

高等学校における微積分教育の研究 [VII]

—第六章 微積分領域における数学的用語と記号について—

石川 廣 美

(数学教育研究室)

(平成5年4月9日受理)

高等学校における数学教育が大いに反省しなければならないこととして、用語や記号についての指導の姿勢の問題があるように思われる。その第一は、今日我々が用いている数学の用語や記号は遠く深い歴史に根差すものであり、それは先覚の努力の結晶でもあるが、そのことを意識していない点である。第二は、用語や記号を抽象的形式的に与え、それと人間とのつながりを大切にしようとはしていない点である。第三は、用語や記号の多くが外来のものであり、それゆえに、我々日本人にとって不自然であったり、難解なものであったりするにも拘わらず、その点に対する配慮が欠如している点である。

本章では、このような反省の上に立って、高等学校の微積分領域における数学的用語と記号についての歴史的教育的考察を行う。

§ 1. 微分、積分等の用語と記号の由来

林鶴一はかつて次のように述べている。

我邦ノ中等数学教育ヲ受クルモノハ男子タルト女子タルトヲ論ゼズ皆ナ幾何ト代数トノ二語ヲ知ル。然カルニ教ヲ受クル学生ハ勿論、コレヲ授クル教師モ多クハ此ノ二語ノ由来ヲ知ラズ。唯々習慣ニ依ツテコレヲ使用スルノ有様ナリ。高等学校、専門学校、大学等ニ於テモ同様ナリ。幾何学専攻ノ学者ニシテモコレヲ説明シ得ルモノ極メテ少ナシトイフガ如キハ誠ニ奇ナル現象ナリトイハザルベカラズ。(1)

もしも当時において、微積分が中等教育での教科目であったならば、《微分積分》という語についても、林鶴一は同様の指摘をしたことであろう。そして、この指摘は半世紀以上を経た今日においてもなお当てはまるように思われるのである。そこで本章ではまず最初に、微分積分という用語とその記号について、由来を調べておくことにする。尚、本研究の第五章で論じたように、筆者は差分と和分を高等学校に導入すべきであると考えているので、これらの用語と記号の由来についても考察しておくことにする。

さて、数学史によれば、漢字の「微分積分」なる用語が誕生したのは1859年のことであった。すなわち、1859年、中国において、清末を代表する数学者であった李善蘭(1810~1882)は、イギリス人宣教師アレキサンダー・ワイリ(中国名 偉烈亜力 1815~1887)と協力して、アメリカのルーミス(E. Loomis)の書である

Elements of Analytical Geometry and Differential and Integral Calculus

を漢訳し、これを

代微積拾級

として刊行したのであった。この書により人は初めて漢字の数学用語としての「微積」あるいは「微分積分」なる言葉に接するといわれる。^{(2) (3) (4) (5) (6)} 中国の数学史家は「李善蘭は微分と積分の二つの数学名詞をつくりだした」と述べ、そして「これは古代の成語“微を積みて著を成す（積微成著）”の意味からとったようである」⁽⁷⁾ といっている。

また、1874年には、同じく中国において華蘅芳（1833～1901）はイギリス人宣教師ジョン・フライヤー（中国名 傅蘭雅）との協力によって

微積溯源

なる訳本を刊行している。片野善一郎は「これはイギリスの有名な数学者ワリス（J. Wallis）の書を訳したもので、多分ブルタニカ（Britanica）から訳したものであろう」⁽⁶⁾ と述べている。

これより少し遅れて、我国でも欧米の微積分の書物が訳されている。長沢亀之助訳の『微分学』、『積分学』（明治14年、1881）、岡本則録が訳し文部省が刊行した『查氏微分積分学』（明治16年、1883）等がその最初のものであるといわれている。そしてここに用いられた「微分」「積分」なる訳語は、じつは上記の中国の訳本である『代微積拾級』、『微積溯源』に倣ったものであった。⁽⁵⁾ このように、中国の訳語を倣うことによって、ここに我国における「微分」「積分」という用語が誕生したのであった。

ところで、「微分」「積分」という用語の原語である英語の「differential calculus」「integral calculus」のさらなる源は、微分積分学の創案者の一人であるライプニッツ（1646～1716）が用いたラテン語の「calculus differentialis 差の計算」、および、ライプニッツとヨハン・ベルヌーイ（1667～1748）が用いたラテン語の「calculus integralis 全体の計算」にあるといわれる。⁽⁸⁾

尚、英語の calculus は、1672年にラテン語の「calculus」（計算に用いる“小石”の意味）が英語になったものであって、周知のように、医学用語では「結石」である。数学用語としての calculus は「計算（法）」とも訳されるが、それはもともと計算には“小石”を用いたからであろうといわれている。微積分は英語では

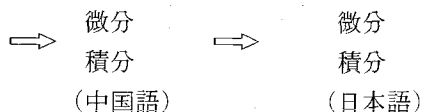
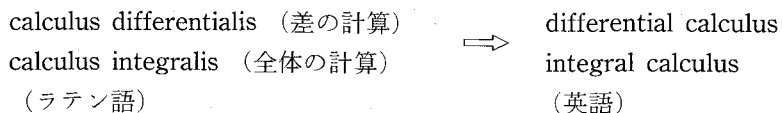
differential and integral calculus

