愛媛大学教育学部紀要　教育科学　第39巻　第2号　115～132　1993

高等学校における微積分教育の研究〔VI〕

―― 第五章　数列と漸化式の発展的統合的な扱い方 ――

石　川　廣　美

（数学教育研究室）

（平成4年10月12日受理）

本章では，数列と漸化式の発展的統合的な扱い方について考察する。近年の数学教育界には世界的にブール代数，差分法，グラフ理論等の，いわゆる離散数学への関心を非常に高めてきているのであるが，(1) 第二章でも述べたように，筆者はすでに十数年前から，この離散数学の重要性に注目し，また，それの高等学校での取り扱い方について考察してきたのであった。そして，数列と漸化式についても，特異な技法を用いる取り扱い方を改め，差分法を導入して発展的統合的に取り扱うべきことを主張してきた。(2)

本稿では，数列と漸化式に関する筆者のこれまでの考察を総括すると共に，社会の急速な進展ならびに世界の数学教育の趨勢に鑑みて，差分法を高等学校に導入し，数列と漸化式を発展的統合的に取り扱うべきことを一層強く主張していきたいと考えているのである。

§1.　数列教育の反省

ヨーロッパにおいては無論のことであるが，我国でも数列教育の歴史はかなり古く，明治3年（1870）に開設された静岡小学校の数学課程の中には〈課外〉としてではあるが，“対数表用法など”と共に“級数”という項目がみられる。(3) また，本格的に学校教育が始まった頃の，明治19年（1886）の尋常中学校課程（数学）には，等差級数，等比級数，調和級数という具体的かつ明確な内容の下に，級数，すなわち今日の我々のいう数列が取り上げられている。そして，本研究の第一章でみたように，中等教育に初めて微積分が導入された昭和17年（1942）の中学校教授要目，高等女学校教授要目でも，勿論，数列が取り上げられていたのであったが，ここでの数列教育は明らかに微積分教育をも意識したものだったのであった。

さて，数列教育は新制の高等学校に引き継がれて，昭和23年（1948）以来今日まで脈々と続いてきていることは，既に本研究の第二章でみた通りである。この半世紀の高等学校での数列教育の内容は，概ね以下の五つから成っているとみてよいであろう。そして，これは多くの場合微積分と共に扱われ，しかも微積分の前に取り上げられていたのであった。

(1)　数列の意味
(2)　数列の和
(3)　数列の極限
(4)　数学的帰納法
(5)　漸化式（帰納的定義）

このことは，高等学校での数列教育は次の二つの意義をもつものとされてきたことを示すも

のと考えられよう。

(イ) 数列それ自体の意義

(ロ) 微積分教育のための予備的・基礎的なものとしての意義

高等学校における数列教育が，この後者の(ロ)の意義を意識するのは大学等での高等教育における微積分教育の定型が目に映るからであろう。すでに幾度も述べたように，我国の中等教育に微積分が導入されたのは昭和17年（1942）のことであるが，旧制の高等学校や専門学校，そして勿論大学においては，それよりもずっと以前から微積分教育が行われていた。そこでの微積分教育には一つの定型が存在するのである。その定型なるものの姿は，かの高木貞治の『解析概論』，藤原松三郎の『微分積分学』，竹内端三の『高等微分学』，『高等積分学』等々の名著といわれてきたものから，今日の『微分積分学』あるいは『解析学』等々と銘打った書物をみることによって明らかとなるのである。すなわち，それは次のように概念構成を進めていく微積分教育なのである。

実数 ⇨ 数列とその極限 ⇨ 関数とその極限 ⇨ 微分 ⇨ 積分

高等学校における微積分教育はこの定型に倣ってきたのである。それによって，高等学校でも，数列は微積分の前に置かれ，微積分教育のための予備的・基礎的なものとも位置付けられていると思われてきたのである。しかし，それは単なる形だけのものに過ぎないのである。そのことは，上の定型の中の

数列の極限 ⇨ 関数の極限

に焦点をあててみることによって明らかとなるであろう。

関数の極限の前に数列の極限をやっておかなければならないという理由は，それを端的にいえば，関数についての収束条件定理はこれを数列の収束条件定理から導くからであるといえよう。すなわち

> $x \to a$ のとき $f(x)$ が収束するための必要十分条件は任意の正数 ε に対して，δ を定めて，$0<|x-a|<\delta$ の任意の x_1, x_2 について $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$ とできることである。

という定理は，これを数列についてのコーシーの収束条件定理

> 数列 $\{a_n\}$ が収束するための必要十分条件は，任意の正数 ε に対して，番号 m を定めて，$p, q \geqq m$ なる任意の p, q に対して $|a_p-a_q|<\varepsilon$ とできることである。

から導いているのである。

ところで，高等学校ではこのような定理を取り扱ってきたであろうか。半世紀におよぶ高等学校での微積分教育の中に，このような定理を取り扱ったことは一度もないのである。それは，このような定理を取り扱うことは高等学校では無理であり，その理念にも反するからであろう。従って，高等学校では，微積分の前に数列を置いても，微積分の定型の形だけを倣っているに過ぎないのである。

高等学校における数列教育は，微積分教育を睨んでの，いわば幻想的な意義を抱き，そのこ

とが(イ)の“数列それ自体の意義”を深く認識し，数列それ自体を発展的に取り扱うことを阻んで来たように思われる。その結果，数列教育が袋小路に陥っている状態から脱出できず，数列の和を求めたり漸化式を解くときの特異な技法や名人芸とまで皮肉られている技巧を排除することができないできているのである。高等学校における数列教育の実質的実際的意義は(イ)にある。そして数列それ自体をもっと大きく発展的に取り扱うことこそが高等学校における数列教育の進むべき道であると筆者は考えているのである。

