愛媛大学教育学部紀要　教育科学　第46巻　第2号　85～102　2000

数式処理ソフトを利用した高校数学教材の開発

―― 多角形の重心を例として ――

藤　本　義　明

（数学科教育研究室）

（平成11年10月21日受理）

Developing teaching materials of high school mathematics using Mathematics Software

Yoshiaki FUJIMOTO

Ⅰ．はじめに

学習指導要領の改訂が行なわれ，教科の時間数や指導内容の削減が話題となっている。時間数の削減には効率の良い指導が必要とされるので，教科の指導におけるコンピュータの利用が今までにも増して要請されている。

一口にコンピュータの利用といっても，電卓，関数電卓のように絞られた機能を持ったハードウェアが利用される場合もあるし，アプリケーションソフトで教材が作られる場合はアプリケーションが利用されている。さらに，プログラミングで教材が作られる場合はプログラミング言語が利用されていることになる。つまり，ハードウェア，ソフトウェア，言語といったコンピュータのいろいろな面が利用の対象になっている。これらは「コンピュータ」というようなハードにかたよった名称で一括して呼び得るものではなく，コンピュータで媒介されるさまざまな機能という意味で『コンピュータ・メディア』と呼ぶのがふさわしいように思われる。

本稿では，このようなコンピュータ・メディアのうち，アプリケーションソフトのひとつである数式処理ソフト（本稿では Wolfram Research 社の Mathematica を利用した）に着目し，その数学教育における有用性を検討して，数式処理ソフトを用いた高校数学教材の開発を提案する。

Ⅱ．動的活動を保障するコンピュータ・メディア

1．数学観とコンピュータ・メディア

数学教育における教具の重要性は古くから指摘されてきたところである。コンピュータ・メ

ディアも教具の一種であると考えることもできる。数学教育で用いられる教具には大きく2つのものがある。1つは説明具と呼ばれるもので，数学の知識を理解しやすくするために，その知識を説明するための教具である。例えば，三平方の定理の説明器や錐の体積の説明器のようなものである。この教具が生まれた背景は，数学を定まった知識の集合体と見る静的な数学観である。もうひとつは構造器具などと呼ばれるもので，この教具を操作する過程で数学的に考える力を発揮し，そのような力を育てていくための教具である。この教具が生まれた背景は数学を知識の集合体ではなく，数学する活動こそを数学そのものであると見る動的な数学観である。教具の一種とも考えられるコンピュータ・メディアを使うにあたっては，それを支える数学観も同時に考える必要がある。つまり，教具を見る場合と同様に，静的数学観に基づくコンピュータ・メディアの利用と，動的数学観に基づくコンピュータ・メディアの利用との区別が大切である。

静的数学観に基づくコンピュータ・メディアの利用とは，例えば，計算練習ためのソフトや立方体の切断面を説明のためのソフトのように，あらかじめ用意された知識・技能を習得させるために行なわれるものである。一方，動的数学観に基づくコンピュータ・メディアの利用とは，決められたものの習得ではなく，知識・技能の構成にコンピュータ・メディアが利用されるようなことである。

わが国における数学教育でのコンピュータの利用も30年近い歴史を刻んできた。(1) この間の流れも上述の数学観との関連から振り返ると，時代の流れが見えてくる。このとき，大きく3つの時代に分けられる。

第1期：黎明期

1970年代に入ってコンピュータが学校に入ってくるようになった。当初は CMI とか CAI といった議論がなされたことからもわかるように，数学という固有の教科での利用というよりも，学校教育全体あるいは学校の管理事務との関連で論じられることが多かった。数学教育では，むしろ電卓の利用が図られていた。やがて，徐々に教師自身による数学の授業に利用する教材ソフトの開発が行なわれるようになった。

第2期：静的数学観に基づく時期

1980年代後半，学習指導要領で中学校技術科にコンピュータ教育が導入されたり，高等学校の数学にプログラミングが導入されたりして，コンピュータの利用が公的に図られるようになってきた。それまでの教師自ら教材ソフトを開発することから，出版社などの企業が作成した教材ソフトが充実してきた。ただし，それらは数学の知識を説明するためや，決まった技能をドリルするためのソフトが主流であった。いわば，静的数学観に基づくソフトといえる。

第3期：動的数学観に基づく時期

1990年代後半から，図形処理ソフトやグラフ電卓を利用した教材開発が行なわれるようになってきた。生徒がデータを処理することにより，新しい知識を見出したり，問題の解決を図ることを旨として，そのためにコンピュータ・メディアが利用されている。いわば，動的数学観に基づくソフトが開発されているといえよう。

最近のコンピュータ・メディアの流れがそうであるように，これからは，動的数学観に基づくコンピュータ・メディアのさらなる開発が大切である。本稿は，そのような趣旨に基づいて数式処理ソフトの一層の利用を目的としている。

2．動的活動を保障するコンピュータ・メディアの要件

コンピュータ・メディアが数学学習において動的活動を保障するために，それぞれのどのような特性が利用されるべきか，また，利用の例などを整理してみる。

(1) ハードウェア

ハードウェア自体は，能動的にも受動的にも用いられ得る。したがって，ハードウェアで動的活動を保障することは，授業の組み立て方が能動的なものであるか，受動的なものであるかに依存するので，動的活動を目指した授業の計画を立てることが先決である。

ア．電卓・・・中学校では無理数係数の二次方程式は扱わないことになっているが，現実場面では生徒自らそのような方程式を見出すことも多い。例えば，生徒が見出した無理数係数の2次方程式 $x^2+\sqrt{2}x-2\sqrt{2}=0$ を近似値を用いて，$x^2+1.414x-2.828=0$ として，電卓により解を求めたりすれば，活動の幅が広がる。

イ．関数電卓・・・動的な扱いをするためには，グラフ電卓とセットで考えるほうが良い。

ウ．グラフ電卓・・・いろいろな関数をグラフ化して表示できるので，グラフをもとに関数の性質を推測し，それ利用してさまざまな問題解決を図るという使い方は，動的扱いとして有効である。

(2) プログラミング言語

電卓からアプリケーションソフトの役まで，万能であるが，教材は教師が作らなければならない。動的活動を支えるコンピュータ・メディアとして，多様で自由な作成が可能であるが，作成する教師の負担がきわめて大きい。

(3) アプリケーションソフト

アプリケーションソフトは表計算ならば表計算という１つの機能だけを有するのではなく，グラフ化の機能なども合わせもつような統合的なものも多い。しかし，ここでは，各単一の機能に着目して分類してみる。

ア．表計算ソフト・・・電卓よりもプログラミング言語に近い処理ができる。プログラミングの場合よりも，活動の各段階の数値を表示することに特徴がある。プログラミングは生徒にとってブラックボックスになりやすいという欠点があるが，表計算は計算の内容が生徒にわかりやすいので教育的である。

イ．図形ソフト・・・もともと，図形の動的な扱いをねらいとして開発されたものである。生徒が自ら図形の性質を見つけ出すことができる。

ウ．統計ソフト・・・統計処理をするためのソフトだが，統計処理自体が他の数学的活動からかけ離れていると筆者は考えるので，余り重視していない。(2)

エ．数式処理ソフト・・・高等数学の研究に利用されているが，高等学校までの数学としては分数式を含めた文字式の計算ができることは有用である。本稿は，この文字式の計算機能を利用しようとするものだが，そのような実践研究は高等学校までの数学としては，いまだあまり行なわれていない。

Ⅲ．数式処理ソフトによる教材開発

1．教材例：多角形の重心の位置とその性質

数式処理ソフトを利用する例として，まず，多角形の重心を扱う教材を構成し，その指導の

流れを示す。数式処理ソフトの利用に際してはいくつかの注意すべき点があるが，それは，この例を示した後，例を参照しながら述べることにする。

⑴　予備知識

教材「多角形の重心の性質」は，高校数学の『図形と方程式』の応用として位置付けられる。したがって，『図形と方程式』の内容は既習であることを前提とするが，とくに，次の①，②は高校数学の内容として，必須の既習事項としている。

①点と直線との距離，

②三角形の重心 A (A1, A2)，B (B1, B2)，C (C1, C2) に対して，△ABC の重心 G の座標は

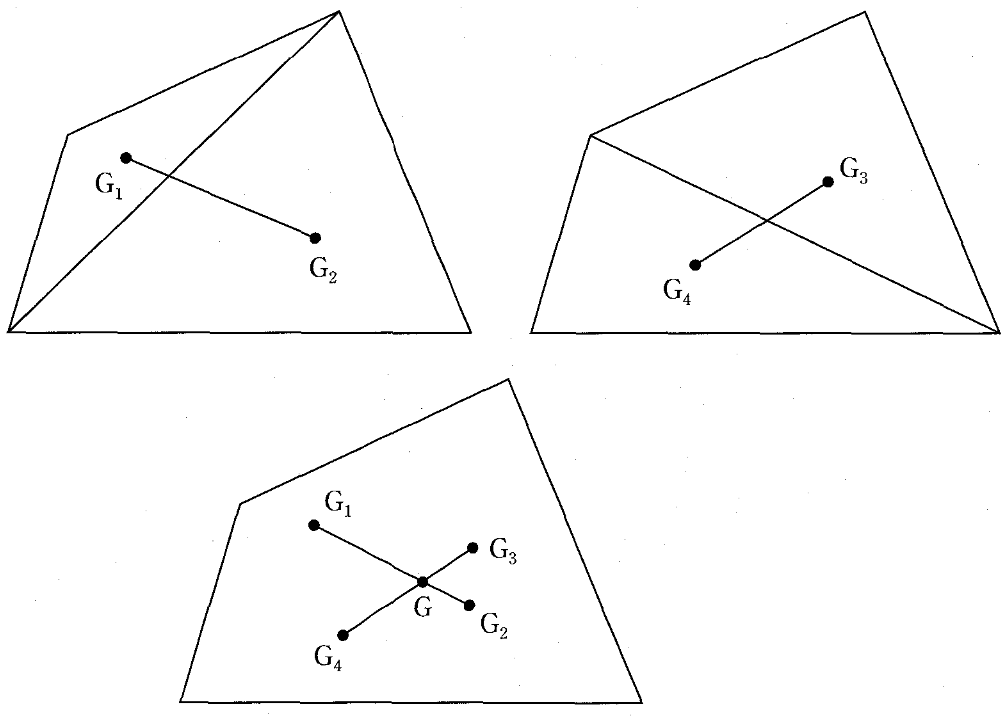
$$G\left(\frac{A1+A2+A3}{3},\ \frac{B1+B2+B3}{3}\right)$$ である。

さらに，重線を次のように定義する。

③重線の定義：平面図形に対し１本の直線をひき，直線に対して図形がつりあうとき，この直線をこの図形の **重線** という。

また，よく知られていることだが，四角形の重心を次のように定める。[3]

④四角形の重心：四角形を対角線により２つの三角形に分ける。これには２通りの方法がある。各方法について，分けられた２つ三角形の重心を結ぶ直線は，各方法にしたがって２本ある。それらを G_1G_2 と G_3G_4 とするとき，G_1G_2 と G_3G_4 との交点 G を四角形の重心という。



四角形が重心 G でつりあうことを，実験により確かめることは可能であり，また有効でもある。

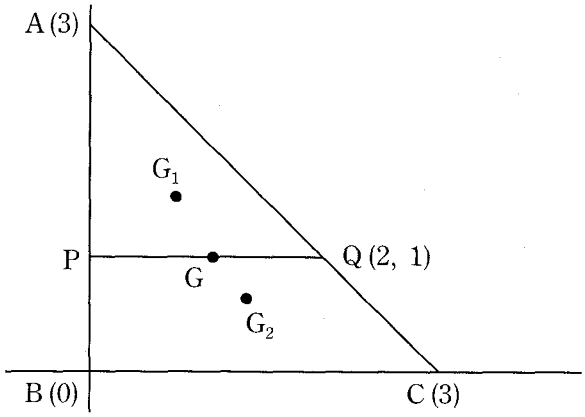
⑵　三角形の重心の性質

①　手計算による活動

はじめは，手計算で計算をさせる。

ア．3点 G_1, G, G_2 が同一直線上にあることを，直角二等辺三角形で確認する

右図の直角二等辺三角形で，重心 G を通り，x 軸に平行な重線 PQ を考える。



$$G(1,\ 1)\quad G_1\left(\frac{2}{3},\ \frac{5}{3}\right)$$

四角形 PBCQ の重心を G_2 とする。

△PBQ の重心は $\left(\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right)$，△QBC の重心は $\left(\frac{5}{3},\ \frac{1}{3}\right)$

