alpha$ は，単に $f(x)$ がαに近づくこと

を意味している。この違いは看過してはならない違いである。(2)′は便利な表現ではあるが，誤解を招く恐れのある表現でもある。

因にこのことは，$\varepsilon-\delta$論法によるならば，(2)′よりは勿論のこと，(2)よりも明確に示すことができる。

> 任意の正数εが与えられたとき，このεに対して正数δをとり
>
> $0<|x-a|<\delta$ ならばつねに $|f(x)-\alpha|<\varepsilon$
>
> とすることができるとき，一定値αを x が a に限りなく近づくときの $f(x)$ の極限値といい
>
> $\lim_{x \to a} f(x)=\alpha$ （あるいは $x \to a$ のとき $f(x) \to \alpha$）
>
> と書く。

これによれば

$0<|x-a|<\delta$

であるから，$x \neq a$ であることが明確な表現となっている。

ところで，連続の定義式

$$\lim_{x \to a} f(x)=f(a) \quad \cdots\cdots(1)$$

は，形の上だけからみれば，極限の定義式

$$\lim_{x \to a} f(x)=\alpha \quad \cdots\cdots(2)$$

で，αの代わりに $f(a)$ をおいたものになっている。しかもこの(1)もまた矢印を用いて

$$x \to a \text{ のとき } f(x) \to f(a) \quad \cdots\cdots(1)'$$

とも書かれることがあるのである。

しかし，ここで見落としてはならないことは

連続の定義式(1)，(1)′での $x \to a$

の意味と

極限の定義式(2)，(2)′での $x \to a$

の意味とは異なっているということである。(2)，(2)′での $x \to a$ は $x \neq a$ であったが，(1)，(1)′での $x \to a$ は $x=a$ となっても差し支えないという $x \to a$ なのである。

因に，連続の定義を$\varepsilon-\delta$論法によって示せば次の通りである。

> 任意の正数εが与えられたとき，このεに対して正数δをとり
>
> $|x-a|<\delta$ である任意の x について $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$
>
> とすることができるとき，$f(x)$ は $x=a$ で連続であるという。

先の極限の定義のときにみられた

$\boxed{0<}\,|x-a|<\delta$

での，点線の部分はないのである。

形の上では，連続の定義式(1)あるいは(1)′は，極限の定義式(2)，(2)′で，αの代わりに$f(a)$をおいたものであるが，$x \to a$の意味は異なっており勿論全体の意味は異なっているのである。従って，仮に，極限の定義式の解析的意味が理解されていたとしても，それによって直ちに連続の定義式の解析的意味が理解されるというものではないと思われる。

以上(i)，(ii)でみてきたように

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

による連続の定義の導入は，高等学校にとっては相当に難しいものであるといわねばならないであろう。

第二に，この連続の定義を導入することができたとして，それではこの定義を実際に使っていくことができるであろうか。実はこれがまた難しいことのように思われてならない。定義をするということはこの定義を用いて数学を展開することが前提である。そこで，この連続の定義を掲げている教科書が，これをどのように用いて数学を展開しているかをみてみることにする。

ところで，連続関数のよく知られた性質としては次のようなものが掲げられるであろう。

(1)　連続関数の和・差・積・商（ただし分母の零点は除く）は連続関数である

(2)　連続関数の連続関数（合成関数）は連続関数である

(3)　単調な連続関数の逆関数は単調な連続関数である

(4)　$f(x)$が［a，b］で連続で$f(a) \neq f(b)$ならば，$f(a)$と$f(b)$の間の任意の値λに対して，$f(c) = \lambda$，a＜c＜b なる c が存在する
（中間値の定理）

(5)　閉区間で連続な関数は，この区間で有界かつ最大値，最小値をもつ
（最大・最小値定理）

(6)　閉区間で連続な関数はこの区間で一様連続である
（一様連続性の定理）

このうち，(6)の一様連続性の定理だけは，これまでの教科書では全く取り上げられてはいないが，他の(1)から(5)までの性質は概ね教科書の中に記述されてきているものである。

さて，教科書の中では，これらの性質は先の連続の定義を用いて証明されているであろうか。どれ一つとして証明されているものはないといっても過言ではないであろう。それは何故であろうか。先の連続の定義を用いて，これらの性質を証明することは高等学校では無理であり，教育的ではないからであろう。

それでは折角定義しておいた先の連続の定義はどこで用いられているのであろうか。教科書の中では，僅かに次の定理だけが先の連続の定義を用いて以下のように証明されているようである。

定理　関数$f(x)$が$x = a$において微分可能ならば
$f(x)$は$x = a$で連続である。

証明　$f(x)$は$x = a$で微分可能であるから

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

従って

$$\lim_{h\to 0}\{f(a+h)-f(a)\}=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\cdot h\right\}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\cdot\lim_{h\to 0}h$$

$$=f'(a)\cdot 0=0$$

よって　$\lim_{h\to 0}\{f(a+h)-f(a)\}=0$

すなわち　$\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$

ゆえに　関数 $f(x)$ は $x=a$ で連続である。

しかしこのように証明しておいても，多くの教科書はこの定理を積極的に用いるというほどの姿勢はとっていないように思われる。

例えば，今，積の導関数を求める公式

$$\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

を証明するとしよう。その証明は次のようにされるであろう。勿論，$f(x)$，$g(x)$ は微分可能とする。

$$\{f(x)g(x)\}'=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\{f(x+h)-f(x)\}g(x+h)+f(x)\{g(x+h)-g(x)\}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot g(x+h)+f(x)\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right\}$$

ここで，関数 $f(x)$，$g(x)$ は微分可能であるから

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=g'(x)$$

また，$g(x)$ は微分可能，したがって連続であるから

$$\lim_{h\to 0}g(x+h)=g(x)$$

よって，上の極限値は存在して

$$\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

多くの教科書は，ここに点線で囲んでいる部分についての説明をつけようとはしていないのである。しかしそれは理由あってのことであろうと思うのである。すなわち，もしもここで，上記の点線部分を表だって記述して，それに整合性をもたせて以降の微積分を展開していくとすれば，それは大変なことになり教育的ではないと考えてのことではなかろうか。ここのようなところだけに殊更に連続の定義を持ち出すことは，教育的なこととはいえないであろう。

以上，要するに，先のような連続の定義をしても，実際にそれを用いて微積分を展開していこうとはしていないのである。にも拘らず，これまでの教科書が挙って先のような連続の定義を記述してきているのはどうしてであろうか。

このことに関して特に次のことを述べておきたい。とかく教育現場には，多くの教科書に記述されている内容について，それが記述されていない教科書があると，この教科書をあたかも欠陥教科書のごとくに評価する傾向がありはしないだろうか。もしそうだとしたら，その考えは間違っていると思う。