§2. 差分法の導入

そもそも数列は自然数の集合 N を定義域とする関数

$$f : x \longrightarrow f(x), \qquad x \in N$$

に他ならない。（その意味で，本章では，以後は，数列の一般項を $f(x)$ と表すことにする）従って，数列は特別な離散的な関数であって，高等学校においては，数列といわれる

　　自然数を定義域とする離散的な関数

と，微積分を指向する

　　実数を定義域とする連続的な関数

の２種類の関数を取り扱っているとみることができるのである。

そこで，筆者は，前節での反省の上に立って，高等学校における数学教育は，前者の数列，すなわち自然数を定義域とする関数にもっと独立した高い地位を与え，そして，後者の実数を定義域とする関数と整合性のある扱い方をしていくべきであると考えているのである。それは，差分法を導入して，実数を定義域とする関数が

　　微分　⇨　積分　⇨　微分方程式

と進むのに対応させて，自然数を定義域とする関数も

　　差分　⇨　和分　⇨　差分方程式

とすべきであるという考え方である。

その理由は，まず第一に，数列すなわち自然数を定義域とする関数が微積分教育のための予備的・基礎的なものとはなっていないからである。このことは先に述べたとおりである。そして，自然数を定義域とする関数自身が，豊かな応用，知的遊戯としての豊かな展開ができる素材だからである。

第二の理由は，これまでの数列教育が袋小路に陥っている状態から脱出し，また，数列の和を求めたり漸化式を解くときの特異な技法や名人芸とまで皮肉られている技巧を排除して，発展的統合的な扱い方にしていかなければならないからである。これは小手先の改良で対処することができるものではなく，差分法，すなわち差分，和分，差分方程式を導入して，数列の扱い方を抜本的に改革する必要があると考えるのである。尚，このことについては，先の§１での(2)の数列の和と，(5)の漸化式に焦点をあてて，これらを和分，差分方程式として以下の節で考察することにしている。

第三に，自然数を定義域とする関数と実数を定義域とする関数との扱いを

　　差分 ―――――― 微分
　　和分 ―――――― 積分
　　差分方程式 ――― 微分方程式

と対応させ，両者の関数について統一的で整合性のある解析の仕方を示し，その両者の構造の類似性を示すことが大切であると考えるからである。このことによって，数学というものの統一された整合性のある美しさ，面白さといったものの一端を感得させることができるように思われるのである。

第四の理由は社会的要請に応えるためである。言うまでもなく世はまさに情報時代でありコンピューター時代である。そこでは差分法は重要である。従って，高等学校に差分法を導入し，時代に対応できる素地を養っておくべきことが強く要請されているように思われるのである。

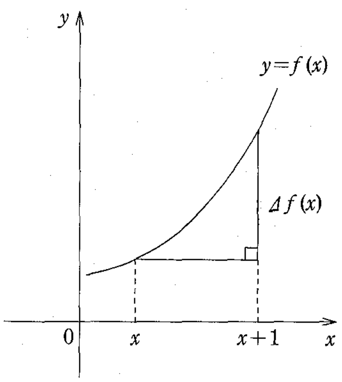
以上のような理由によって，筆者は，高等学校に差分法を導入し，差分，和分，差分方程式等を教育内容として，それによって数列を発展的統合的に取り扱うべきであると考えるのである。そして，そうすることが，今や高等学校における数学教育にとっての急務であると認識しているのである。

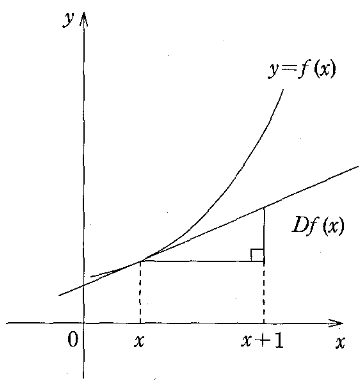
§3　数列の発展的統合的な扱い方

上に述べた「自然数を定義域とする関数と実数を定義域とする関数との扱いを対応させ，両者の関数について統一的で整合性のある解析の仕方を示し，その両者の構造の類似性を示す」ということは以下のようにすることである。

まず差分を，右の欄の微分と対応させて次のように扱うのである。

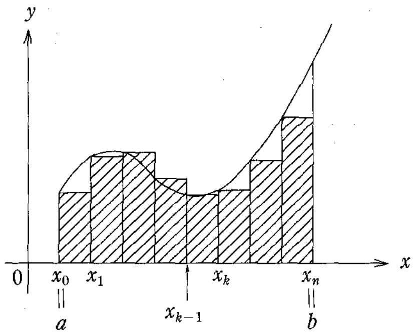
差　分　法	微　分　法
定義　$\Delta f(x)=f(x+1)-f(x)$	定義　$Df(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$
(1)　$\Delta(\alpha f(x)+\beta g(x))$ $=\alpha\Delta f(x)+\beta\Delta g(x)$	(1)　$D(\alpha f(x)+\beta g(x))$ $=\alpha Df(x)+\beta Dg(x)$
(2)　$\Delta(f(x)g(x))$ $=g(x)\Delta f(x)+f(x+1)\Delta g(x)$ $=g(x+1)\Delta f(x)+f(x)\Delta g(x)$	(2)　$D(f(x)g(x))$ $=g(x)Df(x)+f(x)Dg(x)$
(3)　$\Delta\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)=\dfrac{g(x)\Delta f(x)-f(x)\Delta g(x)}{g(x)g(x+1)}$	(3)　$D\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)=\dfrac{g(x)Df(x)-f(x)Dg(x)}{g(x)^2}$





