愛媛大学教育学部紀要　教育科学　第39巻　第1号　135〜156　1992

高等学校における微積分教育の研究［V］

── 第四章　個個の具体的な内容の指導に関する実践的考察（その２）──

石　川　廣　美
（数学教育研究室）

（平成4年4月27日受理）

前稿の

高等学校における微積分教育の研究［IV］
── 第四章　個個の具体的な内容の指導に関する実践的考察（その１）──

では，主として微分に関連する分野を中心に，次の§１から§５までの項目について考察した。

§１．　関数の連続について
§２．　合成関数の導関数について
§３．　変曲点について
§４．　平均値の定理について
§５．　自然対数の底ｅの導入について

本稿では（その２）として，積分に関連する分野を中心に，以下の§６から§10までの項目について，前稿と同様の考察を行うことにする。

§６．　対数微分法・対数積分法について
§７．　不定積分の定義について
§８．　定積分の定義について
§９．　定積分での置換積分法について
§10.　$\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ について

§６．　対数微分法・対数積分法について

［ｉ］　対数微分法について

［問］　例えば，次の関数を微分するとする。

$$f(x)=(x+1)^2\ (x+2)^3 \qquad (1)$$

これを積の微分法の公式を用いて微分すれば次のようになる。ここには全く問題はない。

$$f'(x)=(x+1)\ (x+2)^2\ (5x+7) \qquad (2)$$

ところで，今(1)を対数微分法を用いて微分するとする。

(1)の両辺の絶対値の対数をとると

$$\log|f(x)|=2\log|x+1|+3\log|x+2|$$

微分して

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{2}{x+1}+\frac{3}{x+2}$$

これより

$$f'(x)=(x+1)(x+2)^2(5x+7)$$

さて，ここでは解法の途中の経緯からみて，答えは次のようになるであろう。

$$f'(x)=(x+1)(x+2)^2(5x+7) \qquad (3)$$

ただし　$x\neq-1,\ -2$

関数(1)の導関数は明らかに(2)である。しかし，対数微分法を用いて導関数を求めると(3)のように「$x\neq-1,\ -2$」という“ただし書き”をつけなければならなくなる。これに困っている。$x=-1,\ -2$ での微分係数は，もとの関数(1)から，微分係数の定義を用いて求めることによって，上のような“ただし書き”を除くのであろうか。もしそうだとすれば，対数微分法を用いるよさがなくなってしまうのではなかろうか。

［答］　確かにこれは問題ではある。しかし数学的には“ただし書き”を除くために，$x=-1,\ -2$ での微分係数をもとの関数(1)にまで溯って，微分係数の定義から求めるなどという面倒なことをする必要はない。

それは次の定理があるからである。(1)

定理　$f(x)$ が連続である区間内の一点 a は別として，a の近傍では $f(x)$ が微分可能で $\lim_{x\to a}f'(x)=l$ が存在するならば，$f'(a)=l$　すなわち a においても $f(x)$ は微分可能で，$f'(x)$ は a において連続である。

証明　平均値の定理によって

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(\xi), \qquad a\gtrless\xi\gtrless x$$

$x\to a$ のとき，$\xi\to a$。ゆえに仮定によって　$f'(\xi)\to l$

すなわち

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=l$$

すなわち $f'(a)=l$

この定理によれば，対数微分法によって得られた当面の結果は

$$f'(x)=(x+1)(x+2)^2(5x+7) \qquad (3)$$

ただし　$x\neq-1,\ -2$

ではあるが

$$\lim_{x\to-1}f'(x)=0 \qquad \lim_{x\to-2}f'(x)=0$$

であるから，$x=-1,\ -2$ での $f'(x)$ を

$$f'(-1)=0 \qquad f'(-2)=0$$

としてよいことになる。従って，$x=-1$，-2 での微分係数を関数(1)にまで溯って微分係数の定義から求めるというような面倒なことをしないでも“ただし書き”を簡単に除くことができるのである。

一般的にいえば，対数微分法を用いる場合には，$\log|f(x)|$ を考えることになるのであるから，この真数を正にしない x の値，すなわち $f(x)=0$ となる x の値 $x=a$ は前以て除いておかなければならない。それゆえ，$\log|f(x)|$ を微分して得られた導関数を，今仮に $h(x)$ とするとき，この導関数 $h(x)$ に $f(x)=0$ となる点 $x=a$ を含めるわけにはいかない。

しかしながら

$$\lim_{x\to a} h(x)=l$$

が存在するならば，この導関数 $h(x)$ に，初めて除かれていた点 $x=a$ を含めて

$$f'(x)=h(x)$$

としてよいのである。

尚，絶対値をとった関数

$$y=|f(x)|$$

と，もとの関数

$$y=f(x)$$

とは同値ではないのであるから，このように対数微分法で得られた結果は果して十分なのかという問題もあろう。しかし，都合のよいことに

$$\frac{d}{dx}\log|f(x)|=\frac{f'(x)}{f(x)}$$

であるから，前者の絶対値をとった関数を微分して，もとの関数の導関数が得られるのである。

要するに，対数微分法を用いる場合，対数をとるために除去しておかなければならない x の値があっても，先の定理が背景にあるから，結局その x の値をも含めて導関数としてよいのである。先の定理が背景にあることを指導者は踏まえておく必要はあるであろうが，それは生徒には必要のないことであって，対数微分法はこれを形式的に運用して，生徒にその便利さを味わわせることこそが大切ではないだろうか。

ところで，数学教育の中では，このような解法の技法上に問題点を含んでいることはよくあることである。例えば，不定積分

$$\int\frac{x+2}{x(x^2-1)}dx$$

を求めようとすると

$$\frac{x+2}{x(x^2-1)}$$

を部分分数に分解しなければならない。そのとき

$$\frac{x+2}{x(x^2-1)}=\frac{x+2}{x(x-1)(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+1}$$

とおき，分母を払って

$$x+2=A(x-1)(x+1)+Bx(x+1)+Cx(x-1)$$

として，これに $x=0$，1，-1 を代入して

$$A=-2,\ B=\frac{3}{2},\ C=\frac{1}{2}$$

を得る技法はよくみられるものである。これは分母を0にする値を代入しているのであるから全く問題がないわけではない。しかし，ここで，分母を0にする値を代入してよいか否かというような問題に立ち入ることは教育的でもないし，実際的でもないであろう。