今の連続の定義の場合でも，教科書を作る側としては，他社の教科書がこの定義を記述しているのに，自社の教科書だけがそれを記述しないことになると，低級な教科書あるいは欠陥教科書と評価されはしないかという心配があるかも知れない。そのことが，教科書が挙って連続の定義を記述する理由の一つになっていると考えるのは，甚だしい見当違いであろうか。先のような連続の定義がないからといって，その教科書が低級な欠陥教科書というわけではないと思うのである。むしろ，そのような教科書を勇気のある教育的な教科書として評価する姿勢が必要なのではなかろうか。

さて，これまでのことを要約して次のように述べておきたい。

1. 連続の定義を高等学校で導入することは大変難しいことである。しかも，仮に導入することができたとしても，これを本格的に用いて微積分を展開することはできない。学習指導要領が，この連続に関する事柄を指導内容としていないことは十分頷けることである。
2. 教科書には確かにこの連続の定義が記述されている。しかしそれは定義がでているというだけのものであって，この定義を本格的に用いて微積分を展開していくというものではない。この定義は殆ど用いられていない。

斯くして，［問］には次のように答えたい。

連続の定義，すなわち

> $x=a$ とその近くで定義された関数 $f(x)$ が
> $$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$
> を満たすとき，$f(x)$ は $x=a$ で連続であるという。

を本格的に取り扱うことはできないと思われる。もしも，この定義を与えるのであれば，先に述べたようなこの定義の意味の難しさに鑑み，これが用いられる場面を豊富に提供し，これを使用することによって，徐々にこの定義を理解させていくような扱い方でなければならないであろう。しかしそれもできることではない。

いずれにしても，この連続の定義を導入しそれを用いて微積分を展開していくことは，高等学校では無理である。使いもしない定義を与えることは無駄なことであり有害なことでさえある。《連続》ということについては，図形的直観，すなわちグラフから明らかな事実はこれを大いに用いて微積分の指導をしていくのが，多くの場合，実際的かつ教育的であると信ずる。

尚，連続の定義に関連して，関数の不連続ということについても一言述べておきたい。関数の不連続ということを次のように定義している書物がよくみられる。

関数 $f(x)$ が $x=a$ で連続でないとき $f(x)$ は $x=a$ で不連続であるという。

これは連続ということを否定することによって不連続ということを定義するもので，数学的にも数学教育的にも問題のある定義であろう。それゆえ，この不連続の定義をあれこれ議論してみても，教育的な実りある結果は期待できないように思われる。要するに，不連続についても，これを上のような定義によって指導しようとするのではなく，図形的な直観を拠り所とすることによって指導していくのが，実際的かつ教育的であると考える。

以上で［答］を終わりたいのであるが，先に列挙した六つの連続関数の性質の個々の姿やそれらの証明等には全く触れなかったので，ここでせめてその中の一つである「中間値の定理」に関する筆者の感想だけでも述べておきたい。

周知のように，関数 $f(x)$ が微分可能ならば $f(x)$ は連続であるが，導関数 $f'(x)$ は必ずしも連続ではない。かの高木貞治はこれを

連続性は導関数に遺伝しない

といっている。(1)

ところで，不思議なことに，連続関数の性質の一つである中間値の定理が，導関数 $f'(x)$ についても次のように成立するのである。

［a, b］において $f(x)$ が微分可能ならば，$f'(x)$ はこの区間 において $f'(a)$ と $f'(b)$ の間のすべての値をとることができる。 （導関数に関する中間値の定理）

このことは，中間値の定理は連続関数に固有のものではないという事実を告げているのである。同時にまたこのことは，関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は必ずしも連続ではないとはいうものの

導関数 $f'(x)$ は連続関数に近い性質をもっている

ということも告げているのであろう。「連続性は導関数に遺伝しない」ということは厳然たる事実であるが，“中間値の定理”というメガネでみてみれば，連続性は導関数にまで遺伝しているようにみえるのである。

人間の世界でも親と子はそのすべてが似ているわけではない。しかし，いくつかの点についてみてみるとよく似ているものである。数学でも，関数 $f(x)$ とその導関数 $f'(x)$ が，中間値の定理という観点からみてみるとよく似ているのは面白いことである。

数学にも人間的な人情味のある定理があるものである。蓋しそれは当然であろう。数学は人間がつくったものだからである。

§２．合成関数の導関数について

そもそも「合成」とはいかにも人間的である。それはさておくとして，ここでは，この公式の証明の問題に焦点をあてて考察していくことにする。

関数 $y=g(u)$ および $u=f(x)$ が微分可能であるとき，合成関数

$$y=g(f(x))$$

の導関数は

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

で求められる。

この公式は，高等学校では通常次のように証明されている。

［証明］　x の増分 Δx に対する u および y の増分をそれぞれ

Δu , Δy とすれば

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$\Delta x\to 0$ のとき $\Delta u\to 0$ となるから

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\left(\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\right)\left(\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)$$

$$=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

ゆえに　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}$

［問］　このような証明法は Δu を分母分子にかけているので，$\Delta u\neq 0$ ならば問題はないが，$\Delta u=0$ となる場合も考えられるのであるから，不完全な証明ではないだろうか。そうだとすれば，高校生にも完全な証明を与えるべきではなかろうか。

［答］　確かに，この証明は $\Delta u=0$ となる場合を考慮していないから不完全な証明である。無批判に看過してはならないであろう。

さて，完全な証明をしようとするとき，まず第一に考えられるのは，先の証明の不完全な部分を繕って，完全な証明にしようとすることである。これについて，例えばある書物では次のように繕おうとしている。

$\Delta u=0$ なるときは $\dfrac{\Delta u}{\Delta x}=0$ であり，また $\Delta y=0$ であるから

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=0$$

である。従って，今特に

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

なる式において $\Delta u=0$ なるときは $\dfrac{\Delta y}{\Delta u}$ は $g'(u)$ を表すものと規約しておけば

$(0=g'(u)\times 0$ であるから）この式は $\Delta u=0$ のときでも成立する。

この式において $\Delta x\to 0$ ならしめれば

$$\frac{\Delta u}{\Delta x}\to\frac{du}{dx}\qquad\frac{\Delta y}{\Delta u}\to\frac{dy}{du}$$

であるから公式は証明される。[2]

このようにして，先の不完全な証明を繕おうとするのが一つの方法であろう。しかし，あま

りすっきりしたものとはならないように思われる。このことについて高木貞治はあの『解析概論』の中で，一応冒頭のような証明を示した後，次のように述べている。

上記の大ざっぱな証明法が我々に反省の機会を与える。u が独立変数ならば，Δu は任意でかつ $\Delta u \neq 0$ であるが，上記の場合のように，u が x の関数であるときは，Δx の値によっては $\Delta u=0$ でもあり得る。そのような場合には