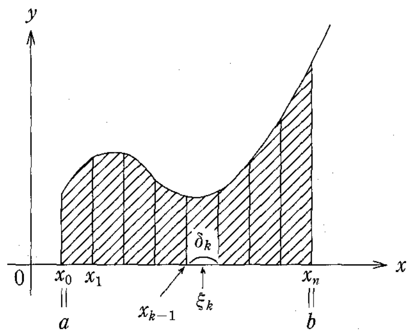
これに続いて，和分を右の欄の積分と対応させて次のように扱うのである。

和　　分　　法	積　　分　　法
$\Delta F(x)=f(x)$ であるとき (i) $\mathfrak{S} f(x)\,\Delta x=F(x)+c$ (ii) $\mathfrak{S}_a^b f(x)\,\Delta x=F(b)-F(a)$	$DF(x)=f(x)$ であるとき (i) $\int f(x)\,dx=F(x)+c$ (ii) $\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$
$\mathfrak{S}\{\alpha f(x)+\beta g(x)\}\,\Delta x$ $=\alpha\,\mathfrak{S} f(x)\,\Delta x+\beta\,\mathfrak{S} g(x)\,\Delta x$	$\int\{\alpha f(x)+\beta g(x)\}dx$ $=\alpha\int f(x)\,dx+\beta\int g(x)\,dx$
$\mathfrak{S}\{f(x)\,\Delta g(x)\}\,\Delta x$ $=f(x)\,g(x)-\mathfrak{S}\{g(x+1)\,\Delta f(x)\}\,\Delta x$	$\int f(x)\,Dg(x)\,dx$ $=f(x)\,g(x)-\int g(x)\,Df(x)\,dx$



$$\mathfrak{S}_a^b f(x)\,\Delta x=\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)$$

定　和　分



$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\delta\to 0}\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\,\delta_k$$

定　積　分

差分法を導入し，自然数を定義域とする離散的な関数は，これをこのようにして，実数を定義域とする関数と同じ思想に則って扱うことにより，はじめて発展的統合的な扱い方となるのである。そのことを数列の和の求め方についてみてみよう。

これまでの伝統的な数列の和の求め方は，個々の数列に応じて，特異な技法を用いるものであった。その様子を若干の例によってみておきたい。

(i) 初項 a, 公差 d の等差数列の和

これは，項の順序を逆にした和を作り，これと元の式とを辺々加えるという技巧を用いる。すなわち次のようにするのである。

$$S=a+(a+d)+\cdots\cdots+\{a+(n-2)\,d\}+\{a+(n-1)\,d\}$$
$$S=\{a+(n-1)\,d\}+\{a+(n-2)\,d\}+\cdots\cdots+(a+d)+a$$

辺々加えて

$$2S=\{2a+(n-1)d\}+\{2a+(n-1)d\}+\cdots\cdots+\{2a+(n-1)d\}$$
$$=n\{2a+(n-1)d\}$$

ゆえに

$$S=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}$$

(ii) **初項 a, 公比 r の等比数列の和**

これには，公比 r を乗じた式を作り，元の式からこれを減ずるという技巧を用いる。すなわち次のようにするのである。

$$S=a+ar+\cdots\cdots+ar^{n-1}$$
$$rS=\quad ar+\cdots\cdots+ar^{n-1}+ar^{n}$$

辺々減じて

$$(1-r)S=a-ar^{n}$$

ゆえに

$$S=\frac{a(1-r^{n})}{1-r} \qquad (r\neq 1)$$

(iii) **平方数の和**

これには恒等式

$$(x+1)^3-x^3=3x^2+3x+1$$

を持ち出し，この x に 1, 2, …, n を順次代入し，それらの式を辺々加えるという技巧を用いる。すなわち次のようにするのである。

$$\begin{array}{rl}
 & 2^3-1^3=3\cdot 1^2+3\cdot 1+1 \\
 & 3^3-2^3=3\cdot 2^2+3\cdot 2+1 \\
 & \cdots\cdots\cdots\cdots \\
+) & (n+1)^3-n^3=3\cdot n^2+3\cdot n+1 \\
\hline
 & (n+1)^3-1^3=3\cdot S+3(1+2+\cdots\cdots+n)+n
\end{array}$$

よって

$$3S=(n+1)^3-1^3-\frac{3}{2}n(n+1)-n$$
$$=\frac{1}{2}n(n+1)(2n+1)$$

ゆえに

$$S=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

以上の若干の例によっても明白なように，これまでの伝統的な数列の和の求め方は，それぞれの数列ごとに特異な技法を用いるものであって，全く一貫性のないものである。およそ発展的統合的といえるものではないであろう。

一方，本研究の第二章でみたように，数列の和を求めることについて，歴代の学習指導要領は，等差数列および等比数列の和を求めることと，せいぜい一般項が n^2, n^3 の程度の数列の

和を求めることにのみ厳しく限定してきたのであるが，そのように小さく限定せざるを得ない大きな原因も，結局のところ，従来からの発展性のない統合性のない数列の和の取り扱い方に固執するところにあると筆者は考えているのである。

例えば，今，一般項が多項式で表される数列の和を求める場合を考察してみよう。これまでの伝統的な取り扱い方は，せいぜい次の三つの公式だけを与えこれを用いるものであった。

$$\sum_{x=1}^{n} x=\frac{1}{2}\,n\,(n+1) \qquad \cdots\cdots\cdots ①$$

$$\sum_{x=1}^{n} x^2=\frac{1}{6}\,n\,(n+1)\,(2n+1) \qquad \cdots\cdots\cdots ②$$

$$\sum_{x=1}^{n} x^3=\frac{1}{4}\,n^2\,(n+1)^2 \qquad \cdots\cdots\cdots ③$$

すなわち

$$\sum_{x=1}^{n} x^4 \quad や \quad \sum_{x=1}^{n} x^5, \quad そして一般に \quad \sum_{x=1}^{n} x^m$$