冒頭のような問題を，殊更に論うのであれば，例えば上にみたようなもの等を含めて，多くの事柄を問題にしなくてはならなくなるであろう。それでは，数学教育は動きがとれなくなるように思われてならない。

[ii] 対数積分法について

ここに，対数積分法とは

$$\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\log|f(x)|+C$$

なる積分のことである。(2)

［問］ この対数積分法については，これを

$$\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\log|f(x)|+C$$
$$(C\text{ は任意定数})$$

と指導してきている。しかし，このような表現は正確な表現ではないのではなかろうか。正しい表現を指導していく必要はないのだろうか。

［答］ 積分定数は，$f(x)=0$ となる x の値によって分割されるそれぞれの区間で別々のものと考えられる。従って，上の表現は正確で厳密な表現ではないことは確かである。

例えば，よくみられる

$$\int\frac{dx}{x}=\log|x|+C$$

は，正しくは

$$\int\frac{dx}{x}=\begin{cases}\log x\quad\ +C_1 & (x>0\text{ のとき})\\ \log(-x)+C_2 & (x<0\text{ のとき})\end{cases}$$

とすべきであろう。

しかし，少なくとも高等学校の範囲では，後者は教育的実際的な表現ではないであろう。何故ならば，それは計算を徒に繁雑にするだけで，その効用が全くないからである。筆者は，高等学校では，普通にみられる前者の形で取り扱うのがよいと考えている。

尚，微積分や微分方程式等の書物では，例えば先の例の場合

$$\int\frac{dx}{x}=\log|x|+C$$

ではなく，右辺の式で，対数の真数の絶対値を省いて

$$\int\frac{dx}{x}=\log x+C$$

としているのがよくみられる。この場合，後者が間違いというわけではない。

それは，複数関数の範囲で考えるならば，真数が負の場合の対数も定義されて，x を負とするとき，

$$\log x=\log|x|+(2n+1)\pi i$$

であるから，$(2n+1)\pi i$ を積分定数に含めることにすれば，結局，x の正負にかかわらず上の後者のように表わすことができるからである。

最後に，本節での［i］［ii］の［答］を総括して次のように述べておきたい。

数学者が数学者に数学を語るときには，微細な点といえども看過することなく，理論的に厳密に語らなければならない。しかし，生徒に数学を語るときには，たとえ理論的な厳密なものがそこにみえていても，“それを語らず”というほどの姿勢が必要なのではなかろうか。高等学校における微積分教育はおおらかでありたい。

思うに「角を矯めて牛を殺す」という諺がある。

§7. 不定積分の定義について

［問］ 不定積分は定積分の積分区間の端の関数として

(i) $\int_a^x f(t)\,dt$ を関数 $f(x)$ の不定積分という。

と定義されるべきものではないだろうか。しかし，高等学校の教科書ではこのような定義はほとんどみられず，概ね次のように定義されている。

(ii) 関数 $f(x)$ に対して $f(x)=F'(x)$ となる関数 $F(x)$ を $f(x)$ の原始関数または不定積分という。

(iii) 関数 $f(x)$ に対して $f(x)=F'(x)$ となる関数 $F(x)$ を $f(x)$ の原始関数という。C を任意定数とするとき，$F(x)+C$ を $f(x)$ の不定積分という。

このような定義で問題はないのだろうか。

［答］ (ii)は不定積分と原始関数とは同じものであるとする定義であり，(iii)は不定積分は原始関数とは別物であるとして，まず原始関数を定義し，その上で，原始関数の集まりとして不定積分を定義している。従って，この両者の定義に違いがあることは確かである。そして，これらの高等学校でみられる(ii)，(iii)の定義は(i)の定義とは明らかに異なっている。

さて，まず，数学的な以下のことを確認しておく必要があるであろう。

(イ) 不定積分とは，定積分

$$\int_a^x f(t)\,dt$$

を x の関数と考えたもののことである。

(ロ) 原始関数とは，関数 $f(x)$ に対して $f(x)=F'(x)$ となる関数 $F(x)$ のことである。

従って不定積分と原始関数とは別々の概念である。実際，まず，$f(x)=F'(x)$ であるとき，$f(x)$ の連続性は保証されないから $f(x)$ の積分可能性は保証されない。また，$f(x)$ が積分可能だとしても，それが $F(x)$ になるかどうかはわからない。そして一方

$$\int_a^x f(t)\,dt$$

は確かに連続ではあっても，微分可能性は保証されない。また，微分可能だとしても，それが $f(x)$ になるとは限らないからである。

例えば

$$f(x)=\begin{cases} x & (0\leqq x<1) \\ 0 & (x=1) \end{cases}$$

とするとき，$0\leqq x\leqq 1$ なるすべての x について

$$F(x)=\int_0^x f(x)\,dx=\frac{x^2}{2}$$

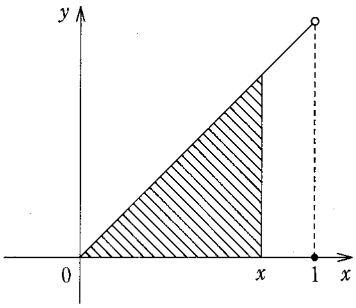
である。これを微分すると

$$F'(x)=x \qquad (0\leqq x\leqq 1)$$

となる。すなわち

$$F'(x)\neq f(x)$$

である。



さて，それにもかかわらず(ii)のように原始関数と不定積分とが同義語であるとする定義が高等学校でみられる理由は次のように考えられる。

今，もしも関数 $f(x)$ が考えている区間で連続であるとするならば

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt=f(x)$$

となるのである。実際，

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$$

とするとき，平均値の定理を用いて

$$F(x+h)-F(x)=\int_a^{x+h} f(t)\,dt-\int_a^x f(t)\,dt$$

$$=\int_x^{x+h} f(t)\,dt=f(\xi)\cdot h \qquad (\xi \text{ は } x \text{ と } x+h \text{ との間})$$