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

のように書くことは不合理である。このような粗雑な証明を補修するよりも，むしろ初めから仕直すのが早い。(3)

そこで，証明を完全なものにするために，初めから仕直すことにすれば，例えば次のように証明することになるであろう。

〔証明〕 $y=g(u)$ は微分可能であるから

$$g(u+\Delta u)-g(u)=\Delta u\cdot g'(u)+\Delta u\cdot\varepsilon_1(\Delta u)$$

ただし $\Delta u\to 0$ のとき $\varepsilon_1(\Delta u)\to 0$，また $\varepsilon_1(0)=0$

と書くことができる。

$$u=f(x),\quad u+\Delta u=f(x+\Delta x)$$

であるから

$$\Delta u=\Delta x\cdot f'(x)+\Delta x\cdot\varepsilon_2(\Delta x)$$

ただし $\Delta x\to 0$ のとき $\varepsilon_2(\Delta x)\to 0$

として

$$g(f(x+\Delta x))-g(f(x))=\Delta u\cdot g'(f(x))+\Delta u\cdot\varepsilon_1(\Delta u)$$

$$=\Delta x\cdot g'(f(x))f'(x)+\Delta x\cdot g'(f(x))\cdot\varepsilon_2(\Delta x)+\Delta x\cdot f'(x)\cdot\varepsilon_1(\Delta u)+\Delta x\cdot\varepsilon_2(\Delta x)\cdot\varepsilon_1(\Delta u)$$

よって

$$\frac{g(f(x+\Delta x))-g(f(x))}{\Delta x}$$

$$=g'(f(x))f'(x)+\varepsilon_2(\Delta x)\cdot g'(f(x))+\varepsilon_1(\Delta u)\cdot f'(x)+\varepsilon_2(\Delta x)\cdot\varepsilon_1(\Delta u)$$

$\Delta x\to 0$ のとき $\Delta u\to 0$ であり，$\varepsilon_1(\Delta u)\to 0$，$\varepsilon_2(\Delta x)\to 0$

であるから

$$g(f(x))'=g'(f(x))f'(x)$$

すなわち

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

このような証明は数学的にはともかく，教育的にはどうであろうか。筆者は，高校生には，本節の冒頭でみたような，あの普通にみられる証明の方がよいと断言したいのである。

第一に

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

と

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

とは自然に結び付く式である。そしてまた，数学教育にとって大切なねらいであるところの，直観的に予想を立てて考えたり，数学を積極的に活用したりする態度を育むためにも，式

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

の意義は大きいように思われるのである。

第二に，式

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

の発想はいかにも人間的であり，そこのところを生徒に感得させせられることにもこの式の意義があると思うのである。我々人間の社会では，人と人あるいは物と物などがうまく結ばれないときには，適当な仲立ちをもってきて，その仲立ちを利用してうまく結ぼうとしている。上の式は Δu を仲立ちにしたものであって，そのような人間の，いわば，哲学に根ざすものとみることもできよう。筆者は，上の式を，ただ証明のための式としてみるだけではなく，人間的な温もりのある式とみたいのである。

高等学校における微積分教育は，微積分について，徒に数学的厳密性のようなものを語ろうとして，その人間的な素朴な姿を語ることを忘れてはならないと思うのである。

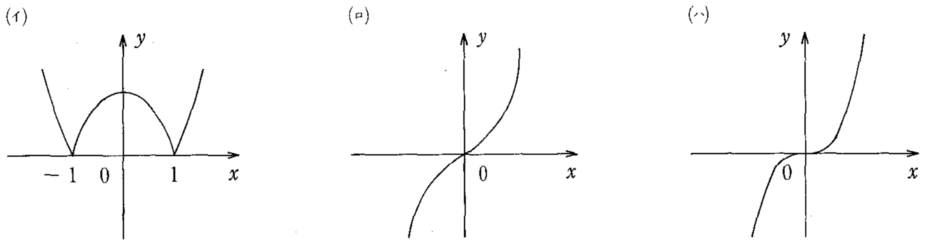
§３．変曲点について

［問］　高等学校の数学教育の中の定義には曖昧なものがある。変曲点の定義もそのうちの一つである。変曲点の定義は教科書によって微妙に違っており，すっきりしない。端的に例をあげて聞きたい。

$y=|x^2-1|$ のグラフ上の点（－１，０），（１，０）

は変曲点といってよいものなのであろうか。

［答］　まず，問われている例を含めて，次の三つの例を提示してみたい。



$y=|x^2-1|$　　$y=x^{\frac{5}{3}}$　　$y=x^3$

(イ) は点（－１，０），（１，０）で微分可能ではない。しかしこのような点の前後で曲線の凹凸が変わっている例である。

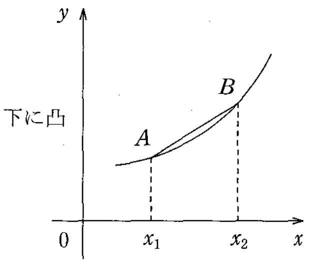
(ロ) は点（０，０）で１回だけ微分可能である。そして，このような点の前後で曲線の凹凸が変わっている例である。

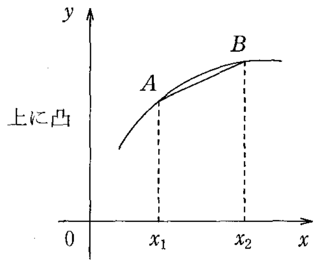
(ハ) は点（０，０）で２回微分可能（実は，２回以上微分可能）である。そして，このよう

な点の前後で曲線の凹凸が変わっている例である。

さて，今，曲線の凹凸が微分可能性を仮定しないで，次のように定義されているとする。

ある区間で定義された関数 $f(x)$ について，曲線 $y=f(x)$ 上でこの区間に含まれる任意の x_1，x_2 を x 座標にもつ二点A，Bにたいして，A，Bを結ぶ曲線の弧がつねに線分 AB より下にあるとき，曲線 $y=f(x)$ はこの区間で下に凸，あるいは上に凹であるという。