よって，両者を結ぶ直線は $y=\dfrac{\frac{1}{3}-\frac{2}{3}}{\frac{5}{3}-\frac{2}{3}}\left(x-\frac{2}{3}\right)+\frac{2}{3}=-\frac{1}{3}x+\frac{8}{9}$ ……………………①

△PCQ の重心は $\left(\frac{5}{3},\ \frac{2}{3}\right)$，△PBC の重心は $\left(1,\ \frac{1}{3}\right)$

よって，両者を結ぶ直線は $y=\dfrac{\frac{2}{3}-\frac{1}{3}}{\frac{5}{3}-1}(x-1)+\frac{1}{3}=\frac{1}{2}x+\frac{1}{6}$ ……………………②

①②の交点を求めて，$G_2\left(\frac{19}{15},\ \frac{7}{15}\right)$ を得る。

また，G_1G の傾きは $\dfrac{1-\frac{5}{3}}{1-\frac{2}{3}}=\dfrac{-\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}}=-2$　　GG_2 の傾きは $\dfrac{\frac{7}{15}-1}{\frac{19}{15}-1}=\dfrac{-\frac{8}{15}}{\frac{4}{15}}=-2$

以上より，G_1, G, G_2 は同一直線上にある。

イ．「面積 S×距離 l」の性質を，直角二等辺三角形で確認する（手計算）

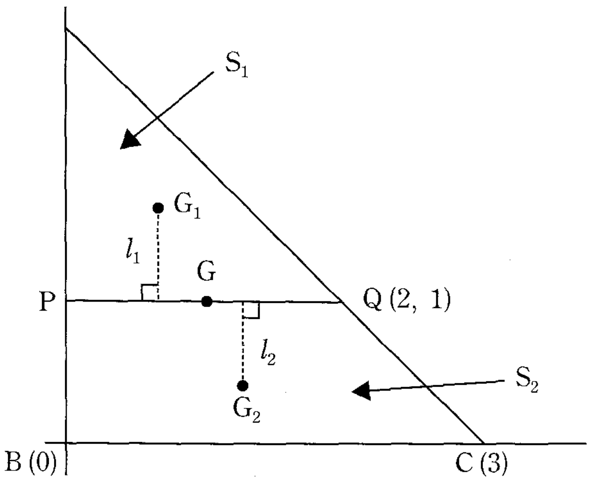
右図のような直角二等辺三角形で，重線が x 軸に平行な場合を考えてみる。

△APG の面積を S_1,

G_1 と重線との距離を l_1 とし，

四角形 PBCQ の面積を S_2,

G_2 と重線との距離を l_2 とする。



$G_1\left(\frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right)$　　$G_2\left(\frac{19}{15}, \frac{7}{15}\right)$

△APQ の面積 S_1 は 2，四角形 PBCQ の面積 S_2 は $\frac{5}{2}$

$l_2=\frac{2}{3}$　　$l_2=\frac{8}{15}$

$S_1\times l_1-S_2\times l_2=2\times\frac{2}{3}-\frac{5}{2}\times\frac{8}{15}=\frac{4}{3}-\frac{4}{3}=0$

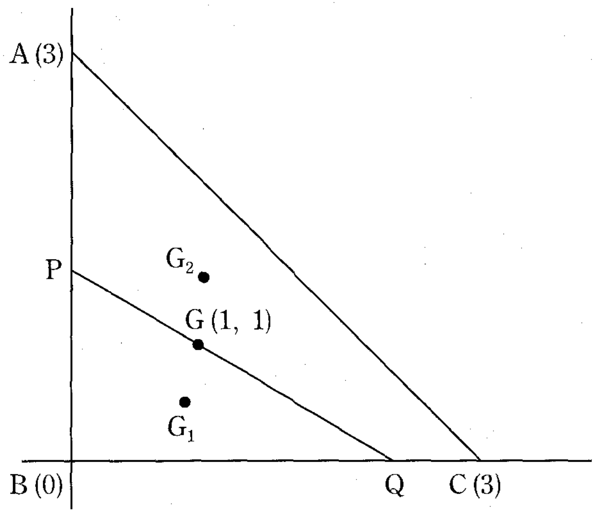
したがって，$S_1\times l_1=S_2\times l_2$　が成り立つ。

② 手計算と数式処理ソフトの混用

ウ．直角二等辺三角形について，傾き a の重線の性質を証明する

重線の傾きを a とすると，重線は重心 G (1, 1) を通るから，

$y=ax+1-a$ とおける。



$P(0,\ 1-a)$　　$Q\left(\frac{a-1}{a},\ 0\right)$

したがって，△BPQ の重心は $G_1\left(\frac{a-1}{3a}, \frac{1-a}{3}\right)$

四角形 APQC の重心を G_2 とする。

△APQ の重心は，$\left(\frac{a-1}{3a}, \frac{4-a}{3}\right)$

△AQC の重心は $\left(\frac{4a-1}{3a},\ 1\right)$

よって，両者を結ぶ直線は $y=\frac{a-1}{3}\left(x-\frac{4a-1}{3a}\right)+1$ ……………………………………①

△APC の重心は $\left(1,\ \frac{4-a}{3}\right)$，△PQC の重心は $\left(\frac{4a-1}{3a}, \frac{1-a}{3}\right)$

よって，両者を結ぶ直線は $y=\dfrac{3a}{1-a}(x-1)+\dfrac{4-a}{3}$ ……………………………………………②

①②の交点は，$G_2\left(\dfrac{a^3-21a^2-42a-19}{3(a+1)(a^2-5a-5)},\ \dfrac{-a^4-a^3-6a^2-14a-7}{3(a+1)(a^2-5a-5)}\right)$

＜適宜，数式処理ソフトを利用＞

G_1G の傾きは $\dfrac{1-\dfrac{-a^2+5a+5}{3(a+1)}}{1-\dfrac{a+2}{3(a+1)}}=\dfrac{a^2-2a-2}{2a+1}$

GG_2 の傾きは $\dfrac{\dfrac{-a^4+a^3-6a^2-14a-7}{3(a+1)(a^2-5a-5)}-1}{\dfrac{a^3-21a^2-42a-19}{3(a+1)(a^2-5a-5)}-1}=\dfrac{a^2-2a-2}{2a+1}$

したがって，G_1，G，G_2 は一直線上にある。

また，△PBQ の面積を S_1，四角形 APQC の面積を S_2，G_1 と G_2 と重線との距離をそれぞれ l_1，l_2 とすると

$S_1=\dfrac{(a+2)^2}{2(a+1)}$ ，$S_2=\dfrac{-a^2+5a+5}{2(a+1)}$ ＜適宜，数式処理ソフトを利用＞

$l_2=\dfrac{-a-2}{3\sqrt{a^2+1}}$ ，$l_2=\dfrac{(a+2)^3}{6(a+1)\sqrt{a^2+1}}$ ＜適宜，数式処理ソフトを利用＞

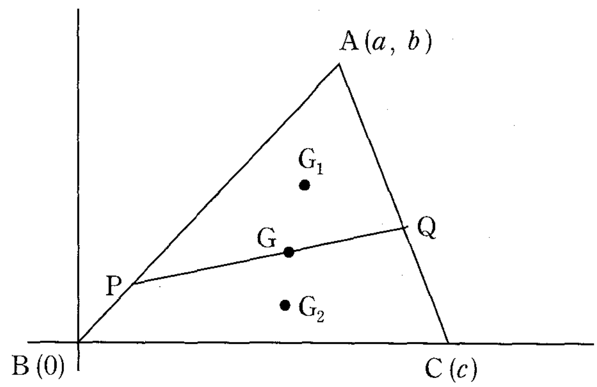
これより，$S_1\times l_1=S_2\times l_2=\dfrac{(a+2)^3}{6(a+1)\sqrt{a^2+1}}$ ＜適宜，数式処理ソフトを利用＞

したがって，$S_1\times l_1=S_2\times l_2$ が成り立つ。

③　数式処理ソフトによる解決

エ．一般の三角形における重線の性質の証明をする

一般の三角形を考えて，下図のように設定する。



$G\left(\dfrac{a+c}{3},\ \dfrac{b}{3}\right)$

$$\mathrm{AB}: y=\frac{b}{a}x \qquad AC: y=\frac{b}{a-c}x-\frac{bc}{a-c}$$

重線 PQ の傾きを k として，

重線 $\mathrm{PQ}: y=k\left(x-\dfrac{a+c}{3}\right)+\dfrac{b}{3}=kx+\dfrac{b-a-c}{3}$

AB と PQ の交点 P は，$\mathrm{P}\left(\dfrac{a(-b+ak+ck)}{3(-b+ak)},\ \dfrac{b(-b+ak+ck)}{3(-b+ak)}\right)$

AC と PQ の交点 Q は，$\mathrm{Q}\left(\dfrac{ab+2bc-a^2k+c^2k}{3(b-ak+ck)},\ \dfrac{b^2-abk+2bck}{3(b-ak+ck)}\right)$

△APQ の重心 $\mathrm{G_1}$ は，

x 座標が

$$\frac{5ab^2+2b^2c-10a^2bk+abck+bc^2k+5a^3k^2-3a^2ck^2-2ac^2k^2}{9(b-ak)(b-ak+ck)}$$

y 座標が

$$\frac{5b^3-10ab^2k+5b^2ck+5a^2bk^2-5abck^2-bc^2k^2}{9(b-ak)(b-ak+ck)}$$

四角形 PBCQ の重心を $\mathrm{G_2}$ とする。

直角三角形のときと同様に，2通りの三角形分割により求まる重心に基づいて

$\mathrm{G_2}$ の x 座標は

$(7ab^4+19b^4c-28a^2b^3k-62ab^3ck+42b^3c^2k^2+72a^2b^2ck^2-120ab^2c^2k^2+21b^2c^3k^2-28a^4bk^3$
$-34a^3bck^3+114a^2bc^2k^3-43abc^3k^3-bc^4k^3+7a^5k^4+5a^4ck^4-36a^3c^2k^4+22a^2c^3k^4+2ac^4k^4)/$
$(9(b-ak)(b-ak+ck)(5k^2-10abk+5bck+5a^2k^2-5ack^2-c^2k^2))$

また，$\mathrm{G_2}$ の y 座標は

$(b(7b^4-28ab^3k+14b^3ck+42ab^2ck^2+6b^2c^2k^2-28a^3bk^3+42a^2bck^3-12abc^2k^3-bc^3k^3+7a^4k^4$
$-14a^3ck^4+6a^2c^2k^4+ac^3k^4+c^4k^4))/(9(b-ak)(b-ak+ck)(5b^2-10abk+5bck+5a^2k^2-5ack^2$
$-c^2k^2))$

このとき，$\mathrm{G_1G}$ の傾きと $\mathrm{GG_2}$ の傾きは，ともに

$(2b^3-4ab^2k+2b^2ck+2a^2bk^2-2abck^2-bc^2k^2)/(2ab^2-b^2c-4a^2bk+4abck-2bc^2k+2a^3k^2$
$-3a^2ck^2+ac^2k^2)$