となる ξ が存在する。従って

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=f(\xi)$$

ここで $h\to 0$ ならしめるとき $\xi\to x$ であり，かつ $f(x)$ は連続関数であるから

$\xi\to x$ のとき　　$f(\xi)\to f(x)$

ゆえに

$$F'(x)=f(x)$$

従って

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$$

は $f(x)$ の原始関数である。

そして勿論，$f(x)$ が連続で，その原始関数 $F(x)$ が知れる場合は，その $F(x)$ を用いて，次

のように定積分の計算ができるわけである。

$$\int_a^b f(x)\,dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$$

（微積分法の基本定理）

要するに，関数 $f(x)$ が連続関数ならば，原始関数と不定積分とは同義語となるのである。高等学校における微積分の中での関数は連続関数であるとみてよいであろう。また，実際問題として積分する場合の関数は連続関数である。(ii)の定義はこのような教育的実際的な立場からの定義であると考えられる。

次に定義(iii)についてみてみよう。実は高等学校の教科書に限らず大学等の微積分の書物でも，不定積分の定義には(i)だけではなく(iii)のような定義もみられるのである。従って，不定積分という用語は，一般には，(i)と(iii)の両方の意味で用いられてきているのではなかろうか。

しかし，(iii)のように定義された不定積分は(i)のように定義される元来の不定積分とは，必ずしも同義ではないと思われる。

例えば，関数 $f(x)=\cos x$ をとってみよう。定義(iii)によれば，$(\sin x)'=\cos x$ であるから，不定積分は

$$F(x)=\sin x+C \qquad (C\text{ は任意定数}) \qquad (1)$$

であるが，定義(i)によれば，不定積分は

$$\int_\alpha^x \cos t\,dt=\sin x-\sin\alpha \qquad (2)$$

となる。この(2)での不定積分の絶対値は

$$|\sin x-\sin\alpha|\leqq 2$$

であるが，(1)での不定積分の絶対値

$$|\sin x+C|$$

は，いくらでも大きい値をとることができるのである。

それゆえ，不定積分という用語に(i)および(iii)の定義の両方の意味をもたせることはできないであろう。しかしながら，定義(i)と定義(iii)との間のギャップは，定積分に進めば解消されるのはいうまでもない。実際，先の微積分法の基本定理によって，上の例の(1)，(2)のような場合でも，いずれも以下のように同じ値になる。

$$\int_a^b \cos x\,dx=[\sin x+C]_a^b=\sin b-\sin a$$

$$\int_a^b \cos x\,dx=[\sin x-\sin\alpha]_a^b=\sin b-\sin a$$

理論的には，不定積分は，先の(i)のように定義されるべきものである。そして，これは原始関数と同義語ではない。しかし，実際的には，積分する関数は多くの場合連続関数であるから(i) (ii) (iii)のような三つの定義があっても，そして，そのうちのどれをとっても問題はないと思われる。特に，高等学校における微積分は連続関数だけを対象とするのであり，ここでは定義(ii)で十分ではないだろうか。連続関数だけを扱う段階で不定積分の定義を厳格に扱おうとするのは，少しゆきすぎのように思われてならない。

§8. 定積分の定義について

［問］　これまでの教科書をみると，定積分をいわゆる「微小量の総和の極限値」として定義する仕方には，次の三つの形のものがでてきている。

(i)　区間 $[a, b]$ を **n 個に等分割し**，分割された小区間 $[x_{k-1}, x_k]$ の**端の点** $\boldsymbol{x=x_k}$ **における値** $\boldsymbol{f(x_k)}$ **をとり**

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,\Delta x \qquad \Delta x=\frac{b-a}{n}$$

と定義する

(ii)　区間 $[a, b]$ を **n 個に等分割し**，分割された小区間 $[x_{k-1}, x_k]$ の**間の任意の点** $\boldsymbol{x=t_k}$ **における値** $\boldsymbol{f(t_k)}$ **をとり**

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\,\Delta x \qquad \Delta x=\frac{b-a}{n}$$

と定義する

(iii)　区間 $[a, b]$ を **n 個に分割し**，分割された小区間 $[x_{k-1}, x_k]$ の**間の任意の点** $\boldsymbol{x=t_k}$ **における値** $\boldsymbol{f(t_k)}$ **をとり**

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\,\Delta x_k \qquad \Delta x_k=x_k-x_{k-1}$$

と定義する

以上のような三つの定義がみられるのであるが，高等学校の微積分の範囲でも，(i)だけではなく，(iii)の定義をも取り扱って，積分を展開すべきであろうか。(iii)の定義を取り扱っていないと，大学にいったときに困ることはないだろうか。なお，(ii)の定義にはどんな意義があるのであろうか。

［答］　これまでの教科書を調べてみると確かにこの三つの定義がみられるようである。ただ(iii)の定義はすべての教科書が取り上げているわけではない。しかも，この定義を取り上げている教科書は，一応は(i)の定義をしておいた上で，稍控えめに(iii)の定義を取り上げている。また，(ii)の定義は少数の教科書にみられるもののようである。

さて，定積分の定義というものをみていく上では，まず次のことを確認しておかなければならないであろう。すなわち，定積分を定義しようとすると，どうしても“連続の一様性”，つまり

> $f(x)$ が閉区間 $[a, b]$ で連続であるならば，任意の正数 ε に対して，正数 δ を選べば，この区間に属する任意の x_1, x_2 について
>
> $|x_1-x_2|<\delta$　なる限り必ず　$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$
>
> とすることができる。

に踏み込まなければならない。これによって，(iii)の定義におけるところの

○　分割の仕方

○　分割された小区間 $[x_{x-1}, x_k]$ からの点 $x=t_k$ の取り出し方に関係なく，関数 $f(x)$ が連続関数ならば

$$\lim_{\delta\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\,\Delta x_k$$

（δ は各 Δx_k の最大幅）

の極限値が存在することが証明される。従って，定積分を(iii)のように（これは上のように厳格には記述されていない）定義することができることになるわけである。

勿論，$f(x)$ が連続関数であれば(i)，(ii)での

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,\Delta x \qquad \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\,\Delta x$$

の極限値は存在する。それゆえ，定積分を(i)，(ii)のように定義できることは言うまでもない。

ところで，高等学校では，このような“連続の一様性”にまで踏み込むことはできない。そこで，一般に高等学校では，面積というものを拠り所にして，直観的に定積分を定義していくことになる。従って，定積分を，(i)，(ii)，(iii)のいずれの形で定義しようとも，それらはどれも極限値の存在を厳密に証明することはないのである。この極限値の存在は証明しないのであるから，(i)の形で定義しようと(ii)の形で定義しようと，あるいはまた(iii)の形で定義しようと，いわば気楽に定義することができているわけである。(iii)の定義が取り上げられているといっても，それは厳密に導入されたものではなく，また，厳密で理論的な積分を至るところで展開していこうとしているものでもないであろう。