また，A，Bを結ぶ曲線の弧がつねに線分 AB より上にあるとき，曲線 $y=f(x)$ はこの区間で上に凸，あるいは下に凹であるという。

曲線の凹凸のこのような定義は教科書によくみられるものである。

さて，このように曲線の凹凸が定義されているとき，もしも変曲点の定義が，曲線上の点をPとして

(i) 点Pの前後で曲線の凹凸が変わるならば，この点Pを変曲点という

であるならば，例(イ)の（－1，0），（1，0）は変曲点である。勿論，例(ロ)，(ハ)での（0，0）も変曲点である。

しかし，

(ii) 少なくとも1回の微分可能性を仮定した上で，点Pの前後で曲線の凹凸が変わるならば，この点Pを変曲点という

であるならば，例(イ)の（－1，0），（1，0）は変曲点とはいえないが，例(ロ)の（0，0）は変曲点である。勿論，例(ハ)の（0，0）も変曲点である。

そしてまた，

(iii) 2回の微分可能性を仮定した上で，点Pの前後で曲線の凹凸が変わるならば，この点Pを変曲点という

であるならば，例(イ)の（－1，0），（1，0）も，例(ロ)の（0，0）も変曲点とはいえないが，例(ハ)での（0，0）は変曲点である。

それでは変曲点の定義はどうなっているのであろうか。実はこれが全く曖昧である。多くの微積分の書物を繙いてみると，大勢は(ii)のように思われるのであるが，(i)や(iii)の定義も勿論みられるのである。また，高等学校の教科書での定義も，いろいろな述べ方をしているが，結局のところ，この三つの定義があるように思われる。

従って，問われている

$y=|x^2-1|$　上の点（－1，0），（1，0）を

　　　変曲点というか否か

を，この状況の中で一刀両断にというわけにはいかない。［問］に答えるためには，このうちのどれか一つの定義を選定する外はない。

高等学校における微積分教育にとって好ましい定義は，その後の展開等を考えると，少なくとも1回の微分可能性を仮定した(ii)の定義ではないだろうか。筆者は(ii)の定義を採用したい。従って，問われている点は変曲点とはいわないと答えたい。

少なくとも1回の微分可能性を仮定すれば，接線を考えることができることになる。その場合

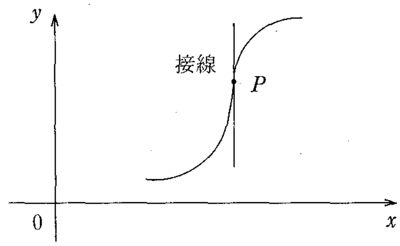
　　　曲線が接線の上側の方から下側の方に，あるいは下側の方から上側の方に移るとき，

　　　その接点を変曲点という

というような表現の定義がみられることがある。接線をもちだすことは教育的にも実際的にもよいことである。しかし，この接線の上側とか下側とかいう表現は，下図のように接線がy軸に平行になったときを考えると，具合が悪いという考え方もあろう。そのためであろうか，例えば

　　　曲線が接線の両側にあるとき

　　　接点を変曲点という



のような定義もみられるのである。しかしながら少なくとも1回の微分可能性を仮定する我々の変曲点の定義からは，図の点Pは変曲点とはいわないことになるわけである。

尚，変曲点を曲率，すなわち

$$\kappa=\frac{y''}{\sqrt{(1+y'^2)^3}}$$

によって定義することもあるのである。[4] 勿論これは2回の微分可能性を仮定しているわけである。その場合，曲率κが0になる点を“広義の変曲点”といっている。

いずれにしても，この問題で生徒を不安にし神経質にさせることは決して教育的ではない。恐らく数学の中には，ましてや数学教育の中には曖昧な用語は多々あるであろう。そして，誰しも，そのような曖昧な用語を用いることは好まない。しかし，今日のところは曖昧でもやむを得ないのではなかろうか。

周知のように，曖昧という言葉の〔曖〕も〔昧〕も“暗い”という意味である。教育は明るくなければならない。やむを得ず曖昧な用語を用いていたとしても，暗くはならず，明るくやっていきたいものである。

§4．平均値の定理について

［問］　平均値の定理，すなわち

> 関数$f(x)$が$[a, b]$で連続，(a, b)で微分可能であれば
>
> $$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$
>
> を満たすcが，(a, b)内に，少なくとも1つ存在する。

の取り扱いについては，次のことで悩んでいる。どのように扱ったらよいであろうか。

〔i〕　閉区間 [a, b] で連続，開区間 (a, b) で微分可能というところのこの閉区間，開区間の使い分けは必要であろうか。

〔ii〕　この定理を証明するには，どこに根拠をおいて証明していくのがよいであろうか。

〔iii〕　この定理の有用性を生徒に認識させるにはどうすればよいであろうか。

［答］　ここではまず学習指導要領をみてみよう。先に本研究の第二章でみたように，高等学校学習指導要領（昭和53年）は「微分法とその応用に関連して，平均値の定理に触れることは差し支えないが，その際は直観的に取り扱い，関数値の増減と導関数との関連を明らかにすることにとどめるものとする」と述べている。

すなわち，まず

(イ)　平均値の定理に触れることは差し支えないが・・・・・

として，平均値の定理を指導することに積極的ではない姿勢を示し，その上さらに

(ロ)　直観的に取り扱うこと

として，取り扱い方を限定し，かつまた

(ハ)　関数値の増減と導関数との関連を明らかにすることにとどめる

として，その使用範囲をも厳しく制限しているのである。

学習指導要領が，平均値の定理を指導することについて，何故このように積極的でない姿勢をとり，かつまた取り扱い方や使用について厳しい制限をつけているのであろうか。筆者はその理由を次のように考えたい。

(イ)　について

言うまでもなく，平均値の定理は極めて重要な定理である。それにもかかわらず学習指導要領が平均値の定理を積極的には取り上げようとしない理由は，単にその内容が難しいからとか，証明が困難であるとかということだけではないと思われる。

実は，平均値の定理は“存在定理”である。平均値の定理はあの実数 c の存在を保証するもので， c の値を求めるというようなものではない。実際問題として c が求まることはほとんどないし，また求める必要もない。このような“存在定理”は高等学校までの数学教育の中で取り扱うどの定理とも異質なものである。従って，平均値の定理を指導内容として高々と掲げることは，高等学校までの数学教育全体の整合性からみて不自然である。

もう少し強くいえば，このような“存在定理”を積極的に取り上げていくと，それは高等学校までの数学教育の理念を越えたものとなる恐れがあるのである。

(ロ)　について

歴代の学習指導要領が内容の取り扱いについて，わざわざ「直観的に取り扱う」とか「直観的に理解させる」とかという言葉をつけてきているのは，この平均値の定理をおいて外にはない。実は高等学校の微積分全体が直観的に扱われている。このことを十分承知の上で，なおかつ平均値の定理について，これを「直観的に取り扱う」とか「直観的に理解させる」としてきた学習指導要領の意図は，教育現場が