についての公式は取り上げないのであった。それは従来の取り扱い方に固執する限り仕方のないことであって，これらの高次の和を求める式は極めて複雑になり，公式とするには不適当なものなのである。

因みに

$$\sum_{x=1}^{n} x^4=\frac{1}{30}\,n\,(n+1)\,(2n+1)\,(3n^2+3n-1) \qquad \cdots\cdots\cdots ④$$

$$\sum_{x=1}^{n} x^5=\frac{1}{12}\,n^2\,(n+1)^2\,(2n^2+2n-1) \qquad \cdots\cdots\cdots ⑤$$

である。

上記の①，②，③の三つだけを取り上げ，それ以上のことには触れられず，的確な見通しも与えられず，一般項が高々3次式までの数列の和を求めることに止めざるを得ないという，これまでの伝統的な数列の和の取り扱い方は，いわば袋小路になっているのであって，これもまた発展性統合性を欠くものであるといわねばならないであろう。

さて，差分法を導入し，和分を用いれば，以上のような発展的統合的でないという欠陥はこれを一挙に除去することができるのである。しかも，数列という自然数を定義域とする離散的な関数の和の求め方は，実数を定義域とする連続的な関数の和の求め方と同じ思想，同じ形式に立つことができるのである。それは，和分によれば，数列の和，すなわち自然数を定義域とする関数の和は，次の形式で求められるからである。

$$\boxed{\begin{aligned}\sum_{x=m}^{n-1} f(x) &= \mathop{\mathrm{S}}_{m}^{n} f(x)\,\Delta x \\ &= [F(x)]_m^n = F(n)-F(m) \\ &\qquad (F(x)\ は\ f(x)\ の不定和分)\end{aligned}}$$

これは要するに，関数 $f(x)$ の不定和分 $F(x)$ を見いだすことによってその和を求めるものであって，かの《微積分法の基本公式》といわれるもの，すなわち

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

（$F(x)$ は $f(x)$ の不定積分）

と同じ思想であり形式であることは明らかである。

勿論，上の定和分の公式の成立を高校生に示すことは容易である。実際

$F(x)$ が $f(x)$ の不定和分であるときは

$$\varDelta F(x) = f(x)$$

よって

$$F(x+1) - F(x) = f(x)$$

従って

$$\begin{aligned}\sum_{x=m}^{n-1} f(x) &= \{F(n)-F(n-1)\} + \{F(n-1)-F(n-2)\} + \cdots\cdots \\ &\quad + \{F(m+2)-F(m+1)\} + \{F(m+1)-F(m)\} \\ &= F(n) - F(m)\end{aligned}$$

となるからである。

この定和分の公式によって，数列の和は次のように求められていくことになる。

まず，一般項が整式である場合をみてみよう。和分では，一般項が整式や分数式である場合には階乗関数が用いられる。念のために述べておくと，階乗関数とは

$$x^{(n)} = x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1) \qquad (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

$$x^{(0)} = 1$$

$$x^{(n)} = \frac{1}{(x+1)(x+2)\cdots(x-n)} \qquad (n=-1,\ -2,\ \cdots)$$

で定義される関数である。この階乗関数の導入は高等学校においても容易である。また，階乗関数 $x^{(n)}$ の不定和分は

$$\mathop{\Large\mathrm{S}} x^{(n)}\varDelta x = \frac{1}{n+1}\,x^{(n+1)} + c \qquad (n \fallingdotseq -1,\ c \text{ は和分定数})$$

となるが，この証明も無論容易である。

「例」

$$\begin{aligned}\sum_{x=1}^{n} x^{(1)} &= \mathop{\Large\mathrm{S}}_{1}^{n+1} x^{(1)}\varDelta x \\ &= \left[\frac{1}{2}\,x^{(2)}\right]_1^{n+1} = \frac{1}{2}(n+1)^{(2)} - \frac{1}{2}\cdot 1^{(2)} = \frac{1}{2}(n+1)\,n\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{x=1}^{n} x^{(2)} &= \mathop{\Large\mathrm{S}}_{1}^{n+1} x^{(2)}\varDelta x \\ &= \left[\frac{1}{3}\,x^{(3)}\right]_1^{n+1} = \frac{1}{3}(n+1)^{(3)} - \frac{1}{3}\cdot 1^{(3)} = \frac{1}{3}(n+1)\,n\,(n-1)\end{aligned}$$

$$\sum_{x=1}^{n} x^{(3)}=\mathop{S}_{1}^{n+1} x^{(3)}\varDelta x$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^{(4)}\right]_1^{n+1}=\frac{1}{4}(n+1)^{(4)}-\frac{1}{4}\cdot 1^{(4)}=\frac{1}{4}(n+1)n(n-1)(n-2)$$

一般に

$$\sum_{x=1}^{n} x^{(m)}=\mathop{S}_{1}^{n+1} x^{(m)}\varDelta x=\left[\frac{1}{m+1}x^{(m+1)}\right]_1^{n+1}=\frac{1}{m+1}\{(n+1)^{(m+1)}-1^{(m+1)}\}$$

$$=\frac{1}{m+1}(n+1)^{(m+1)} \qquad (m=1,\ 2,\ \cdots) \qquad \cdots\cdots\cdots(\mathrm{a})$$