このように気楽に考えるのであれば，筆者は，(i)の定義の上に(iii)の定義を取り扱うことを頭から拒否すべきではないと考えている。ただその場合，高等学校においては(i)の定義を用いて，あの区分求積法を取り扱うことは極めて有用であり，これをおろそかにしてはならないであろう。また，筆者は，定積分を(i)の形で定義するに止めて(iii)の形での定義を扱わない行き方も，決して欠陥教育ではないと考えている。

今，例えば，定積分の重要な性質の一つである“加法性”，すなわち

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$$

を取り上げてみよう。(i)の定義によってはこれは証明することはできないが，(iii)の定義をしておけば，確かにこれを証明することができる。そこで，(iii)の定義を取り扱ったならば，これを用いてこの性質を証明しようとするであろう。それは頷けることである。しかし，(i)の定義だけに止めて，上の性質を面積を拠り所とした図形的直観によって納得させて，この性質を活用することに力点をおくのも実際的で教育的な行き方であると考えられるのである。

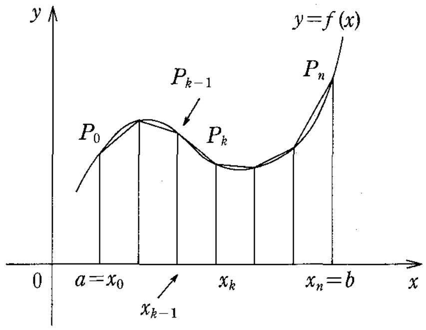
次に，「(iii)の定義を取り扱っていないと，大学にいったときに困ることはないだろうか」との問いについてであるが，筆者は，何ら困ることはないと思っている。恐らくどこの大学でも，高校生が厳密で理論的な微積分を学習してきているとは全く考えていないであろう。従って，定義(iii)による理論的な積分は大学で教授すべきものと考えていると思われるからである。

第三に，(ii)の定義の意義についてであるが，率直にいって，筆者はこの定義に積極的な意義を見いだせないでいる。しかし，次のような例を取り上げてみることにしよう。

今，曲線の長さを求める公式

$$l=\int_a^b \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}dx$$

を以下のようにして導き出すとする。



図のように，区間 $[a, b]$ を n 等分すると曲線 $y=f(x)$ 上の点 $P_{k-1}(x_{k-1}, y_{k-1})$，$P_k(x_k, y_k)$ を結ぶ微小な線分の長さ l_k は

$$l_k=\sqrt{(x_k-x_{k-1})^2+(y_k-y_{k-1})^2}$$

である。ここで

$$y_k-y_{k-1}=f(x_k)-f(x_{k-1})$$

であるから，平均値の定理を用いると

$$y_k-y_{k-1}=(x_k-x_{k-1})f'(c_k) \qquad x_{k-1}<c_k<x_k$$

となる。よって

$$l_k=(x_k-x_{k-1})\sqrt{1+\{f'(c_k)\}^2}$$

曲線の長さ l はこのような線分の長さの和の極限であると考えられる。従って

$$l=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} l_k=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(x_k-x_{k-1})\sqrt{1+\{f'(c_k)\}^2}$$

ここで定積分の定義を用いようとするとき $f'(c_k)$ は区間 $[x_{k-1}, x_k]$ の端の $f'(x)$ の値とは限らないから(i)の定義は使えない。しかし(ii)の定義をしておくと，上の式から

$$l=\int_a^b \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}dx$$

とすることができることになる。

強いて言えば，(ii)の定義の意義はこのようなところにあるということではなかろうか。しかし，本研究の第二章および第三章でみたように，平均値の定理の使用は「関数値の増減と導関数との関連を明らかにすることにとどめる」という，これまでの学習指導要領の指示に従うのであれば，このような場面には平均値の定理を使用することはできないのであって，従って，ここでは(ii)の定義はその意義を失うのである。いずれにしても，先に述べたように，(i)と(iii)との中間にあるとみられる(ii)の定義については，残念ながら，筆者には，その積極的な意義を見いだすことはできないのである。

最後に，定積分というものの扱い方についての筆者の考えを一言述べて，本節での［答］を終わりたいと思う。定積分というものは，これをごくごく大ざっぱにいえば，

$$\text{細かく分割する} \Longrightarrow \begin{array}{c}\text{微小な量}\\ f(x_k)\,\Delta x\end{array} \Longrightarrow \begin{array}{c}\text{集める}\\ \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,\Delta x\end{array} \Longrightarrow \begin{array}{c}\text{極限をとる}\\ \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,\Delta x\end{array} \Longrightarrow \begin{array}{c}\text{定積分}\\ \int_a^b f(x)\,dx\end{array}$$

ということになろう。定積分の定義をどうするかということも極めて重要なことには違いないが，高等学校における微積分教育にとって，最も基本的で大切なことは，定積分の上のような意味・思想を生徒に感得させ，そして豊かな応用を体験させることではなかろうか。筆者はそのように考えている。

§9.　定積分での置換積分法について

［問］　今日までの高等学校での置換積分は，学習指導要領によって

$ax+b=t$, $x=a\sin\theta$ と置き換える程度にとどめるものとする

と厳しく限定されてきている。そのためでもあろうか，置換積分

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt.$$

$$\varphi(\alpha)=a,\ \varphi(\beta)=b.$$

は，その条件についてはほとんど触れず，曖昧に取り扱われてきている。このような扱い方を改めていく必要はないだろうか。

［答］　高等学校の教科書をみてみると，確かに，置換積分の条件については触れていないものが多いようである。しかし，前後の記述振りから察すると，教科書の取り扱い方の精神は，今から約半世紀前の，あの

『解析概論（増訂版)』（高木貞治著）

に沿ったものとしているように思われるのである。この『解析概論（増訂版)』は置換積分を次のように取り扱っている。(3)

> 今応用上重要な場合として次の仮定をする。
>
> （1°）区間 $a\leqq x\leqq b$ に於いて $f(x)$ は連続。
>
> （2°）$\varphi(t)$ および $\varphi'(t)$ は連続で，t が α から β まで変動するとき $x=\varphi(t)$ は a から b まで単調に変動する。
>
> 然らば
>
> $$\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt.$$