平均値の定理は，それまでのいわば計算上の定理とは違って，本格的な理論的定理であるから，従って理論的に取り扱わなければならない

と肩肘張ることを特に警戒したところにあると考えたい。

(ハ) について

昭和53年の学習指導要領に従えば，平均値の定理を導入しても，その使用は

① ある区間でつねに $f'(x)>0$ ならば $f(x)$ はその区間で増加関数である

② ある区間でつねに $f'(x)<0$ ならば $f(x)$ はその区間で減少関数である

③ ある区間でつねに $f'(x)=0$ ならば $f(x)$ はその区間で定数関数である

ということだけを明らかにすることにとどめることになる。

ところで，もしも平均値の定理の使用範囲を上の①，②，③に制限しないとしたならばどうなるであろうか。高等学校の微積分が理論的・学問的に展開されるものとなり，かつ，内容が相当に膨張することは必至であろう。このことに歯止めをかけておかねばならない。それがこのように厳しい使用制限をつけた理由であると考えたい。

さて，〔問〕に対する答えが遅くなったが，この〔問〕に関しては以上のことをみておいた上で〔答〕を述べたかったからである。以下，〔問〕の〔ⅰ〕，〔ⅱ〕，〔ⅲ〕の順に答えていくことにする。

〔ⅰ〕について

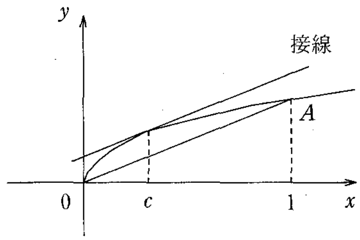
言うまでもなく，定理は広い範囲のものに適用できることが望ましい。平均値の定理の

閉区間 [a, b] で連続，閉区間 (a, b) で微分可能

という条件は，その意味でこの定理を力強いものとしている。もしもこの条件をきつくして

閉区間 [a, b] で微分可能

としたならば，高等学校で扱われている関数の範囲ででも，定理が適用できる関数が若干少なくなることは明らかである。



例えば，関数

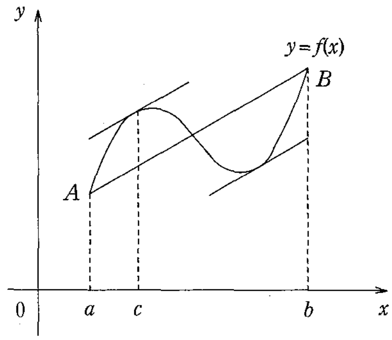
$y=\sqrt{x}$

は [0， 1] で連続であるが $x=0$ では微分可能ではない。それゆえ，図のように，直線 OA に平行で（ 0， 1 ）の間に接点をもつ接線が存在するにもかかわらず平均値の定理を用いることはできないということにはなる。

しかしながら，この問題は教育的にはどうであろうか。この“閉区間 [a, b] で連続，開区間 (a, b) で微分可能”という表現はいかにも学問的である。一般に，高等学校では閉区間，開区間ということを厳格に取り扱ってはいないように思われる。この扱いは初心者にはなかなかなじみにくいものである。それゆえ，適用範囲が少し狭くはなるが，高等学校での平均値の定理の条件は

閉区間 [a, b] で微分可能

でもよいのではなかろうか。



〔ⅱ〕について

このことについては，学習指導要領が指示してきている通り，直観的に扱い，直観的に理解させるのが適切であろう。それはこの定理の意味内容を右のような図によって，図形的につかませるということである。先に本研

究の第三章でも述べたように，平均値の定理については，これを証明しようとすべきではない。
よく，ロルの定理，すなわち

> 関数 $f(x)$ が閉区間 $[a, b]$ で連続，開区間 (a, b) 微分可能でかつ $f(a)=f(b)$ ならば
> $$f'(c)=0$$
> をみたす c が，(a, b) 内に少なくとも 1 つ存在する。

を直観的に認めて，これを根拠として平均値の定理を証明しているものをみかけるが，このロルの定理とあの平均値の定理とは，本質的には全く同じであって，このような証明は意味がないであろう。
そこで，平均値の定理を証明しようとすると，最大・最小値の定理，すなわち

> 関数 $f(x)$ が閉区間 $[a, b]$ で連続ならば，$f(x)$ はこの区間で最大値，最小値をもつ。

にまで溯らなければならなくなってくる。しかしまた，この最大・最小値の定理を証明しようとすると，

連続関数の性質

を明確にしていかなくてはならない。そのためには，さらに溯って

実数の性質

にまで踏み込んでいかなくてはならない。

高等学校の数学教育は，連続関数の性質や実数の性質にまで踏み込むことは到底できることではない。そこで仕方なく，上の最大・最小値の定理を直観的に認めて，これを出発点として，平均値の定理を証明しようとする行き方が考えられてくる。実際，この行き方もまたよくみられるものである。しかし，これも果して教育的であろうか。

この平均値の定理を，最大・最小値の定理を根拠として証明すれば，なるほど一応の恰好はつくであろう。しかし，そうすることは高等学校における数学教育の理念を越えたものではないだろうか。確かに，図形的直観に訴えるとき，最大・最小値の定理の方が平均値の定理よりも基本的に映るであろう。従って，最大・最小値の定理を根拠として認めていくことに，学習者の抵抗はないかも知れない。しかし，筆者は，そもそも平均値の定理のような“存在定理”を証明しようとすることが，高等学校における数学教育の理念を越えたものだと考えているのである。

もしも，平均値の定理のような存在定理を敢えて取り上げるのであれば，その定理の成立は，これを直観的に認めていくのが，高等学校に相応しい教育的な行き方であると信ずる。

[iii] について

昭和53年の学習指導要領に従えば，平均値の定理の使用は前のページに述べた①，②，③，すなわち関数値の増減と導関数との関連を明らかにすることにとどめることになる。そこで，ここでは，平均値の定理の有用性を生徒に認識させることを，この応用の中だけで考えてみよ

う。

ところで，今，平均値の定理を用いないとすれば，先の①，②，③の事柄はどのように説明すればよいであろうか。例えば次のように説明することになるであろう。ここではその内の

① ある区間でつねに $f'(x)>0$ ならば $f(x)$ はその区間で増加関数である

についての説明をしてみよう。

微分係数の定義より

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}=f'(a)$$

であるから

$$f'(a)>0 \text{ ならば } \quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}>0$$

である。従って $|\Delta x|$ を十分小さくとれば

$$\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}>0$$

すなわち，$f(a+\Delta x)-f(a)$ と Δx とは同符号である。よって，

$\Delta x>0$ ならば，$f(a)<f(a+\Delta x)$

$\Delta x<0$ ならば，$f(a+\Delta x)<f(a)$

となり，$f(x)$ は $x=a$ において増加の状態にある。

以上は，変数 x のある特定の値 $x=a$ の付近での増加の状態であるが，もし，ある区間内のすべての x の値について $f'(x)>0$ であれば，関数 $f(x)$ はその区間内のすべての点で増加の状態にあることになり，従って $f(x)$ はこの区間で増加関数である。