である。

従って

$$\sum_{x=1}^{n} x(x-1)(x-2)\cdots(x-m+1)=\frac{1}{m+1}(n+1)n(n-1)\cdots(n-m+1)$$

$$(m=1,\ 2,\ \cdots)$$

である。

「例」

$$\sum_{x=1}^{n} x^2=\mathop{S}_{1}^{n+1} x^2\varDelta x=\mathop{S}_{1}^{n+1}\{x^{(2)}+x^{(1)}\}\varDelta x=\left[\frac{1}{3}x^{(3)}+\frac{1}{2}x^{(2)}\right]_1^{n+1}$$

$$=\frac{1}{3}(n+1)^{(3)}-\frac{1}{3}\cdot 1^{(3)}+\frac{1}{2}(n+1)^{(2)}-\frac{1}{2}\cdot 1^{(2)}$$

$$=\frac{1}{3}(n+1)n(n-1)+\frac{1}{2}(n+1)n$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$\sum_{x=1}^{n} x^3=\mathop{S}_{1}^{n+1} x^3\varDelta x=\mathop{S}_{1}^{n+1}\{x^{(3)}+3x^{(2)}+x^{(1)}\}\varDelta x=\left[\frac{1}{4}x^{(4)}+x^{(3)}+\frac{1}{2}x^{(2)}\right]_1^{n+1}$$

$$=\frac{1}{4}(n+1)^{(4)}-\frac{1}{4}\cdot 1^{(4)}+(n+1)^{(3)}-1^{(3)}+\frac{1}{2}(n+1)^{(2)}-\frac{1}{2}\cdot 1^{(2)}$$

$$=\frac{1}{4}(n+1)n(n-1)(n-2)+(n+1)n(n-1)+\frac{1}{2}(n+1)n$$

$$=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

このように，従来の伝統的な取り扱い方では

$$\sum_{x=1}^{n} x^{(m)} \qquad (m=1,\ 2,\ 3) \qquad \cdots\cdots\cdots(\mathrm{a})'$$

は，公式

$$\sum_{x=1}^{n} x^{m} \qquad (m=1,\ 2,\ 3) \qquad \cdots\cdots\cdots(\mathrm{b})$$

の応用と考えられたのに対して，和分による取り扱い方ではこれが逆になり，(b)が(a)′の応用

となるのである。しかし，(b)の形式は m が大きくなると非常に複雑になるのに対して，(a)′は m の大小に拘わずいつの場合にも(a)のように規則正しく簡明なものとなるのであって，公式としてどちらが優れているかは明白であろう。

ところで，一般に x の m 次の整式 $f(x)$ は，階乗関数 $x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(m)}$ の1次結合で表される。従って，関数 $f(x)$ が高次の整式の場合でも，これを階乗多項式に直すことによって，その和は容易に求められる。

「例」

$\sum_{x=1}^{n}(5x^4-2x^3-5x^2-2x+2)$ を求める。

まず，階乗多項式に直すために

$$5x^4-2x^3-5x^2-2x+2=ax^{(4)}+bx^{(3)}+cx^{(2)}+dx^{(1)}+e$$

とおいて，未定係数法により a, b, c, d, e を定める。勿論これは組立除法を用いればより簡単に求められる。いずれにしても

$$a=5,\ b=28,\ c=24,\ d=-4,\ e=2$$

となり，与えられた関数は，

$$5x^4-2x^3-5x^2-2x+2=5x^{(4)}+28x^{(3)}+24x^{(2)}-4x^{(1)}+2$$

と表される。

従ってこの和は次のように求められる。

$$\begin{aligned}\sum_{x=1}^{n}(5x^4-2x^3-5x^2-2x+2)&=\int_1^{n+1}(5x^4-2x^3-5x^2-2x+2)\Delta x\\&=\int_1^{n+1}(5x^{(4)}+28x^{(3)}+24x^{(2)}-4x^{(1)}+2)\Delta x\\&=[x^{(5)}+7x^{(4)}+8x^{(3)}-2x^{(2)}+2x^{(1)}]_1^{n+1}\\&=(n+1)^{(5)}+7(n+1)^{(4)}+8(n+1)^{(3)}-2(n+1)^{(2)}+2(n+1)^{(1)}-2\\&=n^5+2n^4-n^3-4n^2\end{aligned}$$

次に関数 $f(x)$ が分数式になる場合についてみてみよう。

「例」

$$\begin{aligned}\sum_{x=1}^{n}x^{(-2)}&=\int_1^{n+1}x^{(-2)}\Delta x=[-x^{(-1)}]_1^{n+1}=-(n+1)^{(-1)}+1^{(-1)}=-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{1+1}\\&=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{x=1}^{n}x^{(-3)}&=\int_1^{n+1}x^{(-3)}\Delta x=\left[-\frac{1}{2}x^{(-2)}\right]_1^{n+1}=-\frac{1}{2}(n+1)^{(-2)}+\frac{1}{2}\cdot 1^{(-2)}\\&=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2\cdot 3}-\frac{1}{(n+2)(n+3)}\right\}\end{aligned}$$

すなわち

$$\sum_{x=1}^{n}\frac{1}{(x+1)(x+2)}=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}$$

$$\sum_{x=1}^{n}\frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)}=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2\cdot 3}-\frac{1}{(n+2)(n+3)}\right\}$$

である。

一般に，$m>1$の整数とするとき

$$\sum_{x=1}^{n}x^{(-m)}=\mathop{\mathfrak{S}}_{1}^{n+1}x^{(-m)}\Delta x=\left[\frac{1}{-m+1}\,x^{(-m+1)}\right]_{1}^{n+1}$$

$$=\frac{1}{-m+1}\{(n+1)^{(-m+1)}-1^{(-m+1)}\}$$

$$=\frac{1}{m-1}\left\{\frac{1}{m!}-\frac{1}{(n+2)(n+3)\cdots(n+m)}\right\}$$

となる。

すなわち

$$\sum_{x=1}^{n}\frac{1}{(x+1)(x+2)\cdots(x+m)}=\frac{1}{m-1}\left\{\frac{1}{m!}-\frac{1}{(n+2)(n+3)\cdots(n+m)}\right\}$$