あるいは単に

calculus

であるが、このことは微積分というものと計算との深い関係を示すものともみることができよう。

いずれにしても、「微分」「積分」という用語の由来をおおざっぱに示せば次のようになるであろう。



続いて微分記号および積分記号についてみてみよう。今日我々が用いている微分記号 d と積分記号 \int を初めて使ったのは、かのライプニッツであった。中村幸四郎等によれば、⁽⁷⁾ ⁽⁹⁾ ⁽¹⁰⁾ ライプニッツは微分と積分との数学を形成する前に、和（有限和）と差（有限差）との解析学をつくったのであった。そして差が無限小になるとき「差→微分」という概念構成をしたのであった。そこで用いた記号 dx はラテン語の *differentia x*（ x の差）の略で、それは二つの近接した x の差を表すものであった。また有限和から無限和すなわち積分を考え、これを表す記号として \int を用いたのであった。

この積分記号 \int については、 s を長く引き伸ばしたものであるとは、多くの書物の記するところであるが、筆者は、そのような記述は誤りであると思うのである。因に、藤原松三郎は「 \int は一七八世紀の頃に用いられた s の形で、和を意味する *summa* の首文字である」⁽¹¹⁾ といひ、また、中村幸四郎は次のように述べている。

記号 \int は s を長くのばして記号としたものであるとは、よく数学史の本に書いてありますが、これは17世紀のフランス語やラテン語を知らぬことに基づく誤りであります。

和は当時は *summa* と書いたのです。長いエスを使う書き方は、ゴチック文字でドイツ語を書いた、つい二三十年前までドイツ語の中には残っていたことです。17世紀の印刷をみれば、この \int は文中いたるところに見られます。⁽⁹⁾

結局のところ、微分の記号 d にしても、積分の記号 \int にしても、それらは“差”、“和”を表す言葉の頭文字をとったものに過ぎないのである。筆者は、微積分は記号を見事に駆使した壮大な数学であるが、これらの記号がそのようなものであることに素朴さ、人間味を感じ、安堵感さえ覚えるのである。

尚、周知のように、導関数を表す記号については次のような多様なものが用いられている。

$$\begin{array}{ll} (i) \frac{dy}{dx} & (ii) Df(x), \frac{df(x)}{dx}, \frac{d}{dx}f(x) \\ (iii) f'(x) & (iv) \dot{y} \quad (v) y' \end{array}$$

(i)はライプニッツによるものであり、(ii)はコーシー、(iii)はラグランジェ、(iv)はニュートンに由来するものであるといわれる。⁽¹²⁾ ⁽²⁹⁾

ところで、先にみた『代微積拾級』等での中国の訳本の記号は西洋風のものではなかったのであった。すなわち、微分の記号は「微」の字の偏をとって「イ」、積分の記号は同じく「積」の字の偏をとって「禾」としたのであった。従って、例えば次のように表したのである。ここに“天”は変数 x のことである。

$$\frac{\text{イ天}^{\equiv}}{\text{イ天}} = \text{三天}^{\equiv} \quad \left(\frac{dx^3}{dx} = 3x^2 \text{ のこと} \right)$$

$$\text{禾三天}^{\equiv} = \text{イ天}^{\equiv} = \text{天}^{\equiv} \quad \left(\int 3x^2 dx = x^3 \text{ のこと} \right)$$

小倉金之助は「これで数式の国際的普遍性を失ったことは、実に遺憾であったと考えられるのです」⁽¹³⁾ と述べている。次節で考察するように、我国の明治初期の数学教育は、用語につ

いては漢字による用語に変換し、記号については欧米流の記号を用いることにしたのであるが、その先覚の判断は誠に賢明だったと思われるのである。

次に差分および和分という用語と記号の由来について考察しておきたい。今日我々が用いている差分法に関する用語は、福田武雄が昭和23年（1948）に著した『差分法』に始まるように思われる。そして「差分」「和分」という用語は福田が微分、積分という用語に倣ってつけたものようである。実際、福田は上の著書の《まえがき》の中で次のように述べている。

本書の“差分法”というのは獨乙語の *Differenzenrechnung* のことであって、一般には“階差法”または“定差法”といわれているものである。また差分法の基本である“差分”も従来は“階差”または英語の *finite difference* を直訳した“定差”といわれていたものである。差分法は、本書で説明するように、その理論や数学上の取り扱い方などにおいて微分法に密接に類似し、差分法の逆算法によって得られる“和”と差分との関係が、積分と微分との関係に一致し、この差分法の逆算法で得られる“和”を単なる“和”といっているとはその意味があらわされず、それかといって“階和”または“定和”というのも変であるので、新しい用語ではあるが、微分と積分とにならって“差分”と“和分”としたものである。⁽¹⁴⁾

この『差分法』が出版されたのは、上にも記したように、昭和23年のことであるが、それから6年後の昭和29年に発行された『文部省 学術用語集 数学編』⁽¹⁵⁾には

差分 和分 差分法 差分方程式

という用語が掲載されている。そして古くからあった階差や階差法、また有限差、積差法、有限差方程式という用語、⁽¹⁶⁾ さらには、あれほど使用されていた定差、定差法、定差方程式という用語は、⁽¹⁷⁾ この『学術用語集』には掲載されていないのである。