さて，この説明にはすっきりしないものがあろう。すなわち

$f'(a)>0$ ならば $f(x)$ は $x=a$ において増加の状態にある

ということは確かであるが，だからといって

ある区間内のすべての x について $f'(x)>0$ であれば，関数 $f(x)$ はその区間内のすべての点で増加の状態にある。従って $f(x)$ はこの区間で増加関数である

と言い切ることとの間にはギャップがある。“増加の状態にある”ということと“増加関数である”ということとは別の概念である。

さて，この

(イ) 点 $x=a$ で増加の状態にある

という局所的性質が

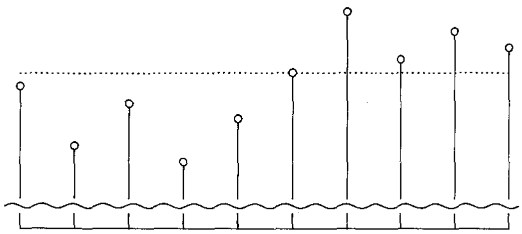
(ロ) ある区間で増加関数である

と，大局的にも成り立つことをすっきりと説明しようとして取り上げられているもの，それがこれまでの高等学校での平均値の定理であるといえよう。

そこで，この平均値の定理の有用性を生徒に認識させるためには，まず上記の２つの事柄の間にギャップがあることを理解させなければならない。それにはどうすればよいであろうか。このようなときには比喩を用いるのが一つの教育的な方法であろうと思われる。

このことについて，能代清はつぎのような比喩をあげている。

例えば，10名の生徒の中の一人A君をまず前面に立たせて，他の9名にA君よりも身長の高い人は右へ，A君より身長の低い人は左に並ぶようにといったのでは，10名が身長順に並ぶとは限らない。



ちょうどこれと同じように，関数 $f(x)$ が $x=a$ で増加の状態にあるからといって，$x=a$ を含む小さな区間内で単調増加であるとはかぎらない。[5]

このことの理解が十分得られるようにすることが，平均値の定理の有用性を生徒に認識させるためにまず必要なことであろう。もし，このことの理解が得られたならば，平均値の定理の有用性を認識させることはできよう。なぜならば，この問題は平均値の定理を用いることによって，次のように見事に解決されるということを見せ付けることができるからである。

区間内に $x_1<x_2$ である任意の2点 x_1，x_2 をとると，平均値の定理によって

$$f(x_2)-f(x_1)=(x_2-x_1)f'(c)\ ,\ x_1<c<x_2$$

を満たす c が存在する。区間内でつねに $f'(x)>0$ であり，c はこの区間内に含まれるから，$f'(c)>0$ である。また，$x_2>x_1$ であるから

$$f(x_2)-f(x_1)>0$$

すなわち

$$f(x_1)<f(x_2)$$

である。

ゆえに，$f(x)$ はこの区間で増加関数である。

周知のように，微分法は $x=a$ の近くで関数を局所的に1次化すること，つまり

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

というのは，

$$h\fallingdotseq 0 \text{ のとき，} f(a+h)\fallingdotseq f(a)+f'(a)h$$

ということであって，それは $f(a+h)$ が近似的にhの1次式 $f(a)+f'(a)h$ に等しいことを示している。このことは，微分法は関数の性質を局所的にとらえるものであるということができる。従って，微分法は，いわば大局→小局という性格をもったものであるが，平均値の定理は関数を大局的に把握すること，すなわち小局→大局という性格をもったもので，その意義を上のようにして理解させることができたならば，それによって平均値の定理の有用性の一端を生徒に認識させることはできるのではなかろうか。

以上をもって〔iii〕についての答えを終わることにしたい。

最後に，本節での〔答〕を総括して一言述べておきたい。本節でその扱い方を問われた平均値の定理は，いわゆる“存在定理”である。かの有名な

〔代数学の基本定理〕
代数方程式は必ず解をもつ。

も平均値の定理と同様な存在定理である。

もしも，このような存在定理を本格的に取り扱うことができるとすれば，高等学校の数学教育も，それは数学的には明快なものとなろう。例えば，簡単な微分方程式

$$\frac{dy}{dx}=ky$$

を解くにしても，これを変数分離して解いてきた高等学校での解き方には，数学的に問題があるが，これにコーシー・リプシッツの定理，すなわち存在定理を用いれば，数学的に厳密かつ明快に解くことができる。(6)

しかし，このような存在定理を高等学校の数学教育の中で取り上げていくことには慎重でなければならないと思う。ましてや，この種の存在定理を導入して，その定理の証明もしようなどと考えてはならない。太平洋に魚がいることを証明してみせることよりも，魚をとってみせることの方が高等学校に相応しい教育の行き方ではなかろうか。

§5．自然対数の底eの導入について

［問］　指数関数と対数関数についての微積分を行うためには，自然対数の底 e を導入し

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e \qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

を導出してこなければならない。ここのところは高等学校における微積分教育にとって最大の難関の一つである。時には冷たく扱って「$(e^x)'=e^x$ さえ覚えておけば，それで困ることはないのだ」と指導することさえある。このあたりの教材はどの程度に扱ったらよいものであろうか。また，温かい扱い方をするにはどうしたらよいだろうか。

［答］　まず，一般的な微積分の書物では，e の導入から指数関数・対数関数を微分するに至るまでに，どのような事柄がどのような順序で準備されていっているかをみてみよう。

(1)　$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$（$n$ は自然数）が収束することを証明し，この極限値を e とする。

(2)　$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$　（x は実数）を証明する。

(3)　対数関数 $y=logx$ の導関数を求める。

(4)　$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$ を証明する。

(5)　指数関数 $y=e^x$ の導関数を求める。

(6)　e が，$e=2.718281\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$ となる無理数であることを証明する。

勿論，これが絶対的なものであり，順序というわけではない。例えば(6)の「eが無理数であることの証明」はしばしば省略されている。また，(2)，(3)，(4)，(5)などの順序は入れ代わることがある。しかし概ねこのようなものであるとみて間違いないであろう。

次に，これらの事柄がどのように証明され求められているかをみてみよう。

(1) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ （n は自然数）が収束することの証明.