である。

したがって，$\mathrm{G_1}$，G，$\mathrm{G_2}$ は同一直線上にある。

また，重心 $\mathrm{G_1}$ と重線との距離 l_1 は

$$l_1=\frac{2b-2ak+ck}{9\sqrt{k^2+1}}$$

重心 $\mathrm{G_2}$ と重線との距離 l_2 は

$l_2=(8b^3-24ab^2k+12b^2ck+24a^2bk^2-24abck^2+6bc^2k^2-8a^3k^3+12a^2ck^3-6ac^2k^3+c^3k^3)/$
$(9\sqrt{k^2+1}(5b^2-10abk+5bck+5a^2k^2-5ack^2-c^2k^2))$

さらに，

$$S_1=\frac{4b^3c-8ab^2ck+4b^2c^2k+4a^2bck^2-4abc^2k^2+bc^3k^2}{18(b-ak)(b-ak+ck)}$$

$$S_2=\frac{5b^3c-10ab^2ck+5b^2c^2k+5a^2bck^2-5abc^2k^2+bc^3k^2}{18(b-ak)(b-ak+ck)}$$

これらから，

$$\begin{aligned}S_1\times l_1&=S_2\times l_2\\&=-(bc(-8b^3+24ab^2k-12b^2ck-24a^2bk^2+24abck^2-6bc^2k^2+8a^3k^3-12a^2ck^3+6ac^2k^3\\&\quad -c^3k^3))/(162(ak-b)(ak-ck-b)\sqrt{k^2+1})\end{aligned}$$

したがって，$S_1\times l_1=S_2\times l_2$ が成り立つ。

(3) **四角形の重心とその性質**（数式処理ソフトによる）

ア．四角形の重心の座標

A (A1, A2)，B (B1, B2)，C (C1, C2)，D (D1, D2) とするとき，一般の四角形 ABCD の重心の座標は(2)②で四角形 APQC の重心 G_2 を求めたプログラムを利用して，次のように求められる。（これは(4)で五角形の重心を求めるときにも利用される。）

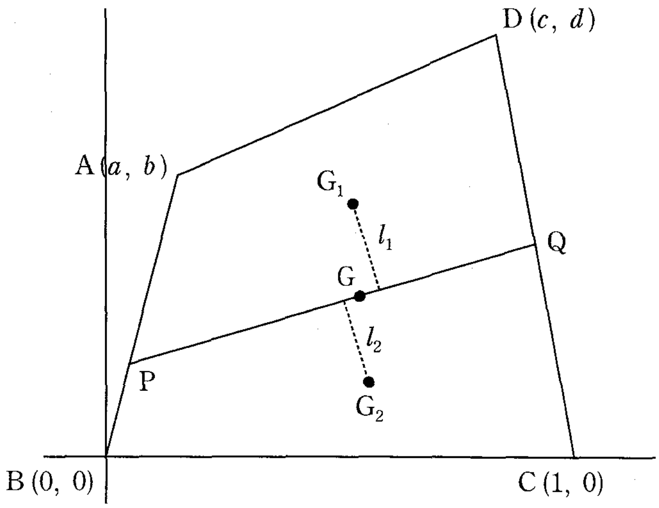
x 座標

(A1 A2 B1+A2 B1^2−A1^2 B2−A1 B1 B2+B1 B2 C1+B2 C1^2−B1^2 C2−B1 C1 C2−
A1 A2 D1+C1 C2 D1−A2 D1^2+C2 D1^2+A1^2 D2−C1^2 D2+A1 D1 D2−C1 D1 D2)/
(3 (A2 B1−A1 B2+B2 C1−B1 C2−A2 D1+C2 D1+A1 D2−C1 D2))

y 座標

(A2^2 B1−A1 A2 B2+A2 B1 B2−A1 B2^2+B2^2 C1−B1 B2 C2+B2 C1 C2−
B1 C2^2−A2^2 D1+C2^2 D1+A1 A2 D2−C1 C2 D2−A2 D1 D2+C2 D1 D2+A1 D2^2−C1 D2^2)/
(3 (A2 B1−A1 B2+B2 C1−B1 C2−A2 D1+C2 D1+A1 D2−C1 D2))

イ．四角形における重線の性質



前図のように，A $(a,\ b)$，B (0, 0)，C (1, 0)，D $(c,\ d)$ とおき，

四角形 ABCD の重心を G，G を通る重線を PQ

四角形 APQD の重心を G_1，面積を S_1，G_1 と PQ との距離を l_1

四角形 PBCQ の重心を G_2，面積を S_2，G_2 と PQ との距離を l_2 とする。

G_1G の傾きは以下の数式のようになる。これは GG_2 の傾きと一致することがやはり数式処理ソフトによって確認できる。したがって，3 点 G_1，G，G_2 は同一直線上にある。

（G_1G の傾き）＝（GG_2 の傾き）＝

$$(b^8c^3d-b^8c^4d-3ab^7c^2d^2-6b^7c^3d^2+4ab^7c^3d^2-3b^7c^4d^2+3a^2b^6cd^3-6b^6c^2d^3+18ab^6c^2d^3-6a^2b^6c^2d^3-$$
$$18b^6c^3d^3+12ab^6c^3d^3-3b^6c^4d^3-a^3b^5d^4+12ab^5cd^4-18a^2b^5cd^4+4a^3b^5cd^4-30b^5c^2d^4+54ab^5c^2d^4-$$
$$18a^2b^5c^2d^4-14b^5c^3d^4+12ab^5c^3d^4-b^5c^4d^4-6a^2b^4d^5+6a^3b^4d^5-a^4b^4d^5-15b^4cd^5+60ab^4cd^5-54a^2b^4cd^5+$$
$$12a^3b^4cd^5-27b^4c^2d^5+42ab^4c^2d^5-18a^2b^4c^2d^5-3b^4c^3d^5+4ab^4c^3d^5+15ab^3d^6-30a^2b^3d^6+18a^3b^3d^6-$$
$$3a^4b^3d^6-24b^3cd^6+54ab^3cd^6-42a^2b^3cd^6+12a^3b^3cd^6-3b^3c^2d^6+9ab^3c^2d^6-6a^2b^3c^2d^6-8b^2d^7+24ab^2d^7-$$
$$27a^2b^2d^7+14a^3b^2d^7-3a^4b^2d^7-b^2cd^7+6ab^2cd^7-9a^2b^2cd^7+4a^3b^2cd^7+abd^8-3a^2bd^8+3a^3bd^8-a^4bd^8+$$
$$2b^8c^3k-4b^8c^4k+2b^8c^5k-6ab^7c^2dk-12b^7c^3dk+12ab^7c^3dk+6b^7c^4dk-6ab^7c^4dk+6b^7c^5dk+$$
$$6a^2b^6cd^2k-12b^6c^2d^2k+36ab^6c^2d^2k-12a^2b^6c^2d^2k-24b^6c^3d^2k+4a^2b^6c^3d^2k+30b^6c^4d^2k-18ab^6c^4d^2k+$$
$$6b^6c^5d^2k-2a^3b^5d^3k+24ab^5cd^3k-36a^2b^5cd^3k+4a^3b^5cd^3k-60b^5c^2d^3k+96ab^5c^2d^3k-36a^2b^5c^2d^3k+$$
$$4a^3b^5c^2d^3k+32b^5c^3d^3k-48ab^5c^3d^3k+12a^2b^5c^3d^3k+26b^5c^4d^3k-18ab^5c^4d^3k+2b^5c^5d^3k-12a^2b^4d^4k+$$
$$12a^3b^4d^4k-30b^4cd^4k+120ab^4cd^4k-120a^2b^4cd^4k+48a^3b^4cd^4k-6a^4b^4cd^4k-24b^4c^2d^4k+24ab^4c^2d^4k-$$
$$36a^2b^4c^2d^4k+12a^3b^4c^2d^4k+48b^4c^3d^4k-48ab^4c^3d^4k+12a^2b^4c^3d^4k+6b^4c^4d^4k-6ab^4c^4d^4k+30ab^3d^5k-$$
$$60a^2b^3d^5k+48a^3b^3d^5k-18a^4b^3d^5k+2a^5b^3d^5k-48b^3cd^5k+108ab^3cd^5k-144a^2b^3cd^5k+96a^3b^3cd^5k-$$
$$18a^4b^3cd^5k+42b^3c^2d^5k-36ab^3c^2d^5k-12a^2b^3c^2d^5k+12a^3b^3c^2d^5k+6b^3c^3d^5k-12ab^3c^3d^5k+$$
$$4a^2b^3c^3d^5k-16b^2d^6k+48ab^2d^6k-84a^2b^2d^6k+88a^3b^2d^6k-42a^4b^2d^6k+6a^5b^2d^6k+14b^2cd^6k+$$
$$12ab^2cd^6k-72a^2b^2cd^6k+64a^3b^2cd^6k-18a^4b^2cd^6k+2b^2c^2d^6k-6ab^2c^2d^6k+4a^3b^2c^2d^6k+18abd^7k-$$
$$54a^2bd^7k+60a^3bd^7k-30a^4bd^7k+6a^5bd^7k-6a^2bcd^7k+12a^3bcd^7k-6a^4bcd^7k-2a^2d^8k+6a^3d^8k-$$
$$6a^4d^8k+2a^5d^8k-6ab^7c^3k^2-3b^7c^4k^2+12ab^7c^4k^2+6b^7c^5k^2-6ab^7c^5k^2-3b^7c^6k^2-3b^6c^2dk^2+$$
$$18a^2b^6c^2dk^2-24b^6c^3dk^2+48ab^6c^3dk^2-42a^2b^6c^3dk^2+42b^6c^4dk^2-48ab^6c^4dk^2+24a^2b^6c^4dk^2-$$
$$12b^6c^5dk^2-3b^6c^6dk^2+6ab^5cd^2k^2-18a^3b^5cd^2k^2-42b^5c^2d^2k^2+108ab^5c^2d^2k^2-126a^2b^5c^2d^2k^2+$$
$$54a^3b^5c^2d^2k^2+66b^5c^3d^2k^2-96ab^5c^3d^2k^2+96a^2b^5c^3d^2k^2-36a^3b^5c^3d^2k^2-3b^5c^4d^2k^2-30ab^5c^4d^2k^2+$$
$$27a^2b^5c^4d^2k^2-12b^5c^5d^2k^2-3a^2b^4d^3k^2+6a^4b^4d^3k^2-18b^4cd^3k^2+84ab^4cd^3k^2-144a^2b^4cd^3k^2+$$
$$120a^3b^4cd^3k^2-30a^4b^4cd^3k^2+18b^4c^2d^3k^2-18ab^4c^2d^3k^2-60a^3b^4c^2d^3k^2+24a^4b^4c^2d^3k^2+36b^4c^3d^3k^2-$$
$$84ab^4c^3d^3k^2+132a^2b^4c^3d^3k^2-48a^3b^4c^3d^3k^2-18b^4c^4d^3k^2-18ab^4c^4d^3k^2+27a^2b^4c^4d^3k^2-6ab^4c^5d^3k^2+$$
$$18ab^3d^4k^2-42a^2b^3d^4k^2+60a^3b^3d^4k^2-39a^4b^3d^4k^2+6a^5b^3d^4k^2-18b^3cd^4k^2+54ab^3cd^4k^2-162a^2b^3cd^4k^2+$$
$$120a^3b^3cd^4k^2-6a^4b^3cd^4k^2-6a^5b^3cd^4k^2+48b^3c^2d^4k^2-36ab^3c^2d^4k^2+90a^2b^3c^2d^4k^2-96a^3b^3c^2d^4k^2+$$
$$27a^4b^3c^2d^4k^2-12b^3c^3d^4k^2-72ab^3c^3d^4k^2+108a^2b^3c^3d^4k^2-48a^3b^3c^3d^4k^2-18ab^3c^4d^4k^2+24a^2b^3c^4d^4k^2-$$
$$6b^2d^5k^2+18ab^2d^5k^2-72a^2b^2d^5k^2+114a^3b^2d^5k^2-66a^4b^2d^5k^2+12a^5b^2d^5k^2+18b^2cd^5k^2+48ab^2cd^5k^2-$$
$$126a^2b^2cd^5k^2+84a^3b^2cd^5k^2-24a^4b^2cd^5k^2-3b^2c^2d^5k^2-90ab^2c^2d^5k^2+162a^2b^2c^2d^5k^2-$$
$$96a^3b^2c^2d^5k^2+27a^4b^2c^2d^5k^2-18ab^2c^3d^5k^2+54a^2b^2c^3d^5k^2-36a^3b^2c^3d^5k^2+30abd^6k^2-$$
$$96a^2bd^6k^2+126a^3bd^6k^2-87a^4bd^6k^2+30a^5bd^6k^2-3a^6bd^6k^2-36abcd^6k^2+72a^2bcd^6k^2-$$
$$36a^3bcd^6k^2-6abc^2d^6k^2+36a^2bc^2d^6k^2-54a^3bc^2d^6k^2+24a^4bc^2d^6k^2-9a^2d^7k^2+30a^3d^7k^2-$$
$$36a^4d^7k^2+18a^5d^7k^2-3a^6d^7k^2+6a^2cd^7k^2-18a^3cd^7k^2+18a^4cd^7k^2-6a^5cd^7k^2+6a^2b^6c^3k^3+$$
$$6ab^6c^4k^3-12a^2b^6c^4k^3-12ab^6c^5k^3+6a^2b^6c^5k^3+6ab^6c^6k^3+6ab^5c^2dk^3-$$