である。

関数が少し一般的な分数式の場合，例えば，次のような場合には，その和は以下のようにして求めることになる。

「例」

$$\sum_{x=1}^{n}\frac{x+1}{x(x+2)(x+3)}=\sum_{x=1}^{n}\frac{x(x+1)+x+1}{x(x+1)(x+2)(x+3)}$$

$$=\sum_{x=1}^{n}\left\{\frac{1}{(x+2)(x+3)}+\frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)}+\frac{1}{x(x+1)(x+2)(x+3)}\right\}$$

$$=\sum_{x=2}^{n+1}\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\sum_{x=1}^{n}\frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)}+\sum_{x=0}^{n-1}\frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$$

$$=\mathop{\mathfrak{S}}_{2}^{n+2}x^{(-2)}\Delta x+\mathop{\mathfrak{S}}_{1}^{n+1}x^{(-3)}\Delta x+\mathop{\mathfrak{S}}_{0}^{n}x^{(-4)}\Delta x$$

$$=[-x^{(-1)}]_{2}^{n+2}+\left[-\frac{1}{2}\,x^{(-2)}\right]_{1}^{n+1}+\left[-\frac{1}{3}\,x^{(-3)}\right]_{0}^{n}$$

$$=-\frac{1}{n+3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(n+2)(n+3)}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\cdot 3}-\frac{1}{3}\,\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}+\frac{1}{3}\,\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}$$

$$=-\frac{6n^2+21n+17}{6(n+1)(n+2)(n+3)}+\frac{17}{36}$$

尚，不定和分について

$$\mathfrak{S}(a+bx)^{(n)}\Delta x=\frac{1}{(n+1)b}\,(a+bx)^{(n+1)}$$

$$(n\neq -1,\ a,\ b\text{は定数})$$

であることは容易に示される。和はこれを用いても求められるが，それについての記述は省略する。

ところで，これまでの考察では，例えば

$$\sum_{x=1}^{n} x^{(-1)} \qquad \text{すなわち} \qquad \sum_{x=1}^{n} \frac{1}{x+1}$$

の場合のように，分母が1次式であるものを避けてきた。それは，このような場合にはプサイ関数が必要で

$$\mathop{\large S} x^{(-1)} \Delta x = \psi(x+1)+c \qquad\qquad (c \text{ は和分定数})$$

となり，それは，いわば積分の場合の

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \log x + c \qquad\qquad (c \text{ は積分定数})$$

と類似のことであるが，しかし，これを高等学校で取り扱うことは適切ではないと判断したからである。

次に，一般項$f(x)$が有理関数でない場合についてみていくことにする。まず，本節の冒頭に挙げた等比数列の和を和分で求めてみよう。

「例」

$$\sum_{x=1}^{n} ar^{x-1} = \mathop{\large S}_{1}^{n+1} ar^{x-1}\Delta x = \left[a\,\frac{r^{x-1}}{r-1}\right]_1^{n+1} = a\left(\frac{r^n}{r-1} - \frac{1}{r-1}\right)$$

$$= \frac{a(r^n-1)}{r-1} \qquad\qquad (r \fallingdotseq 1)$$

次に余弦関数の和を求めてみよう。

「例」

$$\sum_{x=1}^{n} \cos\theta x = \mathop{\large S}_{1}^{n+1} \cos\theta x\,\Delta x$$

$$= \left[\frac{\sin\theta\,(x-\frac{1}{2})}{2\sin\frac{\theta}{2}}\right]_1^{n+1} = \frac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}}\left\{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta - \sin\frac{\theta}{2}\right\}$$

$$= \frac{\cos\frac{n+1}{2}\theta\,\sin\frac{n\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

最後に，部分和方法を用いる例を揚げておきたい。

「例」

$$\sum_{x=1}^{n} xr^{x-1} = \mathop{\large S}_{1}^{n+1} xr^{x-1}\Delta x = \left[x\cdot\frac{r^{x-1}}{r-1}\right]_1^{n+1} - \mathop{\large S}_{1}^{n+1} \frac{r^x}{r-1}\Delta x$$

$$= (n+1)\frac{r^n}{r-1} - \frac{1}{r-1} - \left[\frac{r^x}{(r-1)^2}\right]_1^{n+1}$$

$$= (n+1)\,\frac{r^n}{r-1} - \frac{1}{r-1} - \frac{r^{n+1}}{(r-1)^2} + \frac{r}{(r-1)^2}$$

$$=\frac{1-r^n}{(r-1)^2}+\frac{nr^n}{r-1}$$

この例での方法は，定積分での部分積分法に対応するものであるということは言うまでもない。

以上の考察によって明らかなように，数列の和を求めることは，差分法を導入することによって，発展的統合的に取り扱うことができるのである。

§４　漸化式の発展的統合的な扱い方

漸化式という用語は，高等学校の現場では早くから市民権を得て用いられていたものであるが，学習指導要領の中で用いられるようになったのは平成元年に告示されたそれでのことである。それ以前は帰納的定義とされていたことは本研究の第二章でみた通りである。帰納的定義から漸化式となったことは一歩前進ではあるが，筆者はこれをさらに進めて差方方程式としていかなければならないと考えているのである。

さて，この漸化式は，これまでの高等学校では極めて技巧的に取り扱われてきたのであった。その様子をここではヒボナッチの数列の一般項を求めることを通してみておくことにする。

周知のように，ヒボナッチの数列は，初項が１，第２項が１であって，第３項以下の各項はすぐその前の二つの項の和になっている数列

１，１，２，３，５，８，……

である。従って次の漸化式が成立する。

$$\begin{cases} a_{n+2}=a_{n+1}+a_n & (n=1,\ 2,\ \cdots) \\ a_1=1,\ a_2=1 \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots(1)$$