［証明］ まず $\{a_n\}$ は単調増加な数列であることをいう。二項定理を用いて

$$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

を展開する。すなわち

$$a_n=1+n\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\left(\frac{1}{n}\right)^3+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n-(n-1))}{n!}\left(\frac{1}{n}\right)^n$$

$$=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

同様にして

$$a_{n+1}=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)+\cdots$$

$$+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)+\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{n+1}\right)$$

a_n と a_{n+1} とを比較して

$$a_n<a_{n+1}$$

つぎに上に有界であることをいう。

$$a_n=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

$$<1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}$$

$$=1+\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}<3$$

よって数列 $\{a_n\}$ は収束する。

そこで，この極限値を e とおく。すなわち

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$$

とおいて，これを自然対数の底という。

(2) $\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$ （x は実数）の証明.

［証明］

$x\to\infty$ の場合， $n\leqq x<n+1$ となる自然数 n をとれば

$$1+\frac{1}{n+1}<1+\frac{1}{x}\leqq 1+\frac{1}{n}$$

したがって $\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^n<\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x<\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$

これを

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\Big/\left(1+\frac{1}{n+1}\right)<\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

と変形し，$x\to\infty$ とすれば $n\to\infty$ であるから，上の式の両側の項はいずれも e に収束する。ゆえに

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

$x\to-\infty$ の場合には，$x=-y$ とおくと

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{y\to\infty}\left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y}=\lim_{y\to\infty}\left(\frac{y}{y-1}\right)^y$$

$$=\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}(1+\frac{1}{y-1})=e$$

ゆえに

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

(3)　対数関数 $y=logx$ の導関数を求める．

(2)　をそのまま用いてもよいが，ここでは

$$\lim_{x\to 0}\frac{log(1+x)}{x}=1$$

を示して，これを用いて求めてみよう。

$x=1/y$ とおけば

$$\lim_{x\to 0}\frac{log(1+x)}{x}=\lim_{y\to\pm\infty}ylog\left(1+\frac{1}{y}\right)=\lim_{y\to\pm\infty}log\left(1+\frac{1}{y}\right)^y$$

$$=loge=1$$

ゆえに

$$\lim_{x\to 0}\frac{log(1+x)}{x}=1$$

よって

$$\lim_{h\to 0}\frac{log(x+h)-logx}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\log\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{log\left(1+\frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}}=\frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\frac{log\left(1+\frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}}=\frac{1}{x}$$

ゆえに $\dfrac{dlogx}{dx}=\dfrac{1}{x}$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$ の証明.

［証明］ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$ であるから, $\dfrac{1}{x}=z$ とおくと

(3)の場合と同様に

$$\lim_{z\to 0}\frac{log(1+z)}{z}=1$$

となる。

$log(1+z)=h$ とおくと, $z=e^h-1$ となり, かつ対数関数の連続性より

$z\to 0$ のとき $h\to 0$ だから

$$\lim_{h\to 0}\frac{h}{e^h-1}=1 \qquad \text{つまり,}\quad \lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1$$

ゆえに $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$

(5) 指数関数 $y=e^x$ の導関数を求める.

上の(4)を用いて

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^x(e^h-1)}{h}=e^x\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=e^x$$

ゆえに

$$\frac{de^x}{dx}=e^x$$

(6) e が

$e=2.718281\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$

となる無理数であることの証明.

［証明］

最初に e が $e=2.718281\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$ となることを証明する。

マクローリンの定理

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x} \quad (0<\theta<1)$$

で $x=1$ とし, $n=10$ とすれば

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\cdots+\frac{e^\theta}{11!} \qquad (0<\theta<1)$$

ここで小数第11位以下を切り捨てて, 右のような計算を行うと

2.7182818006

$$1=1$$
$$\frac{1}{1\,!}=1$$
$$\frac{1}{2\,!}=0.5$$
$$\frac{1}{3\,!}=0.1666666666$$
$$\frac{1}{4\,!}=0.0416666666$$
$$\frac{1}{5\,!}=0.0083333333$$
$$\frac{1}{6\,!}=0.0013888888$$
$$\frac{1}{7\,!}=0.0001984126$$
$$\frac{1}{8\,!}=0.0000248015$$
$$\frac{1}{9\,!}=0.0000027557$$
$$\frac{1}{10\,!}=0.0000002755$$

2.7182818006

が得られる。この場合の誤差は，切り捨てた8個分の誤差

$$8\times\frac{1}{10^{11}}<\frac{1}{10^{10}}$$

と剰余項の誤差

$$\frac{e^{\theta}}{11!}<\frac{3}{11!}<\frac{1}{10^{7}}$$

を合わせた

$$\frac{1}{10^{10}}+\frac{1}{10^{7}}$$

よりも小さい。

従って，$e=2.718281\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$となる。

次に，eが無理数であることを証明する。

今，eが有理数であると仮定して

$$e=\frac{m}{n}\qquad(m,\ n\text{ は正の整数})$$

とする。マクローリンの定理より

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{e^{\theta}}{(n+1)!}\quad(0<\theta<1)$$

よって

$$\frac{m}{n}=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{e^{\theta}}{(n+1)!}$$

両辺に$n!$をかければ

$$m(n-1)!=n!+\frac{n!}{1!}+\frac{n!}{2!}+\cdots\cdots+\frac{n!}{n!}+\frac{e^{\theta}}{(n+1)}$$

ここで，左辺の$m(n-1)!$および右辺の$n!$，$\frac{n!}{2!}$，・・・，$\frac{n!}{n!}$は明らかに正の整数であるから，

$$\frac{e^{\theta}}{n+1}$$

も正の整数でなければならない。ところで$2<e<3$であるから$e^{\theta}<3$である。

従って

$$1\leqq\frac{e^{\theta}}{n+1}<\frac{3}{n+1}$$

が得られる。これより

$$1<\frac{3}{n+1}$$

よって$n<2$すなわち$n=1$となり

$$e=m(\text{ 整数})$$

となる。

しかし，このeは$2<e<3$であって，整数ではない。これは不合理である。

ゆえにeは無理数である。

以上が，一般的な微積分の書物にみられる，e の導入から指数関数・対数関数を微分するに至るまでのおおよその展開である。大変なことであるが，これでも完全な展開というわけではない。何しろ，指数関数そのものについての厳密な構成は，一般的な微積分の書物の中では行っていないのである。それはともかくとして，高等学校では，ここにみてきたような(1)〜(6)の展開は無理ではなかろうか。

さて，高等学校での最大の問題は，結局のところ

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e \qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

にあると思われる。これについて上記のような取り扱いが無理だとすれば，高等学校での取り扱い方は，大別して次の(i)，(ii)の二つになるように思われる。

(i) **数値計算による展開**

この場合は $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ に，例えば $x=10$，100，・・・および $x=-10$，-100・・・等の数値を順次代入して数値計算を行う。

x	$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$	x	$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$
10	2.59374…	−10	2.86797…
100	2.70481…	−100	2.73199…
1000	2.71692…	−1000	2.71964…
10000	2.71814…	−10000	2.71841…
100000	2.71827…	−100000	2.71829…
……	……	……	……