$18a^3b^5c^2dk^3+48ab^5c^3dk^3-60a^2b^5c^3dk^3+44a^3b^5c^3dk^3-84ab^5c^4dk^3+78a^2b^5c^4dk^3-26a^3b^5c^4dk^3+$
$24ab^5c^5dk^3-18a^2b^5c^5dk^3+2b^5c^6dk^3+6ab^5c^6dk^3-2b^5c^7dk^3-12a^2b^4cd^2k^3+18a^4b^4cd^2k^3+$
$84ab^4c^2d^2k^3-180a^2b^4c^2d^2k^3+144a^3b^4c^2d^2k^3-60a^4b^4c^2d^2k^3-132ab^4c^3d^2k^3+264a^2b^4c^3d^2k^3-$
$168a^3b^4c^3d^2k^3+44a^4b^4c^3d^2k^3+6b^4c^4d^2k^3+6ab^4c^4d^2k^3-30a^2b^4c^4d^2k^3+12a^3b^4c^4d^2k^3+12ab^4c^5d^2k^3-$
$18a^2b^4c^5d^2k^3-6b^4c^6d^2k^3+14ab^4c^6d^2k^3+6a^3b^3d^3k^3-6a^5b^3d^3k^3+36ab^3cd^3k^3-168a^2b^3cd^3k^3+$
$216a^3b^3cd^3k^3-132a^4b^3cd^3k^3+36a^5b^3cd^3k^3+6b^3c^2d^3k^3-36ab^3c^2d^3k^3+216a^2b^3c^2d^3k^3-264a^3b^3c^2d^3k^3+$
$156a^4b^3c^2d^3k^3-36a^5b^3c^2d^3k^3+6b^3c^3d^3k^3-96ab^3c^3d^3k^3+72a^2b^3c^3d^3k^3-48a^3b^3c^3d^3k^3+12a^4b^3c^3d^3k^3-$
$6b^3c^4d^3k^3+36ab^3c^4d^3k^3-12a^2b^3c^4d^3k^3+12a^3b^3c^4d^3k^3-6b^3c^5d^3k^3+36ab^3c^5d^3k^3-36a^2b^3c^5d^3k^3+$
$2b^2d^4k^3-36a^2b^2d^4k^3+84a^3b^2d^4k^3-84a^4b^2d^4k^3+42a^5b^2d^4k^3-8a^6b^2d^4k^3+4b^2cd^4k^3+24ab^2cd^4k^3-$
$18a^2b^2cd^4k^3-36a^3b^2cd^4k^3+72a^4b^2cd^4k^3-60a^5b^2cd^4k^3+14a^6b^2cd^4k^3-114ab^2c^2d^4k^3+180a^2b^2c^2d^4k^3-$
$132a^3b^2c^2d^4k^3+84a^4b^2c^2d^4k^3-18a^5b^2c^2d^4k^3-4b^2c^3d^4k^3+48ab^2c^3d^4k^3-56a^3b^2c^3d^4k^3+12a^4b^2c^3d^4k^3-$
$2b^2c^4d^4k^3+30ab^2c^4d^4k^3-72a^2b^2c^4d^4k^3+44a^3b^2c^4d^4k^3+8abd^5k^3-30a^2bd^5k^3+54a^3bd^5k^3-48a^4bd^5k^3+$
$12a^5bd^5k^3+6a^6bd^5k^3-2a^7bd^5k^3-36abcd^5k^3+66a^2bcd^5k^3-36a^3bcd^5k^3+24a^4bcd^5k^3-24a^5bcd^5k^3+$
$6a^6bcd^5k^3+18abc^2d^5k^3+18a^2bc^2d^5k^3-108a^3bc^2d^5k^3+90a^4bc^2d^5k^3-18a^5bc^2d^5k^3+8abc^3d^5k^3-$
$42a^2bc^3d^5k^3+60a^3bc^3d^5k^3-26a^4bc^3d^5k^3-12a^2d^6k^3+42a^3d^6k^3-54a^4d^6k^3+30a^5d^6k^3-6a^6d^6k^3+$
$18a^2cd^6k^3-60a^3cd^6k^3+72a^4cd^6k^3-36a^5cd^6k^3+6a^6cd^6k^3-6a^2c^2d^6k^3+18a^3c^2d^6k^3-18a^4c^2d^6k^3+$
$6a^5c^2d^6k^3-2a^3b^5c^3k^4-3a^2b^5c^4k^4+4a^3b^5c^4k^4+6a^2b^5c^5k^4-2a^3b^5c^5k^4+b^5c^6k^4-3a^2b^5c^6k^4-2b^5c^7k^4+$
$b^5c^8k^4-3a^2b^4c^2dk^4+6a^4b^4c^2dk^4-24a^2b^4c^3dk^4+24a^3b^4c^3dk^4-15a^4b^4c^3dk^4+3b^4c^4dk^4+42a^2b^4c^4dk^4-$
$36a^3b^4c^4dk^4+9a^4b^4c^4dk^4-3b^4c^5dk^4-6ab^4c^5dk^4-12a^2b^4c^5dk^4+12a^3b^4c^5dk^4-3b^4c^6dk^4+$
$12ab^4c^6dk^4-3a^2b^4c^6dk^4+3b^4c^7dk^4-6ab^4c^7dk^4+6a^3b^3cd^2k^4-6a^5b^3cd^2k^4+3b^3c^2d^2k^4-$
$42a^2b^3c^2d^2k^4+84a^3b^3c^2d^2k^4-54a^4b^3c^2d^2k^4+21a^5b^3c^2d^2k^4-12ab^3c^3d^2k^4+66a^2b^3c^3d^2k^4-$
$144a^3b^3c^3d^2k^4+78a^4b^3c^3d^2k^4-16a^5b^3c^3d^2k^4-6b^3c^4d^2k^4+9ab^3c^4d^2k^4+12a^2b^3c^4d^2k^4+30a^3b^3c^4d^2k^4-$
$18a^4b^3c^4d^2k^4+18ab^3c^5d^2k^4-42a^2b^3c^5d^2k^4+12a^3b^3c^5d^2k^4+3b^3c^6d^2k^4-15ab^3c^6d^2k^4+14a^2b^3c^6d^2k^4+$
$b^2d^3k^4-3a^4b^2d^3k^4+2a^6b^2d^3k^4+b^2cd^3k^4-6ab^2cd^3k^4-18a^2b^2cd^3k^4+84a^3b^2cd^3k^4-96a^4b^2cd^3k^4+$
$48a^5b^2cd^3k^4-13a^6b^2cd^3k^4-2b^2c^2d^3k^4-6ab^2c^2d^3k^4+36a^2b^2c^2d^3k^4-138a^3b^2c^2d^3k^4+174a^4b^2c^2d^3k^4-$
$78a^5b^2c^2d^3k^4+14a^6b^2c^2d^3k^4-2b^2c^3d^3k^4+18ab^2c^3d^3k^4+30a^2b^2c^3d^3k^4-40a^3b^2c^3d^3k^4-18a^4b^2c^3d^3k^4+$
$12a^5b^2c^3d^3k^4+b^2c^4d^3k^4+6ab^2c^4d^3k^4-63a^2b^2c^4d^3k^4+74a^3b^2c^4d^3k^4-18a^4b^2c^4d^3k^4+b^2c^5d^3k^4-$
$12ab^2c^5d^3k^4+27a^2b^2c^5d^3k^4-16a^3b^2c^5d^3k^4-3abd^4k^4+3a^2bd^4k^4+18a^3bd^4k^4-42a^4bd^4k^4+36a^5bd^4k^4-$
$15a^6bd^4k^4+3a^7bd^4k^4-6a^2bcd^4k^4-18a^3bcd^4k^4+78a^4bcd^4k^4-84a^5bcd^4k^4+36a^6bcd^4k^4-6a^7bcd^4k^4+$
$6abc^2d^4k^4+30a^2bc^2d^4k^4-90a^3bc^2d^4k^4+63a^4bc^2d^4k^4-6a^5bc^2d^4k^4-3a^6bc^2d^4k^4-36a^2bc^3d^4k^4+$
$84a^3bc^3d^4k^4-60a^4bc^3d^4k^4+12a^5bc^3d^4k^4-3abc^4d^4k^4+15a^2bc^4d^4k^4-21a^3bc^4d^4k^4+9a^4bc^4d^4k^4-$
$4a^2d^5k^4+12a^3d^5k^4-9a^4d^5k^4-6a^5d^5k^4+12a^6d^5k^4-6a^7d^5k^4+a^8d^5k^4+12a^2cd^5k^4-42a^3cd^5k^4+$
$54a^4cd^5k^4-30a^5cd^5k^4+6a^6cd^5k^4-9a^2c^2d^5k^4+30a^3c^2d^5k^4-36a^4c^2d^5k^4+18a^5c^2d^5k^4-$
$3a^6c^2d^5k^4+2a^2c^3d^5k^4-6a^3c^3d^5k^4+6a^4c^3d^5k^4-2a^5c^3d^5k^4)/(b^8c^3-2b^8c^4+b^8c^5-3ab^7c^2d-$
$6b^7c^3d+9ab^7c^3d+6b^7c^4d-6ab^7c^4d+3a^2b^6cd^2-3b^6c^2d^2+18ab^6c^2d^2-15a^2b^6c^2d^2+15b^6c^3d^2-$
$30ab^6c^3d^2+14a^2b^6c^3d^2-3ab^6c^4d^2-3b^6c^5d^2-a^3b^5d^3+6ab^5cd^3-18a^2b^5cd^3+11a^3b^5cd^3+12b^5c^2d^3-$
$51ab^5c^2d^3+54a^2b^5c^2d^3-16a^3b^5c^2d^3+13b^5c^3d^3-18ab^5c^3d^3+12a^2b^5c^3d^3-14b^5c^4d^3+12ab^5c^4d^3-$
$2b^5c^5d^3-3a^2b^4d^4+6a^3b^4d^4-3a^4b^4d^4-24ab^4cd^4+57a^2b^4cd^4-42a^3b^4cd^4+9a^4b^4cd^4+36b^4c^2d^4-$
$69ab^4c^2d^4+54a^2b^4c^2d^4-18a^3b^4c^2d^4-30b^4c^3d^4+42ab^4c^3d^4-18a^2b^4c^3d^4-6b^4c^4d^4+9ab^4c^4d^4+$
$12a^2b^3d^5-21a^3b^3d^5+12a^4b^3d^5-2a^5b^3d^5+27b^3cd^5-87ab^3cd^5+99a^2b^3cd^5-54a^3b^3cd^5+12a^4b^3cd^5-$
$30b^3c^2d^5+63ab^3c^2d^5-42a^2b^3c^2d^5+12a^3b^3c^2d^5-6b^3c^3d^5+21ab^3c^3d^5-16a^2b^3c^3d^5+4b^2d^6-27ab^2d^6+$
$51a^2b^2d^6-43a^3b^2d^6+18a^4b^2d^6-3a^5b^2d^6-11b^2cd^6+36ab^2cd^6-36a^2b^2cd^6+14a^3b^2cd^6-3a^4b^2cd^6-$
$2b^2c^2d^6+15ab^2c^2d^6-27a^2b^2c^2d^6+14a^3b^2c^2d^6+3abd^7-6a^2bd^7+3a^3bd^7+3abcd^7-12a^2bcd^7+$
$15a^3bcd^7-6a^4bcd^7-a^2d^8+3a^3d^8-3a^4d^8+a^5d^8-2ab^7c^3k+4ab^7c^4k-2ab^7c^5k+6a^2b^6c^2dk+$
$12ab^6c^3dk-20a^2b^6c^3dk-18ab^6c^4dk+14a^2b^6c^4dk-6b^6c^5dk+6ab^6c^5dk+6b^6c^6dk-6a^3b^5cd^2k-$