この取り扱い方の特徴は

$x=\varphi(t)$ は a から b まで単調に変動する

との仮定をおいている点にある。多くの高等学校の教科書はこのことを明確には述べていないが，しかし本質的にはこの精神に則った扱い方をしているとみられるのである。

勿論，この『解析概論（増訂版)』の形の定理が最も数学的で一般的な定理であるというわけではない。関数 $x=\varphi(t)$ が c^1 級であること，すなわち，$x=\varphi(t)$ が微分可能でかつ $\varphi'(t)$ が連続であることを仮定するのであれば，上のように「関数 $x=\varphi(t)$ の単調性」を条件におくことは不要なことである。実際，1961年に改訂された

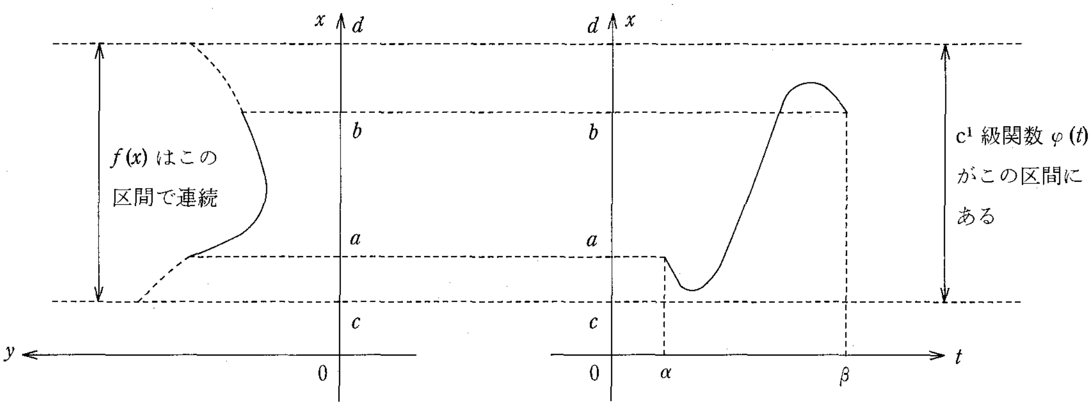
『解析概論（改訂第三版)』

では，この置換積分は次のようになっているのである。(4)

今応用上重要な場合として次の仮定をする。
（1°） 積分区間 $a \leqq x \leqq b$ を含む区間 $c \leqq x \leqq d$ において $f(x)$ は連続。
（2°） $\varphi(t)$ および $\varphi'(t)$ は $[\alpha, \beta]$ で連続で，t が α から β まで変動するとき $c \leqq \varphi(t) \leqq d$, かつ $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$
然らば

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt.$$

この条件をわかり易く図示すれば次のようになろう。



これが先のものよりも，より一般的な置換積分の扱い方であることには違いないが，どちらにしても，この『解析概論』での置換積分の取り扱い方は，その冒頭で明確に述べているように，「応用上重要なる場合」としていることに注目しておかなければならない。

理論的には，置換積分は $f(x)$ および $\varphi'(t)$ の連続性を仮定しないでも，積分可能性を仮定するだけでよい。

しかし，『解析概論』はこのような理論的な置換積分を取り上げてはいない。その理由を「応用上の興味に乏しいからである」とのべている。『解析概論』にさえ取り上げないような理論的な置換積分は高等学校の埒外といってよいであろう。

要するに，関数 $x=\varphi(t)$ が c^1 級であることを仮定するのであれば，

$x=\varphi(t)$ の単調性

$x=\varphi(t)$ の値域が積分区間 $[a, b]$ に含まれること

などという条件は必要ではないのである。このことは，高校生も，実際的な例によって，薄々気付いていくかも知れない。しかし，$c \leqq \varphi(t) \leqq d$ の意味を理解することは，高校生にはかなり難しいように思われる。

当然のことであるが，この条件を無視すると，置換した積分はいわゆる特異積分となることがあり，正しい値が得られないことがある。因に，このことを次の例でみておきたい。

［例］

$$I=\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}=\left[\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{3}$$

これを $x=\sin\theta$ と置換して積分する場合に

(イ) $$I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos\theta}{(1-\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sec^2\theta d\theta=\sqrt{3}$$

または

(ロ) $$I=\int_{\pi}^{\frac{2\pi}{3}}\frac{\cos\theta}{(1-\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}}d\theta=-\int_{\pi}^{\frac{2\pi}{3}}\sec^2\theta d\theta=\sqrt{3}$$

とするのはよいが（いずれも上述の条件をみたしている）

(ハ) $$I=\int_0^{\frac{2\pi}{3}}\frac{\cos\theta}{(1-\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}}d\theta$$

としてはならない。

この(ハ)の場合

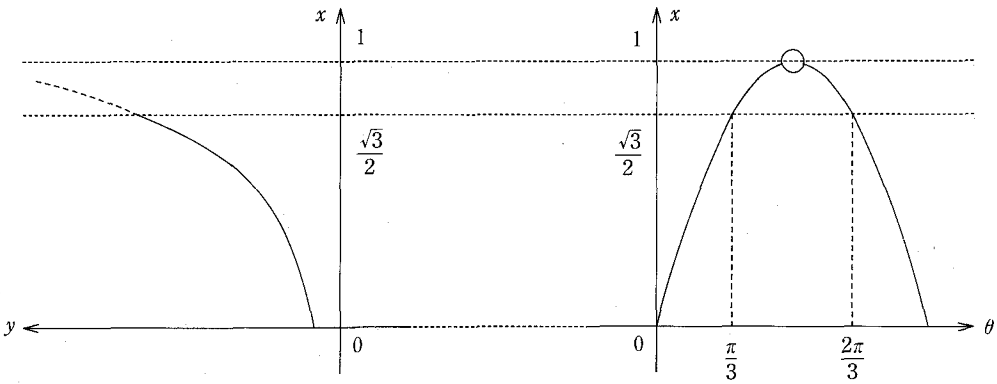
$f(x)=\dfrac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$ は $\left[0,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right]$ で連続

$x=\sin\theta$ は $\left[0,\ \dfrac{2\pi}{3}\right]$ で c^1 級

であるが，下図のように

$x=\sin\theta$ $\left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{2\pi}{3}\right)$ の値域は $f(x)$ の連続な区間内にはない