このような数値計算によって

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

が収束しそうだということをつかませる。その上で「これは収束して，その極限値は2.71828・・・・・となる無理数であることが知られている」とする。

実は，このような扱い方は，本研究の第一章でみたように，20世紀初頭のあの数学教育改造運動の精神に則って書かれたドイツの中等学校用教科書『新主義数学』での扱い方であった。

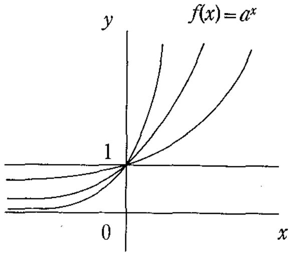
(ii) **グラフによる展開**

この場合は

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

を以下のように図を用いて直観的に導出するのである。

指数関数 $f(x)=a^x$ のグラフを考える。



点（0，1）における接線の傾きは

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}$$

であり，この傾き $f'(0)$ は，a の値を1から始めて連続的に次第に大きくしていくと，0から連続的にだんだんに大きくなり，それはいくらでも大きくなる。従って，ちょうど

$$f'(0)=1$$

となる a の値があるであろう。この a の値を e で表すことにす

る。この e は

$e=2.718281\cdots\cdots$ となる無理数であるということが知られている。

従って

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

である。

さて，上記のような，数値計算による展開であっても，またグラフによる展開であっても，次のことに留意しておくことが大切であろうと思うのである。実は，そのことが問われている“温かい扱い方”につながると思われるのである。

それは，三角関数の微積分の基礎となる式

$$\lim_{x\to 0}\frac{sinx}{x}=1$$

の導出の仕方との整合性に関することである。

まず，例えば(i)のように

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

を数値計算によって取り扱っていこうとする場合には

$$\lim_{x\to 0}\frac{sinx}{x}=1$$

x	$\frac{\sin x}{x}$
1.00	0.84147
0.50	0.95885
0.40	0.97355
0.30	0.98507
0.20	0.99335
0.10	0.99833
0.05	0.99958
0.04	0.99973
0.03	0.99985
0.02	0.99993
0.01	0.99998
……	…………

について，これを右のような数値計算による扱いもしておくことである。一方は証明だけをし，他方は数値計算だけによって説得されるというのでは，生徒は納得しかねるであろう。

次に，(ii)のように，図形的に

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1\cdots\cdots\cdots(イ)$$

を導く場合には

$$\lim_{x\to 0}\frac{sinx}{x}=1\cdots\cdots\cdots(ロ)$$

についても，これに図形的な説明をつけておくべきであろう。

すなわち(イ)は

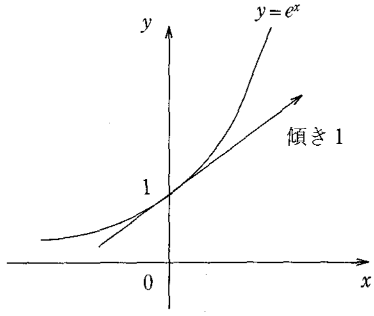
指数関数 $y=e^x$ のグラフの $x=0$ における接線の傾きが 1 である。

ということであり，一方(ロ)もまた

三角関数 $y=sinx$ のグラフの $x=0$ における接線の傾きが 1 である。

ということに外ならない。

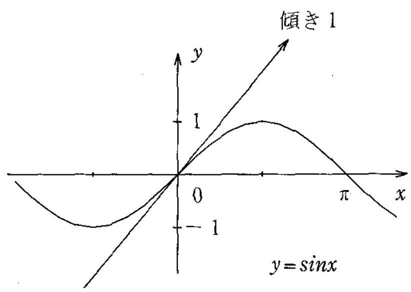
このことを扱って，(イ)と(ロ)との間に整合性をもたせた展開をするならば，生徒はよく納得するであろうし，また安堵することであろう。さらには，(イ)と(ロ)との間の統一された美しさのようなものをも感得してくれるであろう。



実は，指数関数と三角関数とは，ある一つの微分方程式によって統一的に定義することができるようである。[7] 上記のことは偶然ではなく，統一された美しい数学理論の中でのことと思われる。

この統一された美しさということについて，教育的な側面から，もう少し敷延して述べてみよう。

指数関数，三角関数の導関数を導く過程は



○　**指数関数 $f(x)=e^x$ の場合**

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^x(e^h-1)}{h}=e^x\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}$$

○　**三角関数 $f(x)=sinx$ の場合**

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{sin(x+h)-sinx}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2\sin\frac{h}{2}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}cos\left(x+\frac{h}{2}\right)$$

となるから，ここで

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} \qquad \lim_{h\to 0}\frac{sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$$

の極限値を求める必要が生じる。

そこで，指導者の専らの関心は

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{sinx}{x}=1$$

をいかにして示すかに向けられるかも知れない。それも大切である。

しかし，看過してはならない重要なことは，指数関数の場合

$$f'(x)=(e^x)'=f'(0)e^x=e^x$$

も，三角関数の場合も

$$f'(x)=(sinx)'=f'(0)cosx=cosx$$

となることであって，それは

(1)　$x=0$ という特別で簡単な点における微分係数，すなわち $f'(0)$ を知ることができれば，関数上の任意の点における微分係数を知ることができる。

(2) その基になる値，すなわち$f'(0)$の値は極めて簡潔な数1である。
ということである。

何という素晴らしい美しい，そして面白いことであろうか。このことを生徒に感得させ鑑賞させることが欠落してはならないであろう。そして微分係数というもののこのような素晴らしさ・美しさ・面白さを生徒に感得させ鑑賞させることに努めることが，この教材の温かい扱いであろうと筆者は思っているのである。

本研究の第三章でも述べたように，教育は人格の完成を目指すものであって，数学教育はその一翼を担うものである。高等学校における微積分教育は，人間教育という立場から，生徒にもっともっと微積分を鑑賞させることを考えていかなければならない。このことを強調して本節での［答］を終わりたいと思う。

参　考　文　献

(1) 高木貞治：『解析概論，改訂第3版』，岩波書店，1976，p. 216
(2) 南雲通夫，春木博：『解説微分積分学』，共立出版，1956，p. 230
(3) 上掲書(1)，p. 40
(4) 一松信：『解析学序説　下巻　新版』，裳華房，1982，p. 218
(5) 能代清：『微分学』，朝倉書店，1971，p. 98
(6) 石川廣美：「高等学校における微分方程式について，――問題点とその考察――」　日本数学教育学会誌，第62巻，第11号，1980，pp. 10～16
(7) 遠木幸成：『解析概論』，学術図書出版，1973，pp. 166～171