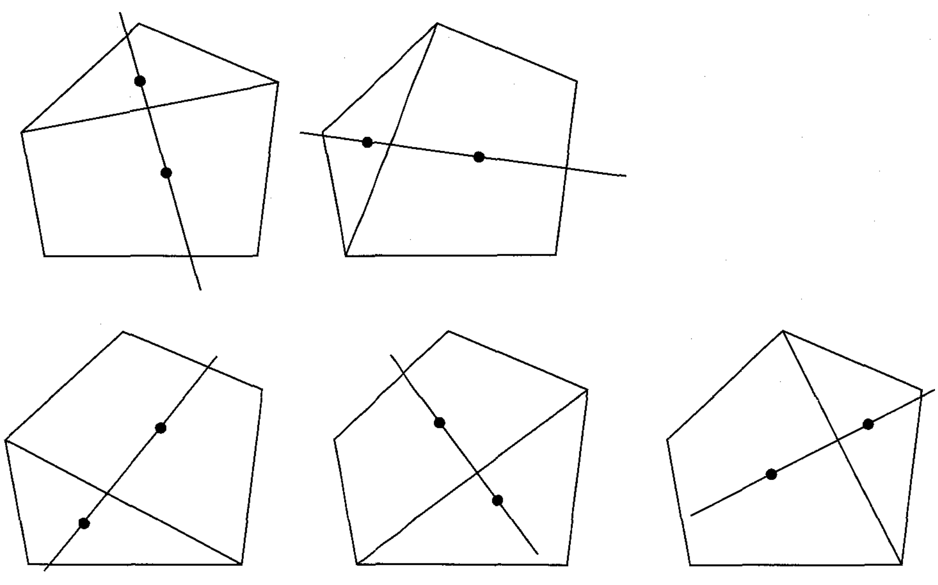
$36a^2b^5c^2d^2k+36a^3b^5c^2d^2k+42b^5c^3d^2k-84ab^5c^3d^2k+96a^2b^5c^3d^2k-36a^3b^5c^3d^2k-54b^5c^4d^2k+$
$60ab^5c^4d^2k-18a^2b^5c^4d^2k+24b^5c^5d^2k-18ab^5c^5d^2k+6b^5c^6d^2k+2a^4b^4d^3k-6b^4cd^3k+36a^3b^4cd^3k-$
$28a^4b^4cd^3k+102b^4c^2d^3k-234ab^4c^2d^3k+276a^2b^4c^2d^3k-180a^3b^4c^2d^3k+44a^4b^4c^2d^3k-132b^4c^3d^3k+$
$196ab^4c^3d^3k-108a^2b^4c^3d^3k+12a^3b^4c^3d^3k+54b^4c^4d^3k-38ab^4c^4d^3k+12a^2b^4c^4d^3k+18b^4c^5d^3k-$
$26ab^4c^5d^3k+6ab^3d^4k-12a^4b^3d^4k+8a^5b^3d^4k+66b^3cd^4k-234ab^3cd^4k+342a^2b^3cd^4k-300a^3b^3cd^4k+$
$144a^4b^3cd^4k-26a^5b^3cd^4k-108b^3c^2d^4k+228ab^3c^2d^4k-144a^2b^3c^2d^4k+24a^3b^3c^2d^4k+12a^4b^3c^2d^4k+$
$60b^3c^3d^4k-48ab^3c^3d^4k-32a^2b^3c^3d^4k+12a^3b^3c^3d^4k+18b^3c^4d^4k-60ab^3c^4d^4k+44a^2b^3c^4d^4k+12b^2d^5k-$
$66ab^2d^5k+132a^2b^2d^5k-150a^3b^2d^5k+108a^4b^2d^5k-42a^5b^2d^5k+6a^6b^2d^5k-24b^2cd^5k+60ab^2cd^5k-$
$84a^3b^2cd^5k+66a^4b^2cd^5k-18a^5b^2cd^5k+24b^2c^2d^5k-18ab^2c^2d^5k-72a^2b^2c^2d^5k+84a^3b^2c^2d^5k-$
$18a^4b^2c^2d^5k+6b^2c^3d^5k-42ab^2c^3d^5k+72a^2b^2c^3d^5k-36a^3b^2c^3d^5k-8abd^6k+48a^2bd^6k-96a^3bd^6k+$
$86a^4bd^6k-36a^5bd^6k+6a^6bd^6k+10abcd^6k-48a^2bcd^6k+72a^3bcd^6k-40a^4bcd^6k+6a^5bcd^6k-$
$8abc^2d^6k+30a^2bc^2d^6k-36a^3bc^2d^6k+14a^4bc^2d^6k-2a^2d^7k+6a^3d^7k-6a^4d^7k+2a^5d^7k+2a^2cd^7k-$
$6a^3cd^7k+6a^4cd^7k-2a^5cd^7k-3ab^6c^4k^2-3b^6c^5k^2+6ab^6c^5k^2+6b^6c^6k^2-3ab^6c^6k^2-3b^6c^7k^2-3ab^5c^2dk^2+$
$21b^5c^3dk^2-24ab^5c^3dk^2+12a^2b^5c^3dk^2+6a^3b^5c^3dk^2-48b^5c^4dk^2+57ab^5c^4dk^2-12a^2b^5c^4dk^2-$
$6a^3b^5c^4dk^2+39b^5c^5dk^2-30ab^5c^5dk^2-6b^5c^6dk^2-6b^5c^7dk^2-3b^4cd^2k^2+6a^2b^4cd^2k^2+54b^4c^2d^2k^2-$
$105ab^4c^2d^2k^2+90a^2b^4c^2d^2k^2-18a^3b^4c^2d^2k^2-18a^4b^4c^2d^2k^2-117b^4c^3d^2k^2+132ab^4c^3d^2k^2-36a^2b^4c^3d^2k^2-$
$48a^3b^4c^3d^2k^2+24a^4b^4c^3d^2k^2+102b^4c^4d^2k^2-36ab^4c^4d^2k^2-30a^2b^4c^4d^2k^2+27a^3b^4c^4d^2k^2-18b^4c^5d^2k^2-$
$48ab^4c^5d^2k^2+27a^2b^4c^5d^2k^2-18b^4c^6d^2k^2+24ab^4c^6d^2k^2+3ab^3d^3k^2-3a^3b^3d^3k^2+33b^3cd^3k^2-$
$108ab^3cd^3k^2+147a^2b^3cd^3k^2-108a^3b^3cd^3k^2+12a^4b^3cd^3k^2+18a^5b^3cd^3k^2-78b^3c^2d^3k^2+63ab^3c^2d^3k^2+$
$144a^2b^3c^2d^3k^2-240a^3b^3c^2d^3k^2+156a^4b^3c^2d^3k^2-36a^5b^3c^2d^3k^2+93b^3c^3d^3k^2+24ab^3c^3d^3k^2-$
$264a^2b^3c^3d^3k^2+192a^3b^3c^3d^3k^2-48a^4b^3c^3d^3k^2-30b^3c^4d^3k^2-90ab^3c^4d^3k^2+168a^2b^3c^4d^3k^2-$
$48a^3b^3c^4d^3k^2-18b^3c^5d^3k^2+54ab^3c^5d^3k^2-36a^2b^3c^5d^3k^2+9b^2d^4k^2-33ab^2d^4k^2+54a^2b^2d^4k^2-63a^3b^2d^4k^2+$
$42a^4b^2d^4k^2-3a^5b^2d^4k^2-6a^6b^2d^4k^2-12b^2cd^4k^2-60ab^2cd^4k^2+315a^2b^2cd^4k^2-492a^3b^2cd^4k^2+$
$375a^4b^2cd^4k^2-150a^5b^2cd^4k^2+24a^6b^2cd^4k^2+24b^2c^2d^4k^2+93ab^2c^2d^4k^2-396a^2b^2c^2d^4k^2+438a^3b^2c^2d^4k^2-$
$186a^4b^2c^2d^4k^2+27a^5b^2c^2d^4k^2-15b^2c^3d^4k^2-72ab^2c^3d^4k^2+216a^2b^2c^3d^4k^2-156a^3b^2c^3d^4k^2+$
$27a^4b^2c^3d^4k^2-6b^2c^4d^4k^2+36ab^2c^4d^4k^2-54a^2b^2c^4d^4k^2+24a^3b^2c^4d^4k^2-30abd^5k^2+138a^2bd^5k^2-$
$261a^3bd^5k^2+264a^4bd^5k^2-153a^5bd^5k^2+48a^6bd^5k^2-6a^7bd^5k^2+42abcd^5k^2-159a^2bcd^5k^2+222a^3bcd^5k^2-$
$135a^4bcd^5k^2+30a^5bcd^5k^2-30abc^2d^5k^2+90a^2bc^2d^5k^2-90a^3bc^2d^5k^2+30a^4bc^2d^5k^2+6abc^3d^5k^2-$
$18a^2bc^3d^5k^2+18a^3bc^3d^5k^2-6a^4bc^3d^5k^2+6a^2d^6k^2-27a^3d^6k^2+48a^4d^6k^2-42a^5d^6k^2+18a^6d^6k^2-3a^7d^6k^2-$
$3a^2cd^6k^2+12a^3cd^6k^2-18a^4cd^6k^2+12a^5cd^6k^2-3a^6cd^6k^2+2a^3b^5c^3k^3+6a^2b^5c^4k^3-4a^3b^5c^4k^3+6ab^5c^5k^3-$
$12a^2b^5c^5k^3+2a^3b^5c^5k^3+2b^5c^6k^3-12ab^5c^6k^3+6a^2b^5c^6k^3-4b^5c^7k^3+6ab^5c^7k^3+2b^5c^8k^3+6a^2b^4c^2dk^3-$
$6a^4b^4c^2dk^3-42ab^4c^3dk^3+48a^2b^4c^3dk^3-36a^3b^4c^3dk^3+12a^4b^4c^3dk^3+6b^4c^4dk^3+96ab^4c^4dk^3-$
$114a^2b^4c^4dk^3+54a^3b^4c^4dk^3-6a^4b^4c^4dk^3-6b^4c^5dk^3-90ab^4c^5dk^3+78a^2b^4c^5dk^3-18a^3b^4c^5dk^3-$
$6b^4c^6dk^3+42ab^4c^6dk^3-18a^2b^4c^6dk^3+6b^4c^7dk^3-6ab^4c^7dk^3+6ab^3cd^2k^3-12a^3b^3cd^2k^3+6a^5b^3cd^2k^3+$
$6b^3c^2d^2k^3-108ab^3c^2d^2k^3+210a^2b^3c^2d^2k^3-168a^3b^3c^2d^2k^3+72a^4b^3c^2d^2k^3-12a^5b^3c^2d^2k^3+210ab^3c^3d^2k^3-$
$390a^2b^3c^3d^2k^3+264a^3b^3c^3d^2k^3-72a^4b^3c^3d^2k^3+4a^5b^3c^3d^2k^3-12b^3c^4d^2k^3-168ab^3c^4d^2k^3+$
$264a^2b^3c^4d^2k^3-120a^3b^3c^4d^2k^3+12a^4b^3c^4d^2k^3+72ab^3c^5d^2k^3-72a^2b^3c^5d^2k^3+12a^3b^3c^5d^2k^3+6b^3c^6d^2k^3-$
$12ab^3c^6d^2k^3+4a^2b^3c^6d^2k^3+2b^2d^3k^3-6a^2b^2d^3k^3+6a^4b^2d^3k^3-2a^6b^2d^3k^3+2b^2cd^3k^3-78ab^2cd^3k^3+$
$234a^2b^2cd^3k^3-294a^3b^2cd^3k^3+192a^4b^2cd^3k^3-60a^5b^2cd^3k^3+4a^6b^2cd^3k^3-4b^2c^2d^3k^3+162ab^2c^2d^3k^3-$
$396a^2b^2c^2d^3k^3+366a^3b^2c^2d^3k^3-144a^4b^2c^2d^3k^3+12a^5b^2c^2d^3k^3+4a^6b^2c^2d^3k^3-4b^2c^3d^3k^3-132ab^2c^3d^3k^3+$
$264a^2b^2c^3d^3k^3-152a^3b^2c^3d^3k^3+12a^4b^2c^3d^3k^3+12a^5b^2c^3d^3k^3+2b^2c^4d^3k^3+54ab^2c^4d^3k^3-72a^2b^2c^4d^3k^3+$
$4a^3b^2c^4d^3k^3+12a^4b^2c^4d^3k^3+2b^2c^5d^3k^3-6ab^2c^5d^3k^3+4a^3b^2c^5d^3k^3-18abd^4k^3+72a^2bd^4k^3-126a^3bd^4k^3+$
$126a^4bd^4k^3-72a^5bd^4k^3+18a^6bd^4k^3+36abcd^4k^3-90a^2bcd^4k^3+48a^3bcd^4k^3+54a^4bcd^4k^3-$
$78a^5bcd^4k^3+36a^6bcd^4k^3-6a^7bcd^4k^3-36abc^2d^4k^3+48a^2bc^2d^4k^3+60a^3bc^2d^4k^3-138a^4bc^2d^4k^3+$