差分、和分、差分法、差分方程式という用語は、数学者ではなく、数学を応用する立場の学者によって提唱され、すでにあって、概ね定着していた用語を押し退けて、俄かに市民権を獲得した、数少ない数学用語の一つではなからうか。

ところで、通常、差分法では差分記号には Δ 、和分記号には \S が用いられている。差分法としてのこれらの記号、特に和分記号は、1924年のネールンドの著書

Vorlesungen über Differenzenrechnung

に由来するようである。 Δ はニュートン・ライブニッツ由来の記号からの転用であろう。（実は、このネールンドの書物では Δ ではなく、正三角形のような形をした \triangle となっている。）そして和分記号 \S は

$$\Delta F(x) = \varphi(x)$$

となる関数 $F(x)$ の解析的な解を求めるにあたって、“主要解 *Hauptlösungen*”なるものを定義する中で「このような記号を用いたい」⁽¹⁸⁾ と述べ、そこからこの和分記号を使用し始めている。

尚、 Δ は *Difference* の頭文字 *D* にあたるギリシャ語のアルファベットの第四字であり、 \S は、積分記号に用いられた \int と同じく、*s* にあたるラテン語や古いドイツ語での文字である。要するに、積分記号の \int も、和分記号の \S も、*s* を伸ばしたり曲げたりして、特別に作ったものではなく、*summa*（和）の頭文字を用いたものなのである。

§ 2. 用語と記号の統一への努力

明治政府は発足と同時に教育問題に取り組み、明治5年(1872)には早くも学制を頒布し、我国の数学教育を、それまでの和算から洋算に大転換することにしたのであった。これはまさに英断であった。この英断があったからこそ、我国に今日の世界有数の数学教育があると言っても決して過言ではないであろう。

しかも看過してはならない重要なことは、この和算から洋算への転換にあたっては、記号については欧米流のそれを採用したが、用語については欧米の数学用語をそのまま用いて数学教育を行おうとしたのではないということである。我々の先覚は日本語による教育、我国の文化伝統と乖離しない教育を志向し、そのために欧米の数学用語を漢字による用語に変換することに努力したのであった。今日の我国の、小学校から高等学校までにおける数学用語はほぼ完全に統一され、グラフ、ベクトル、スカラー等の若干の用語を除いて、そのすべてが漢字であらわされている。これは一朝一夕に出来上がったものではなく、長年にわたっての先覚の努力の賜物であることを、我々数学教育に携わる者は忘れてはならないであろう。

さて、明治初期の数学用語は不統一かつ錯雑を極めること甚だしいものであった。例えば、今日の直角三角形の意味で正三角形、勾股形、直角三角、直三角形、直三角等が用いられていたのである。それは当時の数学用語が次の三つから成っていたからであるといわれている。⁽¹⁹⁾

- (1) 和算家の用語
- (2) 支那の洋算訳語
- (3) 洋算家の新訳語

このような状況下にあった明治10年(1877)、当時の多数の洋算学者や和算学者等によって、今日の日本数学会の前身である東京数学会社が創立された。そして機関紙『東京数学会社雑誌』を発行した。その雑誌第一号において、社長である神田孝平は、東京数学会社を開立する目的とその事業について述べているが、その中に

諸名義訳例等ヲ一定ス可キナリ⁽²⁰⁾

とあるのが注目されるのである。このことは、上にみたような状況に鑑み、数学用語を統一することが、この会社(学会)の一つの大きな事業であり、しかも刻下の急務であると認識されていたことを示すものであるといえよう。

この東京数学会社は明治13年に訳語会を設立し、ほぼ毎月1回、会議を開き、長年にわたって、用語の統一に努めたのであった。例えば明治15年1月の訳語会では、mathematicsの訳は、数理学、算学を排して「数学」とすることにし、翌2月の訳語会では arithmeticの訳は、算数学、算数術を否決して「算術」とすることに決している。⁽²¹⁾ここで決定された算術という用語は、昭和16年に「算数」となるまで用いられた。また数学という用語はその後定着し、今日に至っても普く使用されていることは周知の通りである。

しかしながら、東京数学会社が定めた訳語によって我国の数学用語が統一されていったかという点、決してそうではなかったのであった。そのことについて大矢真一は次のように述べている。

東京数学会社の訳語制定は、ある程度わが国の数学用語の統一に役立ったが、しかし強制

力はもっていなかった。外部には反対派があり、内部でも決議の際の少数派はこの決定を重んじなかった。したがって、用語の統一に十分な力を発揮できないのは当然であった。その上、東京数学会社は明治17年、組織を改め、民間の数学者を締め出したが、それら民間数学者は数学書の翻訳の方面で活躍していたから、東京数学会社の訳語はますます無視されるに至った。⁽²²⁾

東京数学会社は明治17年に東京数学物理学会と改称されたのであったが、その後も用語の統一への努力は続けられた。しかし物理学については用語集が出版されたのであるが、数学用語については発表されなかったのであった。この事情について、先の大矢は「有力なメンバーである菊池大麓、藤沢利喜太郎のイギリス派と寺尾寿らのフランス派との意見の相違が多く、統一することが困難な事情もあったのではないと思われる」⁽²²⁾と述べている。