この漸化式を解けばヒボナッチの数列の一般項が求まるわけである。これまでの高等学校での解法の方針は，この３項間の漸化式を２項間の漸化式に直し，その２項間の漸化式を解くことによって求めようとするものである。従って，例えば以下のように解かれるのである。

今　$\alpha+\beta=1,\ \alpha\beta=-1$ とおけば，(1)の式は

$$a_{n+2}=(\alpha+\beta)\,a_{n+1}-\alpha\beta a_n$$

となる。よって

$$a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta\,(a_{n+1}-\alpha a_n)$$

ここで

$$a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=b_{n+1}$$

とおけば

$$b_{n+1}=\beta b_n$$

従って，数列 $\{b_n\}$ は初項 b_1, 公比 β の等比数列であるから

$$b_n=b_1\beta^{n-1}$$

ここに

$$b_1=a_2-\alpha a_1=1-\alpha=\beta$$

であるから

$$b_n=\beta^n$$

よって

$$a_{n+1}-\alpha a_n=\beta^n \qquad \cdots\cdots\cdots(2)$$

同様にして

$$a_{n+1}-\beta a_n=\alpha^n \qquad \cdots\cdots\cdots(3)$$

(3)−(2)より

$$(\beta-\alpha)\,a_n=\beta^n-\alpha^n \qquad \cdots\cdots\cdots(4)$$

ここで

$$\alpha=\frac{1-\sqrt{5}}{2},\ \beta=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

として一般性を失わないから，(4)より

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}$$

この解法は要するに階数降下法であって，そのこと自体は重要な数学的方法ではあるが，余りにも技巧的であることは否定できない。しかも，階数が高くなった場合の解法の見通しの暗いものである。このような発展性のない解法は，数学教育の本道を行くものとは筆者には思われないのである。

ところで，定数係数の2階同次線形微分方程式

$$a_2 f''(x)+a_1 f'(x)+a_0 f(x)=0$$

は次のように解かれるのであった。

微分方程式 $a_2 f''(x)+a_1 f'(x)+a_0 f(x)=0\quad(a_2\neq 0)$ 特性方程式 $a_2\rho^2+a_1\rho+a_0=0$		
特性方程式の解の分類	特性方程式の係数条件	微分方程式の一般解
相異なる実解 $\rho_1\neq\rho_2$	$a_1^2-4a_0a_2>0$	$f(x)=c_1e^{\rho_1x}+c_2e^{\rho_2x}$
重　解 $\rho_1=\rho_2$	$a_1^2-4a_0a_2=0$	$f(x)=c_1e^{\rho_1x}+c_2xe^{\rho_1x}$
虚数解 $\rho_1=p+iq$ $\rho_2=p-iq$	$a_1^2-4a_0a_2<0$	$f(x)=e^{px}(c_1\cos qx+c_2\sin qx)$

従って，例えば，微分方程式

$$f''(x)-f'(x)-f(x)=0$$

は次のように解かれるのであった。

（解）　特性方程式は

$$\rho^2-\rho-1=0$$

よって，特性方程式は相異なる2つの実数解

$$\rho_1=\frac{1}{2}(1+\sqrt{5}),\ \rho_2=\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$$

をもつ。ゆえに，この微分方程式の一般解は

$$f(x)=c_1e^{\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})x}+c_2e^{\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})x} \qquad (c_1,\ c_2 \text{ は任意定数})$$

である。

定数係数の2階同次線形差分方程式

$$a_2f(x+2)+a_1f(x+1)+a_0f(x)=0$$

も，上の微分方程式と同様に，次の表のように解かれることは周知の通りである。

差分方程式 $a_2f(x+2)+a_1f(x+1)+a_0f(x)=0\quad(a_2a_0\neq 0)$ 特性方程式 $a_2\rho^2+a_1\rho+a_0=0$		
特性方程式の解の分類	特性方程式の係数条件	差分方程式の一般解
相異なる実解 $\rho_1\neq\rho_2$	$a_1{}^2-4a_0a_2>0$	$f(x)=c_1\rho_1{}^x+c_2\rho_2{}^x$
重　　解 $\rho_1=\rho_2$	$a_1{}^2-4a_0a_2=0$	$f(x)=c_1\rho_1{}^x+c_2x\rho_1{}^x$
虚　数　解 $\rho_1=p+iq$ $\rho_2=p-iq$	$a_1{}^2-4a_0a_2<0$	$f(x)=r^x(c_1\cos\theta x+c_2\sin\theta x)$ $r=\sqrt{p^2+q^2}$ $\tan\theta=\frac{q}{p}$

従って，いわゆる漸化式は，この差分方程式の解法に則って解くのが，その本道を行く解き方ではないだろうか。

先のヒボナッチの数列

1，1，2，3，5，8，……

の一般項をこの差分方程式の解法に従って求めてみよう。

（解）　第x項を$f(x)$とすれば

$$f(x+2)=f(x+1)+f(x)$$

すなわち

$$f(x+2)-f(x+1)-f(x)=0$$

特性方程式は

$$\rho^2-\rho-1=0$$

よって特性方程式は相異なる2つの実数解

$$\rho_1=\frac{1}{2}(1+\sqrt{5}),\ \rho_2=\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$$

をもつ。ゆえに，一般解は

$$f(x)=c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^x+c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^x$$

初期条件は，$f(1)=1, f(2)=1$ であるから

$$\begin{cases}\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}c_1+\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}c_2=1\\[2mm] \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}c_1+\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}c_2=1\end{cases}$$

これを解いて

$$c_1=\frac{1}{\sqrt{5}},\ c_2=\frac{-1}{\sqrt{5}}$$

ゆえに，求める一般項は

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^x-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^x\right\}$$