$$84a^5bc^2d^4k^3-18a^6bc^2d^4k^3+18abc^3d^4k^3-12a^2bc^3d^4k^3-48a^3bc^3d^4k^3+60a^4bc^3d^4k^3-18a^5bc^3d^4k^3-$$
$$6a^2bc^4d^4k^3+12a^3bc^4d^4k^3-6a^4bc^4d^4k^3+16a^2d^5k^3-72a^3d^5k^3+132a^4d^5k^3-126a^5d^5k^3+66a^6d^5k^3-$$
$$18a^7d^5k^3+2a^8d^5k^3-24a^2cd^5k^3+96a^3cd^5k^3-150a^4cd^5k^3+114a^5cd^5k^3-42a^6cd^5k^3+6a^7cd^5k^3+$$
$$12a^2c^2d^5k^3-42a^3c^2d^5k^3+54a^4c^2d^5k^3-30a^5c^2d^5k^3+6a^6c^2d^5k^3-2a^2c^3d^5k^3+6a^3c^3d^5k^3-6a^4c^3d^5k^3+$$
$$2a^5c^3d^5k^3-a^4b^4c^3k^4-3a^3b^4c^4k^4+2a^4b^4c^4k^4-3a^2b^4c^5k^4+6a^3b^4c^5k^4-a^4b^4c^5k^4-ab^4c^6k^4+6a^2b^4c^6k^4-$$
$$3a^3b^4c^6k^4+2ab^4c^7k^4-3a^2b^4c^7k^4-ab^4c^8k^4-3a^3b^3c^2dk^4+3a^5b^3c^2dk^4+21a^2b^3c^3dk^4-24a^3b^3c^3dk^4+$$
$$18a^4b^3c^3dk^4-7a^5b^3c^3dk^4-3ab^3c^4dk^4-48a^2b^3c^4dk^4+57a^3b^3c^4dk^4-30a^4b^3c^4dk^4+4a^5b^3c^4dk^4+$$
$$3ab^3c^5dk^4+45a^2b^3c^5dk^4-42a^3b^3c^5dk^4+12a^4b^3c^5dk^4+3ab^3c^6dk^4-22a^2b^3c^6dk^4+12a^3b^3c^6dk^4-$$
$$3ab^3c^7dk^4+4a^2b^3c^7dk^4-3a^2b^2cd^2k^4+6a^4b^2cd^2k^4-3a^6b^2cd^2k^4-3ab^2c^2d^2k^4+54a^2b^2c^2d^2k^4-$$
$$105a^3b^2c^2d^2k^4+81a^4b^2c^2d^2k^4-36a^5b^2c^2d^2k^4+9a^6b^2c^2d^2k^4-105a^2b^2c^3d^2k^4+216a^3b^2c^3d^2k^4-$$
$$159a^4b^2c^3d^2k^4+54a^5b^2c^3d^2k^4-6a^6b^2c^3d^2k^4+6ab^2c^4d^2k^4+81a^2b^2c^4d^2k^4-159a^3b^2c^4d^2k^4+$$
$$90a^4b^2c^4d^2k^4-18a^5b^2c^4d^2k^4-36a^2b^2c^5d^2k^4+54a^3b^2c^5d^2k^4-18a^4b^2c^5d^2k^4-3ab^2c^6d^2k^4+9a^2b^2c^6d^2k^4-$$
$$6a^3b^2c^6d^2k^4-abd^3k^4+3a^3bd^3k^4-3a^5bd^3k^4+a^7bd^3k^4-abcd^3k^4+39a^2bcd^3k^4-120a^3bcd^3k^4+$$
$$147a^4bcd^3k^4-90a^5bcd^3k^4+30a^6bcd^3k^4-5a^7bcd^3k^4+2abc^2d^3k^4-84a^2bc^2d^3k^4+249a^3bc^2d^3k^4-$$
$$288a^4bc^2d^3k^4+159a^5bc^2d^3k^4-42a^6bc^2d^3k^4+4a^7bc^2d^3k^4+2abc^3d^3k^4+63a^2bc^3d^3k^4-186a^3bc^3d^3k^4+$$
$$187a^4bc^3d^3k^4-78a^5bc^3d^3k^4+12a^6bc^3d^3k^4-abc^4d^3k^4-24a^2bc^4d^3k^4+63a^3bc^4d^3k^4-50a^4bc^4d^3k^4+$$
$$12a^5bc^4d^3k^4-abc^5d^3k^4+6a^2bc^5d^3k^4-9a^3bc^5d^3k^4+4a^4bc^5d^3k^4+8a^2d^4k^4-36a^3d^4k^4+$$
$$66a^4d^4k^4-63a^5d^4k^4+33a^6d^4k^4-9a^7d^4k^4+a^8d^4k^4-20a^2cd^4k^4+84a^3cd^4k^4-141a^4cd^4k^4+$$
$$120a^5cd^4k^4-54a^6cd^4k^4+12a^7cd^4k^4-a^8cd^4k^4+18a^2c^2d^4k^4-69a^3c^2d^4k^4+102a^4c^2d^4k^4-$$
$$72a^5c^2d^4k^4+24a^6c^2d^4k^4-3a^7c^2d^4k^4-7a^2c^3d^4k^4+24a^3c^3d^4k^4-30a^4c^3d^4k^4+16a^5c^3d^4k^4-$$
$$3a^6c^3d^4k^4+a^2c^4d^4k^4-3a^3c^4d^4k^4+3a^4c^4d^4k^4-a^5c^4d^4k^4)$$

(4) **五角形の重心**（数式処理ソフトによる）

①予想を立てて，実験する

四角形の重心と同様にして，五角形の重心はつぎのように考えられる。まず，五角形を三角形と四角形に分けて両者の重心を結ぶ直線を考える。このような直線は５本考えれられる。そして，実験により，これら５直線は１点で交わり，この交点が五角形の重心であることが予想される。



②五角形の重心の座標

五角形の頂点を A (A1, A2), B (B1, B2), C (C1, C2), D (D1, D2), E (E1, E2) とするとき，数式処理ソフトを利用して，上の５本の直線は１点で交わることが確認できた。その点の x 座標，y 座標は以下の通りであり，この点が五角形の重心と考えられる。