一方、数学教育界にとっても、用語が不統一であることは深刻な問題であった。それに加えて、記号も不統一であり、それらが交錯して教育上の大きな障害となっていた。しかしながら、この問題への取り組みは日本中等教育数学会（今日の日本数学教育学会の前身）の設立を待たねばならなかった。

日本中等教育数学会は大正8年（1919）に設立された。そして設立後間もなく、教育上の大きな障害となっている用語と記号を統一することに取り組み、それは昭和十年代に入るまで続けられたのであった。その模様は、逐次、機関紙である『日本中等教育数学会雑誌』に掲載されている。⁽²³⁾ それによれば、実際に取り組んだものは、記号については、例えば相似の記号を \sim ではなく \sphericalangle に統一するとか、角の記号を $\sphericalangle ABC$ や $A\hat{B}C$ 等ではなく、 $\sphericalangle ABC$ にしてはといったような幾何的領域に属するものがほとんどであり、また、用語については、按分比例ではなく比例配分とするとか、級数という用語は数の列を表すだけにしてその和は表さないことにする（これは今日の用法とは異なっている）とかという数十の用語についてであって、要するに、とりあえず必要な用語と記号の統一に取り組むに止まったのである。

実は、『日本中等教育数学会雑誌』の編集主任であった樺正董は、学会が設立された翌年に『数学用語ノ統一ニ就テ』と題する一文を載せ「現今高等学校範囲ニ属スルモノデモ後来ハ中等学校ノ範囲ニ移サルベキモノモアル」として「少ナクトモ微積分マデノモノハ用語ヲ一定シテオクノ必要ガアル」⁽²⁴⁾と述べているのであるが、学会としての実際の取り組みは上に述べたような、当面するものだけに止まってしまったのであった。

いずれにしても、二つの組織、すなわち東京数学会社と日本中等教育数学会による用語と記号の統一への努力は、かなりの成果を取めたものではあったが、不統一の状態が解消されたという訳にはいかなかったのであった。

ところで、用語が不統一でかつ不適切なものがあるという状態が続いていたのは、一人数学や数学教育の世界だけではなくだったのであった。そこで文部省は、政府が昭和21年（1946）に『当用漢字表』と『現代かなづかい』を告示した機会をとらえ、すべての分野について学術用語を統一することを企図し『学術用語集』なるものを刊行したのであった。彌永昌吉を委員長とする数学用語専門部会がまとめた『学術用語集 数学編』（昭和29年発行）もそのうちの一つである。⁽²⁵⁾

この『学術用語集』は決して強制力をもったものではなかった。当時の文部省大学学術局長稲田清助も、その序文の中で「学術用語の制定と称しても、制定した用語を政府において一般にその使用を強制しうるものではない」と明確に述べているのである。

しかしながら、文部省は、これを、以後の数学教育での用語の規範としようと考えていたことは間違いのないであろう。実際、この『学術用語集 数学編』がまだ刊行されておらず、文部省学術奨励審議会学術用語分科審議会で審議中であった時の、昭和26年の『中学校高等学校学習指導要領 数学科編 (試案)』は次のように述べているのである。

高等学校数学科の用語については、文部省学術奨励委員会学術用語分科審議会の決定したものを参考とし、原則としてはこれを用いることにして、教育的見地からその採否を定める予定であったが、現在まで同審議会の正式の決定をみないので、ここでは従来用語をそのまま用いることにしてある。⁽²⁶⁾

そして、この『学術用語集 数学編』が発行された昭和29年から2年後の昭和31年(1956)の『高等学校学習指導要領 数学編』は

用語については、文部省学術奨励審議会学術用語分科審議会が制定した数学用語を用いることを原則とする⁽²⁷⁾

と述べているのである。

この時以来、高等学校における数学用語は『学術用語集 数学編』によることを原則とすることによって、一応の統一がされてきているとみてよいであろう。高等学校の微積分領域における用語についても然りであって、このような経緯の中で統一されてきたのである。例えば、今日の高等学校で用いられている導関数という用語は、かつては derived function の derived を音訳かつ意識した導来関数であったり、また、本研究の第一章でみたように、昭和の初めのころの教育案では誘導関数ともいわれていたものであった。

さて、今日の高等学校での数列および微積分領域において使用されている数学用語の主要なものを列挙すれば以下のようなになるであろう。

数列 等差数列 等比数列 初項 末項 一般項 公比 公差
漸化式 収束 発散 無限等比級数 極限值 連続 微分法
平均変化率 微分係数 微分する 導関数 極大 極小 極値
最大 最小 接線 法線 凹 凸 変曲点 積分 積分法
不定積分 定積分 原始関数 置換積分 部分積分 数値積分
区分求積法 微分方程式

この中で区分求積法という用語は『学術用語集 数学編』にはないものである。この用語は、本研究の第一章でみたように、中等教育に微積分を導入するための試案(阪大数学教育研究会第二試案)で出ていたものであった。そして、中等教育に初めて微積分が導入された昭和17年(1942)の教授要目で取り上げられ、以来今日まで用いられてきている用語である。この区分求積法というような用語は欧米ではあまり用いられてはいないように思われる。これを英訳すれば

mensuration by parts あるいは quadrature by parts

等となるであろうか。しかし、数学教育の中で長い間にわたって用いられてきた用語であり、すっかり定着しているようであって、学術用語集にないということで論う必要はないように思われる。