のであって，上記の条件を満たしてはいない。



$f(x)=\dfrac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$　　　$x=\sin\theta$

実際，(ハ)のようにして積分すると，以下のようになって発散してしまう。

$$I=\int_0^{\frac{2\pi}{3}}\frac{\cos\theta}{(1-\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}}d\theta$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0}\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}\sec^2\theta d\theta + \lim_{\varepsilon'\to+0}\int_{\frac{\pi}{2}+\varepsilon'}^{\frac{2\pi}{3}}(-\sec^2\theta)\,d\theta$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0}[tan\theta]_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} + \lim_{\varepsilon'\to+0}[-tan\theta]_{\frac{\pi}{2}+\varepsilon'}^{\frac{2\pi}{3}}$$

$$= \sqrt{3} + \lim_{\substack{\varepsilon\to+0\\ \varepsilon'\to+0}}\left(\tan\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)+\tan\left(\frac{\pi}{2}+\varepsilon'\right)\right)$$

ε, ε' は互いに独立に 0 に近づくからこの極限値は存在しない。

このようなことから，『解析概論（改訂第三版)』のような取り扱い方に沿うのが望ましいには違いないが，高校生一般には，『解析概論（増訂版)』のような扱い方，すなわち，区間 $[\alpha, \beta]$ での関数 $x=\varphi(t)$ の単調性を仮定する扱い方に沿うのも仕方がないのではなかろうか。いずれにしても，それらに沿った扱いをするということであって，置換積分の条件を厳密に高々と掲げるなどして，置換積分を学問的に取り扱おうとすることは適切ではないであろう。筆者はこのように考えている。

ところで，先の置換積分の公式

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt.$$

は x と t とを交換すれば

$$\int_\alpha^\beta f[\varphi(x)]\,\varphi'(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt$$

となる。

前者は $x=\varphi(t)$ による置換積分

後者は $\varphi(x)=t$ による置換積分

とみることができる。

前者の場合は既に述べた通りであるが，後者の場合も指導上丁寧に取り扱わなければならない点がある。それは後者の場合，もし，

$\varphi(x)=t$ が単調関数ではない

ならば，そのままでは

逆関数 $x=\varphi^{-1}(t)$ が得られない

からである。旧式な言い方をすれば $x=\varphi^{-1}(t)$ が一価関数とは限らないからである。

従って，後者の公式がそのまま適用できる場合は問題ないが，逆関数 $\varphi^{-1}(t)$ を求める必要があるときは，もしも $\varphi(x)$ が単調でないならば，単調な区間に分けて積分しなければならなくなるのであって，ここは丁寧な指導が求められよう。例えば

$$I=\int_{-1}^1 x^2dx=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^1=\frac{2}{3}$$

であるが，今これを $x^2=t$ と置換して積分するとしよう。$x^2=t$ の逆関数を求めなければならないが，これは $[-1, 1]$ で単調ではないから，単調な区間に分割しなければ逆関数は求まらない。

逆関数は

$x \geqq 0$　のとき　$x=\sqrt{t}$

$x \leqq 0$　のとき　$x=-\sqrt{t}$

となる。

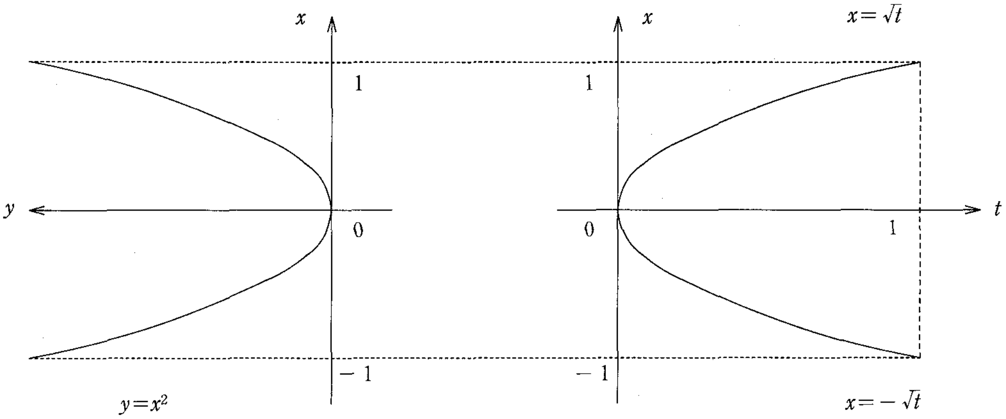
このことから，積分は次のようにして求められることになる。

$$I=\int_{-1}^{1} x^2 dx=\int_{1}^{0} t\frac{-1}{2\sqrt{t}}dt+\int_{0}^{1} t\frac{1}{2\sqrt{t}}dt=\frac{2}{3}$$

この種の置換積分は生徒にとって意外に難しいようであって，今の例の場合，例えば x から t への対応を

x	$-1\cdots\cdots\cdot 1$
t	$1\cdots\cdots\cdot 1$

のようにして，二進も三進も行かなくなっている姿はよくみかけるものである。下のようなグラフを書いてみることが大切であろう。



最後に，この置換積分についても，筆者の考えを一言述べておきたい。置換積分の意義は，計算の複雑な積分，難しい積分，未知の積分などを，計算の簡単な積分，易しい積分，既知の積分等にうつすことにある。複雑なもの難しいもの未知のものなどを，簡単なもの易しいもの既知のものなどにうつしてみようとすることは，積分に限らず，すべての世界に通ずる有効な手段であり，これは我々人間のもつ素晴らしい知恵である。置換積分は，このようなことを感得させる絶好の素材でもあることに留意した指導をしてこそ真の価値があるのではなかろうか。