５本の直線の交点の x 座標は

$(-A2^2 B1^2 + 2 A1 A2 B1 B2 - A1^2 B2^2 - A2 B1 B2 C1 + A1 B2^2 C1 - A2 B2 C1^2 + A2 B1^2 C2 - A1 B1 B2 C2 +$
$A2 B1 C1 C2 + A1 B2 C1 C2 - A1 B1 C2^2 + A2^2 B1 D1 - A1 A2 B2 D1 + A2 B1 B2 D1 - A1 B2^2 D1 +$
$B2^2 C1 D1 - B1 B2 C2 D1 - A2 C1 C2 D1 + B2 C1 C2 D1 + A1 C2^2 D1 - B1 C2^2 D1 - A2 C2 D1^2 + C2^2 D1^2 -$
$A1 A2 B1 D2 - A2 B1^2 D2 + A1^2 B2 D2 + A1 B1 B2 D2 - B1 B2 C1 D2 + A2 C1^2 D2 - B2 C1^2 D2 + B1^2 C2 D2 -$
$A1 C1 C2 D2 + B1 C1 C2 D2 + A2 C1 D1 D2 + A1 C2 D1 D2 - 2 C1 C2 D1 D2 - A1 C1 D2^2 + C1^2 D2^2 +$
$A2^2 B1 E1 - A1 A2 B2 E1 + A2 B1 B2 E1 - A1 B2^2 E1 + B2^2 C1 E1 - B1 B2 C2 E1 + B2 C1 C2 E1 - B1 C2^2 E1 -$
$A2^2 D1 E1 + C2^2 D1 E1 + A1 A2 D2 E1 - C1 C2 D2 E1 - A2 D1 D2 E1 + C2 D1 D2 E1 + A1 D2^2 E1 - C1 D2^2 E1 -$
$A1 A2 B1 E2 - A2 B1^2 E2 + A1^2 B2 E2 + A1 B1 B2 E2 - B1 B2 C1 E2 - B2 C1^2 E2 + B1^2 C2 E2 + B1 C1 C2 E2 +$
$A1 A2 D1 E2 - C1 C2 D1 E2 + A2 D1^2 E2 - C2 D1^2 E2 - A1^2 D2 E2 + C1^2 D2 E2 - A1 D1 D2 E2 + C1 D1 D2 E2) /$
$(3 (A2 B1 B2 - A1 B2^2 - A2 B2 C1 + B2^2 C1 + A2 B1 C2 - B1 B2 C2 +$
$B2 C1 C2 - B1 C2^2 - A2 C2 D1 + C2^2 D1 - A2 B1 D2 + A1 B2 D2 + A2 C1 D2 - B2 C1 D2 + B1 C2 D2 -$
$C1 C2 D2 - A2 B1 E2 + A1 B2 E2 - B2 C1 E2 + B1 C2 E2 + A2 D1 E2 - C2 D1 E2 - A1 D2 E2 + C1 D2 E2)) -$
$((-A2 B1^2 + A1 B1 B2 + A1 B2 C1 - B1 B2 C1 - B2 C1^2 - A1 B1 C2 +$
$B1^2 C2 + B1 C1 C2 + A2 B1 D1 - A1 B2 D1 + B2 C1 D1 + A1 C2 D1 - B1 C2 D1 - C1 C2 D1 - A1 C1 D2 +$
$C1^2 D2 + A2 B1 E1 - A1 B2 E1 + B2 C1 E1 - B1 C2 E1 - A2 D1 E1 + C2 D1 E1 + A1 D2 E1 - C1 D2 E1)$
$(-((-A2 B2 C1 + A2 B1 C2 + B2 C1 C2 - B1 C2^2 - A2 C2 D1 - B2 C2 D1 + C2^2 D1 + A2 C1 D2 + B2 C1 D2 - C1 C2 D2 +$
$C2 D1 D2 - C1 D2^2 + A2 B2 E1 - A2 D2 E1 - B2 D2 E1 + D2^2 E1 - A2 B1 E2 - B2 C1 E2 + B1 C2 E2 +$
$A2 D1 E2 + B2 D1 E2 - C2 D1 E2 + C1 D2 E2 - D1 D2 E2) (-A2^2 B1^2 + 2 A1 A2 B1 B2 - A1^2 B2^2 -$
$A2 B1 B2 C1 + A1 B2^2 C1 - A2 B2 C1^2 + A2 B1^2 C2 - A1 B1 B2 C2 + A2 B1 C1 C2 + A1 B2 C1 C2 - A1 B1 C2^2 +$
$A2^2 B1 D1 - A1 A2 B2 D1 + A2 B1 B2 D1 - A1 B2^2 D1 + B2^2 C1 D1 - B1 B2 C2 D1 - A2 C1 C2 D1 + B2 C1 C2 D1 +$
$A1 C2^2 D1 - B1 C2^2 D1 - A2 C2 D1^2 + C2^2 D1^2 - A1 A2 B1 D2 - A2 B1^2 D2 + A1^2 B2 D2 + A1 B1 B2 D2 -$
$B1 B2 C1 D2 + A2 C1^2 D2 - B2 C1^2 D2 + B1^2 C2 D2 - A1 C1 C2 D2 + B1 C1 C2 D2 + A2 C1 D1 D2 + A1 C2 D1 D2 -$
$2 C1 C2 D1 D2 - A1 C1 D2^2 + C1^2 D2^2 + A2^2 B1 E1 - A1 A2 B2 E1 + A2 B1 B2 E1 - A1 B2^2 E1 +$
$B2^2 C1 E1 - B1 B2 C2 E1 + B2 C1 C2 E1 - B1 C2^2 E1 - A2^2 D1 E1 + C2^2 D1 E1 + A1 A2 D2 E1 -$
$C1 C2 D2 E1 - A2 D1 D2 E1 + C2 D1 D2 E1 + A1 D2^2 E1 - C1 D2^2 E1 - A1 A2 B1 E2 - A2 B1^2 E2 +$
$A1^2 B2 E2 + A1 B1 B2 E2 - B1 B2 C1 E2 - B2 C1^2 E2 + B1^2 C2 E2 + B1 C1 C2 E2 + A1 A2 D1 E2 -$
$C1 C2 D1 E2 + A2 D1^2 E2 - C2 D1^2 E2 - A1^2 D2 E2 + C1^2 D2 E2 - A1 D1 D2 E2 + C1 D1 D2 E2)) /$
$(27 (A2 B1 - A1 B2 + B2 C1 - B1 C2 - A2 D1 + C2 D1 + A1 D2 - C1 D2)$
$(B2 C1 - B1 C2 + C2 D1 - C1 D2 - B2 E1 + D2 E1 + B1 E2 - D1 E2)) +$
$((A2 B1 B2 - A1 B2^2 - A2 B2 C1 + B2^2 C1 + A2 B1 C2 - B1 B2 C2 + B2 C1 C2 -$
$B1 C2^2 - A2 C2 D1 + C2^2 D1 - A2 B1 D2 + A1 B2 D2 + A2 C1 D2 - B2 C1 D2 + B1 C2 D2 - C1 C2 D2 -$
$A2 B1 E2 + A1 B2 E2 - B2 C1 E2 + B1 C2 E2 + A2 D1 E2 - C2 D1 E2 - A1 D2 E2 + C1 D2 E2)$
$(A2 B1 B2 C1 - A1 B2^2 C1 + A2 B2 C1^2 +$
$B2^2 C1^2 - A2 B1^2 C2 + A1 B1 B2 C2 - A2 B1 C1 C2 - A1 B2 C1 C2 - 2 B1 B2 C1 C2 +$
$A1 B1 C2^2 + B1^2 C2^2 + A2 C1 C2 D1 + B2 C1 C2 D1 - A1 C2^2 D1 - B1 C2^2 D1 + A2 C2 D1^2 +$
$B2 C2 D1^2 - A2 C1^2 D2 - B2 C1^2 D2 + A1 C1 C2 D2 + B1 C1 C2 D2 - A2 C1 D1 D2 -$
$B2 C1 D1 D2 - A1 C2 D1 D2 - B1 C2 D1 D2 + A1 C1 D2^2 + B1 C1 D2^2 - A2 B1 B2 E1 + A1 B2^2 E1 -$
$B2^2 C1 E1 +$

$$
\begin{array}{l}
B1\,B2\,C2\,E1 - B2\,C1\,C2\,E1 + B1\,C2^2\,E1 - \\
\quad C2^2\,D1\,E1 + C1\,C2\,D2\,E1 + A2\,D1\,D2\,E1 + B2\,D1\,D2\,E1 - C2\,D1\,D2\,E1 - A1\,D2^2\,E1 - B1\,D2^2\,E1 + \\
\quad C1\,D2^2\,E1 - A2\,B2\,E1^2 + A2\,D2\,E1^2 + B2\,D2\,E1^2 - D2^2\,E1^2 + A2\,B1^2\,E2 - A1\,B1\,B2\,E2 + B1\,B2\,C1\,E2 + \\
\quad B2\,C1^2\,E2 - B1^2\,C2\,E2 - B1\,C1\,C2\,E2 + C1\,C2\,D1\,E2 - A2\,D1^2\,E2 - B2\,D1^2\,E2 + C2\,D1^2\,E2 - C1^2\,D2\,E2 + \\
\quad A1\,D1\,D2\,E2 + B1\,D1\,D2\,E2 - C1\,D1\,D2\,E2 + A2\,B1\,E1\,E2 + A1\,B2\,E1\,E2 - A2\,D1\,E1\,E2 - B2\,D1\,E1\,E2 - \\
\quad A1\,D2\,E1\,E2 - B1\,D2\,E1\,E2 + 2\,D1\,D2\,E1\,E2 - A1\,B1\,E2^2 + A1\,D1\,E2^2 + B1\,D1\,E2^2 - D1^2\,E2^2)) / \\
\;(27\,(A2\,B1 - A1\,B2 + B2\,C1 - B1\,C2 - A2\,D1 + C2\,D1 + A1\,D2 - C1\,D2) \\
\quad (-B2\,C1 + B1\,C2 - C2\,D1 + C1\,D2 + B2\,E1 - D2\,E1 - B1\,E2 + D1\,E2)))) / \\
\;((A2\,B1\,B2 - A1\,B2^2 - A2\,B2\,C1 + B2^2\,C1 + A2\,B1\,C2 - B1\,B2\,C2 + \\
\;B2\,C1\,C2 - B1\,C2^2 - A2\,C2\,D1 + C2^2\,D1 - A2\,B1\,D2 + A1\,B2\,D2 + A2\,C1\,D2 - B2\,C1\,D2 + B1\,C2\,D2 - \\
\;C1\,C2\,D2 - A2\,B1\,E2 + A1\,B2\,E2 - B2\,C1\,E2 + B1\,C2\,E2 + A2\,D1\,E2 - C2\,D1\,E2 - A1\,D2\,E2 + C1\,D2\,E2) \\
\;(((-A1\,B2\,C1 + B2\,C1^2 + A1\,B1\,C2 - B1\,C1\,C2 - A1\,C2\,D1 - B1\,C2\,D1 + C1\,C2\,D1 + C2\,D1^2 + \\
\qquad A1\,C1\,D2 + B1\,C1\,D2 - C1^2\,D2 - C1\,D1\,D2 + A1\,B2\,E1 - B2\,C1\,E1 + B1\,C2\,E1 - C2\,D1\,E1 - \\
\qquad A1\,D2\,E1 - B1\,D2\,E1 + C1\,D2\,E1 + D1\,D2\,E1 - A1\,B1\,E2 + A1\,D1\,E2 + B1\,D1\,E2 - D1^2\,E2) \\
\quad (A2\,B1\,B2 - A1\,B2^2 - A2\,B2\,C1 + B2^2\,C1 + A2\,B1\,C2 - B1\,B2\,C2 + B2\,C1\,C2 - \\
\qquad B1\,C2^2 - A2\,C2\,D1 + C2^2\,D1 - A2\,B1\,D2 + A1\,B2\,D2 + A2\,C1\,D2 - B2\,C1\,D2 + B1\,C2\,D2 - C1\,C2\,D2 - \\
\qquad A2\,B1\,E2 + A1\,B2\,E2 - B2\,C1\,E2 + B1\,C2\,E2 + A2\,D1\,E2 - C2\,D1\,E2 - A1\,D2\,E2 + C1\,D2\,E2)) / \\
\quad (9\,(A2\,B1 - A1\,B2 + B2\,C1 - B1\,C2 - A2\,D1 + C2\,D1 + A1\,D2 - C1\,D2) \\
\qquad (-B2\,C1 + B1\,C2 - C2\,D1 + C1\,D2 + B2\,E1 - D2\,E1 - B1\,E2 + D1\,E2)) - \\
\quad ((-A2\,B1^2 + A1\,B1\,B2 + A1\,B2\,C1 - B1\,B2\,C1 - B2\,C1^2 - A1\,B1\,C2 + B1^2\,C2 + B1\,C1\,C2 + \\
\qquad A2\,B1\,D1 - A1\,B2\,D1 + B2\,C1\,D1 + A1\,C2\,D1 - B1\,C2\,D1 - C1\,C2\,D1 - A1\,C1\,D2 + C1^2\,D2 + \\
\qquad A2\,B1\,E1 - A1\,B2\,E1 + B2\,C1\,E1 - B1\,C2\,E1 - A2\,D1\,E1 + C2\,D1\,E1 + A1\,D2\,E1 - C1\,D2\,E1) \\
\quad (-A2\,B2\,C1 + A2\,B1\,C2 + B2\,C1\,C2 - B1\,C2^2 - A2\,C2\,D1 - B2\,C2\,D1 + C2^2\,D1 + \\
\qquad A2\,C1\,D2 + B2\,C1\,D2 - C1\,C2\,D2 + C2\,D1\,D2 - C1\,D2^2 + A2\,B2\,E1 - A2\,D2\,E1 - B2\,D2\,E1 + D2^2\,E1 - \\
\qquad A2\,B1\,E2 - B2\,C1\,E2 + B1\,C2\,E2 + A2\,D1\,E2 + B2\,D1\,E2 - C2\,D1\,E2 + C1\,D2\,E2 - D1\,D2\,E2)) / \\
\quad (9\,(A2\,B1 - A1\,B2 + B2\,C1 - B1\,C2 - A2\,D1 + C2\,D1 + A1\,D2 - C1\,D2) \\
\qquad (B2\,C1 - B1\,C2 + C2\,D1 - C1\,D2 - B2\,E1 + D2\,E1 + B1\,E2 - D1\,E2))))
\end{array}
$$