§ 3. 用語指導の留意点

数学的論理の面からいえば、数学での用語は全く定義の問題であって、定義される概念をどのような言葉で表そうと、それは数学の展開には無関係なことである。ある概念を創造したとき、これを“石”と名付けて定義しようが“川”と名付けて定義しようが、数学の本質には拘わりのないことであろう。従って、むしろそのような数学というものの本質を知らせることが、用語の指導であるという見解もあろう。これは一応もっともな見解のように聞こえる。

しかしながら、それは高等学校での数学教育を越えた見解ではなからうか。かつて高木貞治は、あの旧制高等学校での数学教育についてさえ、次のように述べているのである。

数学者は概念が明確であることに安心して、それを表す用語は単なる符牒、シンボルとして、それに無頓着であります。反社会的というか反常識的というか、へんな述語を使うて平気である。これが数学を不人気ならしめる一つの原因、かなり大きな原因であるかも知れないと思います。⁽²⁸⁾

少なくとも高等学校以下の数学教育では、用語指導は重要な問題であると筆者は考えるのである。数学嫌いになったり数学を敬遠するようになったりする大きな原因の一つが《数学的な用語と記号》にあるということを見逃してはならない。このような考え方の下に、本節では、微積分領域における数学用語の指導について、いくつかの留意点をあげて考察していくことにする。

さて、先にみたように、高等学校での微積分教育は学術用語、すなわち学問としての「微積分学」あるいは「解析学」と同じ用語によって行うこととなったのである。筆者は、このこと自体は教育的にもまた社会的にも極めて有意義なことであると思っている。しかし、ここで高等学校における微積分教育が留意しなければならない点は、このことは高等学校における微積分教育での用語の定義を「微積分学」あるいは「解析学」という「学」でのそれと全く同じにするということではないということである。定義を同じようにすることができないことは、先に本研究の第四章で考察した連続や不定積分や定積分等の定義をみることによって明白であろう。微積分領域の用語の指導については、まず第一にこの点に留意することが大切であろう。

高等学校における数学用語は言葉の上では確かに学問としての数学用語と同じである。しかしその概念まで全く同じというわけにはいかないのである。そのような意味からは、数学用語という表現を避けて、数学的用語とでも呼んだ方が相応しいかも知れない。

第二に留意すべき重要な点は、用語というものは、それが個々ばらばらで他の用語と無関係に存在するものではないということである。用語というものは数学という全体の体系、そして微積分という領域の体系の中で関連し合っているということである。収束という用語は発散という用語と無関係に存在するものではないであろう。積分という用語は関数という用語とは無関係には存在し得ないであろう。

そのようなことがとりわけ顕著に現れているのは、上位概念を表す用語とその下位概念を表す用語のところでであろう。それは、数学での定義は、上位概念をまず定義しそれを用いて下位概念を定義することが多いからに他ならない。実際、数学用語の構成は、まず上位概念を表す用語を置き、下位概念を表す用語は、上位概念を表す用語の前にその意味を限定する用語を付加するという構成になっているのである。すなわち、例えば以下のようにになっているのである。

左が上位概念、右側は下位概念を表す用語である。

数列	等差数列	等比数列	有限数列	無限数列
項	初項	末項	一般項	
極限	数列の極限	関数の極限		
積分	不定積分	定積分	重積分	
積分法	置換積分法	部分積分法	数値積分法	

勿論、すべての用語がこのような規則に基づいて構成されているわけではないが、このような用語構成について指導することも、大切な数学教育活動であると思うのである。

第三に留意すべき点は漢語的表現による用語の難しさと固さに関することである。高等学校の微積分領域における数学用語はそのほとんど全てが漢語的である。漢語的表現による用語の難しさ固さという問題をいかに乗り越えるかという問題が、微積分教育のみならず、数学教育全体の今日的課題であるといえなくもない。

今日の世代の学習者は、かつての時代よりも、漢語の知識に乏しいことは否定できない。漢文が重視されて英数国漢などといわれたのはもはや遠い過去のことである。学習者は漢字の字義は読み取ることができるのかと考えるのは見当違いである。最大、最小等というような用語でも、これを正確に読み取ることができるかどうか疑問である。従って用語の字義にまで立ち入った指導が、今日の微積分教育にとっては必要なことではなからうか。

漢語的表現による用語の難解さということは、丁寧な指導によって乗り越えることができるとしても、固さの問題は深刻である。今日の社会は漢字よりもカタカナの柔らかさを好むようにみえる。一般的な用語だけではなく、企業名や商品名にいたるまで、漢字からカタカナに変わってきている。巷にはカタカナ語が氾濫し幅をきかせている。漢語的表現よりもカタカナ語的表現に親しみ、それに威厳を感じてさえている。このような世相は、高等学校における微積分教育にとっても、決して無関係ではあり得ない。そのことを十分認識しておく必要がある。

第四に留意すべき点は、用語の字義はわかっても、その字義と実際の概念とが異なっていたり、その間にギャップのあるもののことである。そのことを、ここでは重要な用語である微分係数を例にとってみてみよう。