§10.　$\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ について

［問］　公式

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

の初等的な証明にはどんなものがあるのであろうか。高校生にもわかる証明法はないだろうか。

［答］　この公式の初等的な証明としては以下のようなものが考えられよう。まず大学の初

年級の学生に対してはどんな証明が与えられているかをみてみよう。最も普通にみられるのは次のような「証明１」である。

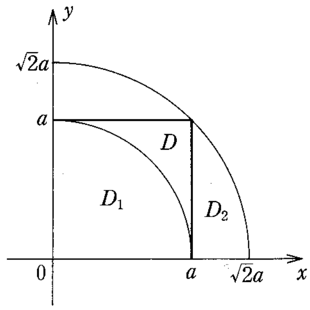
「証明１」

$$I(a)=\int_0^a e^{-x^2}dx$$

とおくと

$$\{I(a)\}^2=\int_0^a e^{-x^2}dx\int_0^a e^{-y^2}dy$$

$$=\int_0^a\int_0^a e^{-x^2-y^2}dxdy$$



ところで，図のように第一象限にある正方形の領域を D, 半径 a の四分円の領域を D_1, 半径 $\sqrt{2}a$ の四分円の領域を D_2 とすれば，上の積分領域は D であるから

$$\iint_{D_1} e^{-x^2-y^2}dxdy<\{I(a)\}^2<\iint_{D_2} e^{-x^2-y^2}dxdy$$

となる。ここで，左辺および右辺の積分を極座標での積分に変換すれば

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a e^{-r^2}rdrd\theta<\{I(a)\}^2<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\sqrt{2}a} e^{-r^2}rdrd\theta$$

となる。左辺の積分は

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^a d\theta=\frac{1}{2}(1-e^{-a^2})\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta=\frac{\pi}{4}(1-e^{-a^2})$$

となり，この a の代わりに $\sqrt{2}a$ とおけば右辺の積分値となるから

$$\frac{\pi}{4}(1-e^{-a^2})<\{I(a)\}^2<\frac{\pi}{4}(1-e^{-2a^2})$$

ここで $a\to+\infty$ とすれば $e^{-a^2}\to 0$ であるから

$$\lim_{a\to+\infty}I(a)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

ゆえに

$$\int_0^{\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

次に，この他の初等的な証明を三つ述べてみよう。このうち「証明２」および「証明３」は，筆者がかつて，雑誌『数学セミナー』で紹介したものである。(5)

「証明２」　次の三つの補助定理を使用する。

補助定理１

$$\left|e^{-x^2}-\sum_{n=0}^{k-1}(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}\right|<\frac{x^{2k}}{k!}$$

（証明）　テーラーの定理より

$$e^t=1+t+\frac{t^2}{2!}+\cdots+\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}+\frac{t^k}{k!}e^{\theta t}\qquad(0<\theta<1)$$

なる θ がある。ここで，t を $-x^2$ におきかえればよい。

補助定理 2

$$\int_0^\infty e^{-x^2}x^{2n+1}dx=\frac{n!}{2} \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\cdots)$$

（証明）　$x^2=y$ と変数変換し，n についての数学的帰納法を用いればよい。

補助定理 3　（グレゴリーの級数）

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\frac{\pi}{4}$$

（証明）　例えば，参考文献(6)を参照

さて，

$$f(t)=\int_0^t e^{-x^2}dx$$

とおけば，$f'(t)=e^{-t^2}$であるから，補助定理 1 により

$$\left|f'(t)-\sum_{n=0}^{k-1}(-1)^n\frac{t^{2n}}{n!}\right|<\frac{t^{2k}}{k!}$$

この両辺を積分することによって

$$\left|f(t)-\sum_{n=0}^{k-1}(-1)^n\frac{t^{2n+1}}{(2n+1)\cdot n!}\right|<\frac{t^{2k+1}}{(2k+1)\cdot k!}$$

この両辺に $f'(t)=e^{-t^2}$をかければ

$$\left|f(t)f'(t)-\sum_{n=0}^{k-1}\frac{(-1)^n}{(2n+1)\cdot n!}e^{-t^2}\cdot t^{2n+1}\right|<\frac{1}{(2k+1)\cdot k!}e^{-t^2}\cdot t^{2k+1}$$

これを 0 から $+\infty$ まで積分すれば，補助定理 2 により

$$\left|\lim_{t\to\infty}\frac{1}{2}\{f(t)\}^2-\sum_{n=0}^{k-1}\frac{(-1)^n}{2(2n+1)}\right|<\frac{1}{2(2k+1)}$$

ここで $k\to\infty$ ならしめれば

$$\frac{1}{2}\left[\int_0^\infty e^{-t^2}dt\right]^2=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2(2n+1)}$$

ゆえに，補助定理 3 により

$$\int_0^\infty e^{-t^2}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

「証明 3」

$$F(u)=\left[\int_0^u e^{-x^2}dx\right]^2+\int_0^1\frac{e^{-u^2(x^2+1)}}{x^2+1}dx$$

とおけば，ただちに知られるように $F'(u)=0$ だから $F(u)$ は定数でなくてはならないが

$$F(0)=\int_0^1\frac{1}{x^2+1}dx=\frac{\pi}{4}$$

であるから，

$$F(u)\equiv\pi/4.$$

となる。ところで

$$\int_0^1 \frac{e^{-2u^2}}{x^2+1}dx \leqq \int_0^1 \frac{e^{-u^2(x^2+1)}}{x^2+1}dx \leqq \int_0^1 \frac{e^{-u^2}}{x^2+1}dx$$

より

$$\frac{\pi}{4}\, e^{-2u^2} \leqq \int_0^1 \frac{e^{-u^2(x^2+1)}}{x^2+1}dx \leqq \frac{\pi}{4}\, e^{-u^2}$$

従って，$u \to \infty$ のとき

$$\int_0^1 \frac{e^{-u^2(x^2+1)}}{x^2+1}dx \to 0$$

よって

$$\left[\int_0^u e^{-x^2}dx\right]^2 = \frac{\pi}{4}$$

ゆえに

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

以上の三つの証明は初等的ではあるが，二重積分や偏微分そしてまた無限級数などの知識を必要とする。それゆえ，これらの証明法は高等学校では無理なものであろう。そこで考えられるのが次のような証明である。この証明はよく知られたものであるが，かなり回りくどいものである。

「証明４」　以下のように４段階に分けて証明する。

(i)

$$I_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x dx$$

とおくと

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} I_{2n+1} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} I_{2n-2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

であることを証明する。

（証明）

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x dx = \begin{cases} \dfrac{(m-1)(m-3)\cdots 3\cdot 1}{m(m-2)\cdots 4\cdot 2}\dfrac{\pi}{2} & (m\text{ が偶数のとき}) \\ \dfrac{(m-1)(m-3)\cdots 4\cdot 2}{m(m-2)\cdots 5\cdot 3} & (m\text{ が奇数のとき}) \end{cases}$$