である。

このような解法の特徴は，これを次のようにいうことができるであろう。

(1) 技巧的でなく，形式的な解き方である。

(2) 3階あるいは4階へと階数が上がった場合の解法の見通しの明るいものである。

(3) 微分方程式の解法との間に整合性がある。

(4) 従って，発展的統合的である。

ところで，筆者は，高等学校での差分方程式は

［1］ $a_1f(x+1)+a_0f(x)=r(x)$

［2］ $a_2f(x+2)+a_1f(x+1)+a_0f(x)=0$

［3］ $\begin{cases}f(x+1)=af(x)+bg(x)\\ g(x+1)=cf(x)+dg(x)\end{cases}$

および，これに容易に帰着させることができる程度のものを取り上げるのが適当であると考えている。この場合，［3］の連立方程式は容易に［2］の2階同次線形差分方程式に帰着させることができるものであることに注意しておきたい。実際，［3］より一つの関数，例えば $g(x)$を消去すると

$$f(x+2)-(a+d)f(x+1)+(ad-bc)f(x)=0$$

となる。

今，例えば，応用上で重要な連立差分方程式

$$\begin{cases}f(x+1)=(1-p)f(x)+qg(x) & \cdots\cdots\cdots① \\ g(x+1)=pf(x)+(1-q)g(x) & \cdots\cdots\cdots②\end{cases}$$

$$(p+q\fallingdotseq 0,\ q\fallingdotseq 0)$$

を解き，これを$f(0)$, $g(0)$で表してみよう。

①より

$$g(x)=\frac{1}{q}\{f(x+1)-(1-p)f(x)\} \qquad \cdots\cdots\cdots③$$

③を②に代入して整理すれば

$$f(x+2)-(2-p-q)f(x+1)+(1-p-q)f(x)=0$$

特性方程式は

$$\rho^2-(2-p-q)\rho+1-p-q=0$$

これより

$$\rho=1,\ \rho=1-p-q$$

従って

$$f(x)=c_1+c_2(1-p-q)^x$$

これを③に代入して整理すると

$$g(x)=\frac{p}{q}c_1-c_2(1-p-q)^x$$

ここで

$$f(0)=c_1+c_2$$

$$g(0)=\frac{p}{q}c_1-c_2$$

であるから，これより

$$c_1=\frac{q}{p+q}(f(0)+g(0))$$

$$c_2=\frac{1}{p+q}(pf(0)-qg(0))$$

が得られる。

ゆえに

$$f(x)=\frac{1}{p+q}\{[pf(0)-qg(0)](1-p-q)^x+q[f(0)+g(0)]\}$$

$$g(x)=\frac{1}{p+q}\{-[pf(0)-qg(0)](1-p-q)^x+p[f(0)+g(0)]\}$$

となる。

因に，このとき

$$f(0)+g(0)=1,\ 0<p,\ q<1$$

とすれば

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\frac{q}{p+q}$$

$$\lim_{x\to\infty}g(x)=\frac{p}{p+q}$$

となる。

尚，かつては教科書の中で，リッカチ型の漸化式，すなわち我々の差分方程式で書けば

$$f(x+1)f(x)+af(x+1)+bf(x)=r \qquad (a,\ b,\ r\text{は定数})$$

の形のものが意外に多く取り上げられていたのであった。このリッカチ型の差分方程式もまた，［2］の2階同次線形差分方程式に容易に帰着させることができるものである。

実際，今

$$f(x)=\frac{u(x+1)}{u(x)}-a$$

とおいて，これを上の式に代入して整理すれば

$$u(x+2)+(b-a)u(x+1)-(ab+r)u(x)=0$$

となり，この2階同次線形差分方程式を解くことによって $f(x)$ を求めることができる。

しかしながら，筆者は，このようなリッカチの差分方程式はともかくとしても，一般的に非線形な差分方程式を高等学校での教材とすることには賛成できない。

さて，これまでの高等学校での，いわゆる漸化式のあの伝統的な扱い方は，前節で考察した数列の伝統的な扱い方と同様に，袋小路に陥っていて発展性のないものである。それは理論的でも実際的でもなく，また教育的でもない取り扱い方であると考える。

今日の高等学校の漸化式は，これを差分方程式とし，そして微分方程式の解法と整合性のある扱い方をしていくべきである。教育的にも社会的にも，この教材が帰納的定義とか漸化式とかいう名の下で細々と取り扱われていてよい時代ではないと思うのである。

§5　本章の終わりに

本稿の冒頭でも述べたように，筆者は十数年も前から，高等学校に差分法を導入し，数列と漸化式を発展的統合的に取り扱うべきであると主張してきた。残念ながら今日までの状況は筆者の主張するところとはなっていないが，しかし状況は変わりつつあるように思われる。

高等学校における数列教育が，小さな殻に立て籠もり，そこでの小手先の技巧に憂き身をやつし，教育的社会的要請に耳を傾けず，大道を見失っていてはならない。20世紀はまさに終わろうとしている。来るべき21世紀の高等学校における数列教育は，差分法を導入し，それを駆使して，発展的統合的なものとなるであろうことを筆者は信じて疑わない。

参 考 文 献

(1)　ICMI, 日本数学教育学会編訳：『1990年代の数学教育』，聖文社，1988

(2)　石川廣美：「差分法の導入による数列教材の扱いについて」，愛媛大学教育学部紀要，第一部教育科学，第24巻，1978，pp. 175～186

石川廣美：「関数教材としての差分方程式の位置付けと指導上の観点」，中国四国数学教育学会研究紀要，第6号，1980，pp. 1～5

石川廣美：『差分方程式入門』，コロナ社，1976

(3)　小倉金之助『数学教育史』，岩波書店，1973，p. 280