周知のように、微分係数の定義は次のようになっている。

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \text{が有限確定であるとき、これを } f'(a)$$

と書き、 $x=a$ における $f(x)$ の微分係数という。

この微分係数という用語はそれを約めて、よく、微係数ともいわれるのであるが、微係数という字義は恐らく「微な係数」、すなわち小さな係数と解釈されよう。そうだとすれば、この字義は上の概念とは異なったものである。

一方、微分係数の字義は「微分の係数」と解釈されよう。しかし、上に定義された概念は「微分の係数」という字義にあっているものとは考えられない。微分係数という用語は、元来、微分、すなわち

$$dy=f'(x) dx$$

での用語であろう。このようないわゆる微分は今日までの高等学校では取り上げられていないのである。従って、高等学校における微積分教育では、微分係数という語の字義とその概念の間にはギャップがあるのである。

尚、微分係数は微係数ともいわれるのであったが、これはまた微分商ともいわれている。高木貞治は、微分商はライプニッツの伝統に従ったドイツ系統での用語であり、微分係数は英米系統での用語であるといっている。⁽²⁹⁾ 因に、本研究の第一章でみたドイツの中学校（ギムナジウム）用教科書『新主義数学』では、確かに、微分商となっていた。

いずれにしても、実際概念と字義とが異なっていたり、その間にギャップがある用語については、そのことに留意しての、適切な指導が必要であると思うのである。

第五に留意すべき点は、微積分領域での用語の中には、一体それが何を意味するのかわからないものも多いということである。例えば、収束とか発散とかという用語からは、恐らくその概念のおおよそのことすらも浮かべることができないであろう。極値という用語からは、関数のはての値を連想するかも知れない。微積分領域での用語は、三角形とか台形とかという用語とは異なった水準にあるのである。そもそも微分、積分という用語自体が、幾何などと同じように不可解な用語であることは、すでに § 1 でみた通りである。

このような用語については、定義の段階でのより入念な指導と共に、場合によっては、その用語の成立の歴史的背景にまで立ち入った指導も必要ではなからうか。

§ 4. 記号指導の問題点とその考察

本節では、微積分領域における記号指導にとって、実践上の大きな問題であると思われる二つの問題、すなわち記号のもつ一長一短の問題と記号の読み方の問題について考察する。

微積分の記号に限らず、およそ数学の記号は数学的な何ものかに対しての記号であって、記号はその数学的な何ものかを告げているのである。しかもその数学の記号は数学的な何ものかを簡潔にして明確に表しているといわれている。それは確かに正しいであろう。しかし、そのような数学の記号も所詮は人間の造ったものであり、一長一短はあるのである。

まず導関数を表す記号を取り上げてみてみよう。先に § 1 でみたように、導関数を表す記号は、その由来に基づいて、多様である。高木貞治はこの多様な記号について「これらの記号は一長一短である」⁽³⁰⁾ と述べているが、そのことについて具体的にはふれていない。筆者は、そのことは以下のようなことを指すのではないかと考えているのである。

今、我々が最もよく用いている導関数の記号である $f'(x)$ についてみてみよう。この $f'(x)$ は

- (イ) 関数 $f(x)$ を x について微分する（微分した）という意味
- (ロ) 微分された関数 f' の x での値という意味

のどちらなのかは判然としないであろう。勿論、これは $f'(x)$ の () の中が x のように単純な場合には全く問題とならないのであるが、例えば

$$f(x) = e^x$$

として、() の中を ax とすれば、たちまち問題となるのである。すなわち

$$(i) \text{ の意味だとすれば } f'(ax) = ae^{ax}$$

$$(ii) \text{ の意味だとすれば } f'(ax) = e^{ax}$$

となるのである。

従って、 $f'(x)$ は便利な記号ではあるが、意味が必ずしも一つに確定はしないという短所をもつ記号なのである。

もう一つ、いわゆる“ x の増分”といわれている記号 Δx についてもみてみよう。この記号もその便利さゆえによく用いられているものである。しかしこの記号にも短所はあるのである。

微積分の書物には、 $x=a$ における微分係数を、増分の記号 Δx を用いて

$$(i) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

としているものと、 Δx を用いないで

$$(ii) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

としているものの2種類があることは周知のことであろう。そしてこの両者の違いは無批判に看過してはならないであろう。(i)を用いず、専ら(ii)によって記述している書物は、実は教育的な深い考えがあつてのことであろうと筆者はみているのである。実際、例えば一松信の『解析学序説』は(ii)を採っているのであるが、そのことについて、著者一松信は「 h のことを x の増分といつて、よく Δx と書くが、この記法では、 h が x とは独立な変数であることが理解されにくい。この本ではこの記号は使用しない」⁽³¹⁾と述べているのである。一方、稲葉三男も、この増分の記号 Δx を使用することを歴史的教育的観点から批判している。⁽³²⁾

さて、前者の導関数の記号は、(i)の意味で用いるのであれば、例えば

$$\frac{d}{dx} f(x)$$

がよいであろう。また(ii)の意味で用いるのであれば

$$\frac{df}{dx}(x)$$

とすれば明確であるかも知れない。また、後者の増分の記号 Δx については、これが x とは独立な変数であるということが理解されにくいという点や、この Δx という記号が dx と同じように、微積分の学習者にある種の抵抗感をあたえるということには留意していく必要がある。