であり，かつ $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ において

$$0 < \sin^{2n+1} x < \sin^{2n} x < \sin^{2n-1} x,$$

であるから

$$I_{2n+1} < I_{2n} < I_{2n-1}$$

これより

$$1<\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}}<\frac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}}$$

すなわち

$$1<\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}}<\frac{2n+1}{2n}$$

よって

$$\frac{2n}{2n+1}\to 1\ (n\to\infty)$$

であるから

$$\lim_{n\to\infty}\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}}=1 \qquad \cdots\cdots\cdots①$$

さて，ここで

$$I_{2n+1}I_{2n}=\frac{2n\,(2n-2)\cdots\cdots4\cdot2}{(2n+1)\,(2n-1)\cdots\cdots5\cdot3}\cdot\frac{(2n-1)\,(2n-3)\cdots\cdots5\cdot3}{2n\,(2n-2)\cdots\cdots4\cdot2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$=\frac{\pi}{2(2n+1)}$$

であるから

$$2(2n+1)\,I_{2n+1}I_{2n}=\pi$$

これより

$$\sqrt{2(2n+1)}I_{2n+1}\sqrt{\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}}}=\sqrt{\pi}$$

従って

$$\sqrt{\frac{2(2n+1)}{4n}}\ \sqrt{n}I_{2n+1}\sqrt{\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}}}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

となり

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{2(2n+1)}{4n}}\ \sqrt{n}I_{2n+1}\sqrt{\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}}}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

となる。

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{2(2n+1)}{4n}}=1$$ かつ，①より $\lim_{n\to\infty}\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}}=1$

であるから

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}I_{2n+1}=\frac{\sqrt{\pi}}{2} \qquad \cdots\cdots\cdots②$$

が得られる。

同様にして

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}I_{2n-2}=\frac{\sqrt{\pi}}{2} \qquad \cdots\cdots\cdots③$$

も得られる。

(ii) $$\int_0^1 (1-x^2)^n dx < \int_0^\infty e^{-nx^2} dx < \int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)^n} dx$$

を証明する。

(証明) $e^u \geqq 1+u$

であるから，$u=x^2$ とおいて

$$e^{x^2} \geqq 1+x^2 \quad \text{すなわち} \quad e^{-x^2} \leqq \frac{1}{1+x^2}$$

また，$u=-x^2$ とおいて

$$e^{-x^2} \geqq 1-x^2$$

この二つから

$$1-x^2 \leqq e^{-x^2} \leqq \frac{1}{1+x^2}$$

よって

$$(1-x^2)^n \leqq e^{-nx^2} \leqq \frac{1}{(1+x^2)^n}$$

これより明らかに

$$\int_0^1 (1-x^2)^n dx < \int_0^\infty e^{-nx^2} dx < \int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)^n} dx$$

(iii) (イ) $$\int_0^1 (1-x^2)^n dx = I_{2n+1}$$

(ロ) $$\int_0^\infty e^{-nx^2} dx = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^\infty e^{-t^2} dt$$

(ハ) $$\int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)^n} dx = I_{2n-2}$$

を証明する。

(証明)

(イ) $x=\cos t$ とおけば

$$\int_0^1 (1-x^2)^n dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} t dt$$

$$= I_{2n+1}$$

(ロ) $\sqrt{n}x=t$ とおけば

$$\int_0^\infty e^{-nx^2} dx = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^\infty e^{-t^2} dt$$

(ハ) $x=\tan u$ とおけば

$$\int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)^n} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-2} u du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-2} u du = I_{2n-2}$$

(iv) 先の(ii)，(iii)より

$$\sqrt{n}\,I_{2n+1}<\int_0^\infty e^{-x^2}dx<\sqrt{n}\,I_{2n-2}$$

となるから

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\,I_{2n+1}\leqq\int_0^\infty e^{-x^2}dx\leqq\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\,I_{2n-2}$$

②，③より

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}\leqq\int_0^\infty e^{-x^2}dx\leqq\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

ゆえに

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

この積分公式の証明は他にもあるが，初等的なものは以上の四種類位ではなかろうか。現在のところ，筆者は，これ以上の初等化された証明については知らない。

公式

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

は見事な美しいものであり，かつまた，応用上も重要なものであるが，この証明を，たとえ理系コースの高校生であっても，そのすべての者に与えることは，今日の状況の中では無理であろう。

「数学者とは，この公式が $2\times2=4$ と同じ位に自明であるような人である」(7) という言葉があるが，高校生は，無論，数学者ではなく，この公式は決して自明ではない。そこで筆者は，この公式の成立は，これを数値計算によって確かめるのも教育的な方法ではないかと考えている。本研究の［II］でみたように，平成元年（1989）に告示された学習指導要領には『数学C』の中に「数値積分法」という項目が新しく設けられたのであった。高等学校での「数値積分法」は，このような公式の成立の確かめにも大いに活用すべきであろう。尚，この場合のように，急激に減少する関数に対しては台形公式が最も精度が高い(8) といわれていることを付記しておきたい。

本節の表題の公式の証明はこれまでのところは大学での内容とされてきた。しかし，そもそも微積分に大学の微積分と高等学校の微積分があるわけではない。勿論，筆者は，高校生に大学の微積分の内容を無批判に与えることには反対であるが，同時にまた，今日の与えられた高等学校の微積分教材の中に頑ななまでに閉じこもって，徒に重箱の隅を楊枝でほじくるような指導の仕方にも反対したい。高等学校における微積分教育はおおらかにして，しかも大道を歩むものでなければならないと思う。

参　考　文　献

(1)　高木貞治：『解析概論，改訂第三版』，岩波書店，1976，P. 50
(2)　一松　信他：『新数学事典』，大阪書籍，1979，P. 487
(3)　高木貞治：『解析概論，増訂版』，岩波書店，1949，PP. 126～127
(4)　上掲書(1)　P. 111

(5) 石川廣美：「$\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$」,『数学セミナー』, 日本評論社, Vol. 9, No. 6, 1970, P. 52
(6) 一松 信：『解析学序説 上巻』, 裳華房, 1970, P. 236
(7) 遠山 啓, 矢野健太郎編：「100人の数学者」,『数学セミナー』(臨時増刊), 日本評論社, 1971, P. 36
(8) 上掲書(2), P. 786