しかしながら、筆者は、高等学校での微積分教育において、このような一長一短に注目して記号を峻別することは必要のないことであると考えている。このような問題には、指導者の側から殊更に論うのではなくおおらかに用い、実践上で学習者の側から問題として出て来たならば、そのときに指導すればよいことである。その際には、記号というものには一長一短があるのだということを感じさせることが大切ではなからうか。

次に記号の読み方の問題に移ろう。岩波の『数学辞典』をはじめ多くの数学書を繙いてみても、数学の記号の読み方は書いていない。また、学習指導要領にも記号の読み方に関する記述はない。しかし、このことは数学において、あるいは数学教育の中で、数学の記号は読まない

ものということではないであろう。またどう読んでもよいというものでもなからう。

数学の記号といえども、みるだけではなく読むことも必要であるが、数学書も数学教育書も読み方を示すことを意識的に避けてきているように思われる。その理由は次の二つに尽きるのではないかと筆者は考えているのである。

(イ) 読み方の規範的なものがないこと

(ロ) 読み方は日本語にならないこと

先に本章の § 2 でみたように、我々の先覚は、用語についてはそれを統一することに多大の努力を傾注したのであった。しかしながら記号については用語ほどの論議をしなかったのであった。特にその書き方読み方については何故か問題にすらされなかったのであった。従って、数学の記号の書き方読み方については規範的なものは存在しないのである。

(ロ)は当然のことであろう。すなわち、我国が明治初期に採り入れ、それ以来使用してきている数学の記号は欧米流のものであるから、その読み方は欧米人にとっては自然であるが、言語系を全く異にする我々にとっては、その読み方が不自然になり、日本語にならないのは当然の帰結である。

例えば、定積分の記号

$$\int_a^b f(x) dx$$

についてみてみよう。英語ではこれを

integral from a to b of f of x

と読むのであって、これは極めて自然であろう。しかしながら、我々は通常これを

関数 $f(x)$ を a から b まで積分する

というのである。仮に、この文章をそのまま記号化すれば

$$f(x) \int_a^b dx$$

のようになるであろう。それゆえ、上の文章をそのまま先の定積分の記号の読み方とするわけにはいかないのである。そこで我々はよくこれを左から順に棒読みして

インテグラル a から b までの $f x d x$

と読んでいるのであろう。これは日本語になっていないことは明白である。

このような理由によってであろうか、書物には記号の読み方は記述されていないのであるが、現実には記号の読み方は存在しているのである。実際、我々は授業の中では微分や積分の記号を板書しながらそれを読んでいる。その読み方こそがまさしく微分や積分の記号の読み方ではなからうか。それは、いわば慣用的な読み方である。慣用的な読み方であるがゆえに、それは理屈にあったものでもなく統一されたものでもないのである。

この慣用的な読み方の特徴は以下のようにみることができよう。第一の特徴は、国際性を放棄して日本流に読んでいることである。すでに § 1, § 2 で述べたように、明治の先覚は記号そのものについては欧米流のそれを採り入れたのであって、それは国際性を保つ上で賢明な選択だったのであった。しかし、恐らく、記号の読み方にまで国際性を保持しようとは全く考えなかったであろう。これもまた賢明な判断であったと思われるのである。そこで我国の数学教育は、結局のところ、記号は国際流、その読み方は日本流となったのであった。

この日本流の読み方は、しばしば奇妙ではある。例えば、第2次導関数を表す記号

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$$

を取り上げてみよう。これはよく

$$y \text{ ツウ ダッシュ } d \text{ ツウ } y \text{ } d \text{ } x \text{ じじょう (にじょう)}$$

などと読まれている。

第二の特徴は、日本語としての語法を全く無視して、概ね記号の書き順の通りに読んでいることである。先にみた定積分の記号の読み方もそのようなものであった。しかし、このように日本語の語法を無視した読み方は、何も高等学校での微積分の記号の読み方に始まるのではないことを看過してはならない。それは小学校の算数からすでに始まっていたことなのである。

例えば

$$2 + 3 = 5$$

は

2 に 3 を た す と 5 になる

ということであるが、これを

2 た す 3 は 5

と読んできているのである。

第三の特徴は異なる読み方を相当に許容していることである。例えば

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

は

リミット x が a に 近 づ く と き の $f x$

と読む人もあれば

リミット $f x$ x が a に 近 づ く

と読む人もあるようであって、この場合は恐らく書き順の違いによるものではなからうか。

以上のようにみえてくると、慣用的な読み方は“おおらかな読み方”であるということができよう。要するに微積分の記号の慣用的な読み方は、書き順に従って棒読みするのである。そして、これで大方のコンセンサスが得られているように思われるのである。

さて、21世紀における高等学校の微積分教育を展望するとき、微積分の記号の読み方に国際性をもたせて、英語読みにするのも考えられる一つの方向ではある。しかしながら、それは単に微積分教育だけの問題ではなく高等学校の数学教育全体にかかわる問題であり、さらには高等学校教育というものの理念にかかわる問題である。

高等学校における微積分教育での慣用的な記号の読み方には国際性もなければ理屈もない。しかし、今日においても、また、21世紀においても、高等学校における微積分教育での記号の読み方は、このような慣用的読み方でよいと筆者は考えている。

§ 5. 用語と記号の指導についての今後の課題

高等学校における用語と記号の取り扱いについては、学習指導要領は僅かに「内容と密接に関連させて取り扱うこと」⁽³³⁾と述べているだけであって、それ以上のことは一切述べていない。用語や記号をその意味する内容から遊離させて、ただ形式的に与え運用させてはならない

ことは当然のことであって、言わずもがなと思えなくもないが、それ以上のことに言及しない姿勢は評価されよう。

高等学校における数学教育での用語や記号指導の真に狙うところは、数学的な用語や記号を用いることの意義を理解させ、それを用いて数学的な概念を簡潔明確に表現し、それを用いて思考する能力や態度を養うことであろうと思われる。更に言えば、既に出来上がっている用語や記号を学習させるだけではなく、新しく用語や記号を創造する能力や態度を養うことであろう。しかし、このことを目標として掲げることは易しいが、実践することは難しいことのように思われる。とりわけ後者の創造の面は極めて難しいことのように思われてならない。

学習指導要領が、用語と記号の取り扱いについては多くを語らないのは、このようなことも配慮してのことではなかろうか。用語と記号の指導についての問題は、小学校から高等学校にまでまたがって、数学教育の上に申し掛かっている大きな課題のように思われる。

参 考 文 献

- (1) 林鶴一：「幾何ト代数トノ語源ニ就テ」、『林鶴一博士和算研究集録下巻』，東京開成館，1937， P. 339
- (2) 小倉金之助：『数学史研究第一輯』，岩波書店，1935， P. 214
- (3) 小倉金之助：『数学教育史』，岩波書店，1973， P. 263
- (4) 藪内清：『中国の数学』，岩波書店，1974， P. 201
- (5) 大矢真一：「微分積分という用語の由来」，数学セミナー，日本評論社，1967， No. 2， P. 13
- (6) 片野善一郎：『数学用語の由来』，明治図書，1988， PP. 145～146
- (7) 錢宝琮編：川原秀城訳；『中国数学史』，みすず書房，1990， P. 335
- (8) D. J. ストルイク；岡邦雄，水津彦雄訳：『数学の歴史』，みすず書房，1969， P. 112
- (9) 中村幸四郎：「数学史—その学び方と生かし方—」，教育科学， No. 144， 明治図書，1972， PP. 12～13
- (10) 大矢真一・片野善一郎：『数字と数学記号の歴史』，裳華房，1978， PP. 158～159
- (11) 藤原松三郎：『数学解析第一編 微分積分学第一巻』，内田老鶴園新社，1974， P. 293
- (12) 南雲道夫・春木博：『解説微分積分学』，共立出版，1951， P. 96
- (13) 小倉金之助：『近代日本の数学』，新樹社，1956， P. 169
- (14) 福田武雄：『差分法』，河出書房，1948
- (15) 文部省：『学術用語集 数学編』，大日本図書，1954
- (16) 鈴木敏一：「有限差方程式」，東京物理学校雑誌，第355号～第358号，1921
- (17) 例えば
泉信一：『岩波講座数学，V 解析学特殊項目，定差法』，岩波書店，1934
- (18) N. E. Nörlund：『Vorlesungen über Differenzenrechnung』，Berlin，Verlag von Julius Springer，1924， PP. 41～42
(東北大学所蔵のものによる)
- (19) 前掲書(2)， P. 306
- (20) 東京数学会社：『東京数学会社雑誌第一号』，1887，(明治10年1月)， P. 2 (筑波大学所蔵のものによる)
- (21) 東京数学会社：『東京数学会社雑誌第四四号付録』，1892 (明治15年2月)， PP. 24～26 (東京大学所蔵のものによる)
- (22) 大矢真一：「明治時代における数学用語の研究」，富士論叢，第11巻，富士短期大学学術研究会，1966， P. 299
- (23) 日本中等教育数学会：『日本中等教育数学会雑誌』，
第四巻 (1922) PP. 150～163
第九巻 (1927) PP. 175～180
第十二巻 (1930) PP. 215～224 etc.
- (24) 樺正董：「数学用語ノ統一ニ就テ」，『日本中等教育数学会雑誌 第二巻』，1920， PP. 108～109
- (25) 前掲書(15)
- (26) 文部省：『中学校高等学校学習指導要領 数学科編 (試案)』，1951， P. 155

- (27) 文部省：『高等学校学習指導要領 数学科編』，1956， P. 21
- (28) 高木貞治：『訓練上数学の価値 付数学的論理学』，岩波書店，1936， P. 48
- (29) 高木貞治：『解析概論 改訂第3版』，岩波書店，1976， PP. 35～36
- (30) 上掲書(29)， P. 35
- (31) 一松信：『解析学序説 上巻』，裳華房，1981， P. 17
- (32) 稲葉三男：『数学をどう理解するか』，共立出版，1983， PP. 147～148
- (33) 文部省：『高等学校学習指導要領』，大蔵省印刷局，1989， P. 61