5本の直線の交点の y 座標は

$$
\begin{array}{l}
(-(((-A2\,B2\,C1 + A2\,B1\,C2 + B2\,C1\,C2 - B1\,C2^2 - A2\,C2\,D1 - B2\,C2\,D1 + C2^2\,D1 + \\
\qquad A2\,C1\,D2 + B2\,C1\,D2 - C1\,C2\,D2 + C2\,D1\,D2 - C1\,D2^2 + A2\,B2\,E1 - A2\,D2\,E1 - B2\,D2\,E1 + D2^2\,E1 - \\
\qquad A2\,B1\,E2 - B2\,C1\,E2 + B1\,C2\,E2 + A2\,D1\,E2 + B2\,D1\,E2 - C2\,D1\,E2 + C1\,D2\,E2 - D1\,D2\,E2) \\
\quad (-A2^2\,B1^2 + 2\,A1\,A2\,B1\,B2 - A1^2\,B2^2 - \\
\qquad A2\,B1\,B2\,C1 + A1\,B2^2\,C1 - A2\,B2\,C1^2 + A2\,B1^2\,C2 - A1\,B1\,B2\,C2 + A2\,B1\,C1\,C2 + \\
\qquad A1\,B2\,C1\,C2 - A1\,B1\,C2^2 + A2^2\,B1\,D1 - A1\,A2\,B2\,D1 + A2\,B1\,B2\,D1 - A1\,B2^2\,D1 + B2^2\,C1\,D1 - \\
\qquad B1\,B2\,C2\,D1 - A2\,C1\,C2\,D1 + B2\,C1\,C2\,D1 + A1\,C2^2\,D1 - B1\,C2^2\,D1 - A2\,C2\,D1^2 + \\
\qquad C2^2\,D1^2 - A1\,A2\,B1\,D2 - A2\,B1^2\,D2 + A1^2\,B2\,D2 + A1\,B1\,B2\,D2 - B1\,B2\,C1\,D2 + A2\,C1^2\,D2 - \\
\qquad B2\,C1^2\,D2 + B1^2\,C2\,D2 - A1\,C1\,C2\,D2 + B1\,C1\,C2\,D2 + A2\,C1\,D1\,D2 + A1\,C2\,D1\,D2 - 2\,C1\,C2\,D1\,D2 - \\
\quad A1\,C1\,D2^2 + C1^2\,D2^2 + A2^2\,B1\,E1 - \\
\qquad A1\,A2\,B2\,E1 + A2\,B1\,B2\,E1 - A1\,B2^2\,E1 + B2^2\,C1\,E1 - B1\,B2\,C2\,E1 + B2\,C1\,C2\,E1 - B1\,C2^2\,E1 - \\
\qquad A2^2\,D1\,E1 + C2^2\,D1\,E1 + A1\,A2\,D2\,E1 - C1\,C2\,D2\,E1 - A2\,D1\,D2\,E1 + C2\,D1\,D2\,E1 + A1\,D2^2\,E1 - \\
\qquad C1\,D2^2\,E1 - A1\,A2\,B1\,E2 - A2\,B1^2\,E2 + A1^2\,B2\,E2 + A1\,B1\,B2\,E2 - B1\,B2\,C1\,E2 -
\end{array}
$$

```
    B2 C1^2 E2 + B1^2 C2 E2 + B1 C1 C2 E2 + A1 A2 D1 E2 - C1 C2 D1 E2 +
    A2 D1^2 E2 - C2 D1^2 E2 - A1^2 D2 E2 + C1^2 D2 E2 - A1 D1 D2 E2 + C1 D1 D2 E2)) /
  (27 (A2 B1 - A1 B2 + B2 C1 - B1 C2 - A2 D1 + C2 D1 + A1 D2 - C1 D2)
   (B2 C1 - B1 C2 + C2 D1 - C1 D2 - B2 E1 + D2 E1 + B1 E2 - D1 E2)) +
 ((A2 B1 B2 - A1 B2^2 - A2 B2 C1 + B2^2 C1 + A2 B1 C2 - B1 B2 C2 + B2 C1 C2 - B1 C2^2 - A2 C2 D1 +
    C2^2 D1 - A2 B1 D2 + A1 B2 D2 + A2 C1 D2 - B2 C1 D2 + B1 C2 D2 - C1 C2 D2 - A2 B1 E2 + A1 B2 E2 -
    B2 C1 E2 + B1 C2 E2 + A2 D1 E2 - C2 D1 E2 - A1 D2 E2 + C1 D2 E2) (A2 B1 B2 C1 - A1 B2^2 C1 +
    A2 B2 C1^2 + B2^2 C1^2 - A2 B1^2 C2 + A1 B1 B2 C2 - A2 B1 C1 C2 - A1 B2 C1 C2 - 2 B1 B2 C1 C2 + A1 B1 C2^2 +
    B1^2 C2^2 + A2 C1 C2 D1 + B2 C1 C2 D1 - A1 C2^2 D1 - B1 C2^2 D1 + A2 C2 D1^2 + B2 C2 D1^2 - A2 C1^2 D2 - B2 C1^2 D2 +
    A1 C1 C2 D2 + B1 C1 C2 D2 - A2 C1 D1 D2 - B2 C1 D1 D2 - A1 C2 D1 D2 - B1 C2 D1 D2 + A1 C1 D2^2 + B1 C1 D2^2 -
    A2 B1 B2 E1 + A1 B2^2 E1 - B2^2 C1 E1 + B1 B2 C2 E1 - B2 C1 C2 E1 + B1 C2^2 E1 - C2^2 D1 E1 +
    C1 C2 D2 E1 + A2 D1 D2 E1 + B2 D1 D2 E1 - C2 D1 D2 E1 - A1 D2^2 E1 - B1 D2^2 E1 + C1 D2^2 E1 -
    A2 B2 E1^2 + A2 D2 E1^2 + B2 D2 E1^2 - D2^2 E1^2 + A2 B1^2 E2 - A1 B1 B2 E2 + B1 B2 C1 E2 + B2 C1^2 E2 -
    B1^2 C2 E2 - B1 C1 C2 E2 + C1 C2 D1 E2 - A2 D1^2 E2 - B2 D1^2 E2 + C2 D1^2 E2 - C1^2 D2 E2 +
    A1 D1 D2 E2 + B1 D1 D2 E2 - C1 D1 D2 E2 + A2 B1 E1 E2 + A1 B2 E1 E2 - A2 D1 E1 E2 - B2 D1 E1 E2 -
    A1 D2 E1 E2 - B1 D2 E1 E2 + 2 D1 D2 E1 E2 - A1 B1 E2^2 + A1 D1 E2^2 + B1 D1 E2^2 - D1^2 E2^2)) /
  (27 (A2 B1 - A1 B2 + B2 C1 - B1 C2 - A2 D1 + C2 D1 + A1 D2 - C1 D2)
   (-B2 C1 + B1 C2 - C2 D1 + C1 D2 + B2 E1 - D2 E1 - B1 E2 + D1 E2))) /
(((-A1 B2 C1 + B2 C1^2 + A1 B1 C2 - B1 C1 C2 - A1 C2 D1 - B1 C2 D1 +
    C1 C2 D1 + C2 D1^2 + A1 C1 D2 + B1 C1 D2 - C1^2 D2 - C1 D1 D2 + A1 B2 E1 - B2 C1 E1 + B1 C2 E1 -
    C2 D1 E1 - A1 D2 E1 - B1 D2 E1 + C1 D2 E1 + D1 D2 E1 - A1 B1 E2 + A1 D1 E2 + B1 D1 E2 - D1^2 E2)
   (A2 B1 B2 - A1 B2^2 - A2 B2 C1 + B2^2 C1 + A2 B1 C2 - B1 B2 C2 + B2 C1 C2 -
    B1 C2^2 - A2 C2 D1 + C2^2 D1 - A2 B1 D2 + A1 B2 D2 + A2 C1 D2 - B2 C1 D2 + B1 C2 D2 - C1 C2 D2 -
    A2 B1 E2 + A1 B2 E2 - B2 C1 E2 + B1 C2 E2 + A2 D1 E2 - C2 D1 E2 - A1 D2 E2 + C1 D2 E2)) /
  (9 (A2 B1 - A1 B2 + B2 C1 - B1 C2 - A2 D1 + C2 D1 + A1 D2 - C1 D2)
   (-B2 C1 + B1 C2 - C2 D1 + C1 D2 + B2 E1 - D2 E1 - B1 E2 + D1 E2)) -
 ((-A2 B1^2 + A1 B1 B2 + A1 B2 C1 - B1 B2 C1 - B2 C1^2 - A1 B1 C2 +
    B1^2 C2 + B1 C1 C2 + A2 B1 D1 - A1 B2 D1 + B2 C1 D1 + A1 C2 D1 - B1 C2 D1 - C1 C2 D1 - A1 C1 D2 +
    C1^2 D2 + A2 B1 E1 - A1 B2 E1 + B2 C1 E1 - B1 C2 E1 - A2 D1 E1 + C2 D1 E1 + A1 D2 E1 - C1 D2 E1)
   (-A2 B2 C1 + A2 B1 C2 + B2 C1 C2 - B1 C2^2 - A2 C2 D1 - B2 C2 D1 + C2^2 D1 +
    A2 C1 D2 + B2 C1 D2 - C1 C2 D2 + C2 D1 D2 - C1 D2^2 + A2 B2 E1 - A2 D2 E1 - B2 D2 E1 + D2^2 E1 -
    A2 B1 E2 - B2 C1 E2 + B1 C2 E2 + A2 D1 E2 + B2 D1 E2 - C2 D1 E2 + C1 D2 E2 - D1 D2 E2)) /
  (9 (A2 B1 - A1 B2 + B2 C1 - B1 C2 - A2 D1 + C2 D1 + A1 D2 - C1 D2)
   (B2 C1 - B1 C2 + C2 D1 - C1 D2 - B2 E1 + D2 E1 + B1 E2 - D1 E2)))
```

2．数式処理ソフトの利点

上記の「多角形の重心の性質」は，数式処理ソフトを用いて，次①～⑤のことを導くことができた。

多角形の重心を G，重線を L とする。この多角形を L により 2 つの部分 X_1，と X_2 にわけ，

X_1 の重心を G_1，G_1 と L との距離を l_1，X_1 の面積を S_1，

X_2 の重心を G_2，G_2 と L との距離を l_2，X_2 の面積を S_2 とすると

①三角形において，G_1，G，G_2 が同一直線上にあること

②三角形において，$S_1 \times l_1 = S_2 \times l_2$ が成り立つこと
③四角形において，重心 G の座標を求めること
④四角形において，G_1，G，G_2 が同一直線上にあること
⑤五角形において，重心 G の座標を求めること

重心に関するこれらの性質は，基本的なものでありながら，いままでほとんど明らかになっていないことがらであった。これらをコンピュータを使わず，手計算だけで導くのはほとんど不可能である。しかし，数式処理ソフトを用いれば，高校数学の知識の範囲内で，これらを明らかにすることができる。このように，数式処理ソフトは，高校生もしくは中学生にも，手計算を越えた新しい発見の機会を提供し得るコンピュータ・メディアである。

3．数式処理ソフトによる計算の位置付け

数学教育における計算の位置付けによって，数式処理ソフトの教育的意味付けも異なる。計算力の向上が数学教育の目的であるとするならば，数式処理ソフトは不必要であるという考えもあり得る。しかし，コンピュータがますます生活に身近になる現実を考えれば，計算力の向上が数学教育の目的といい切ることはできないだろう。かといって，計算をすべてコンピュータに任すというのも極論である。生徒の計算力を育てながら，コンピュータとのバランスをとるのが賢明であろう。このために，先の「多角形における重心の性質」では，計算手段として，「手計算」,「手計算と数式処理ソフトの混用」,「数式処理ソフト」の３つの場面を用意した。はじめは，「手計算」で生徒の計算力も育成しながら，徐々に数式処理ソフトを利用するという流れを構想している。

4．生徒の活動の位置付け

数式処理ソフトを使うとき，最も問題となるのは，生徒にとって，数式処理ソフトがブラックボックスになることである。数式処理ソフトが魔法の箱に感じられ，自分の計算の意識と全く隔絶したものと感じられるとしたら，数式処理ソフトの教育的意味はなくなってしまう。この点においても，上で述べた「手計算」,「手計算と数式処理ソフトとの混用」,「数式処理ソフト」の３つの場面は有用である。学習の基本的・典型的な部分の計算は「手計算」で行ない，生徒が実感をもって当の学習場面を理解できるようにする。その後，「手計算と数式処理ソフトとの混用」により，手計算を自然に延長した活動として数式処理ソフトが利用できるように配慮している。すなわち，数式処理ソフトの結果と手計算の結果とを比較させて，数式処理ソフトにより手計算と同じ結果が生じることを実感させる。このような活動を経て，数式処理ソフトのみを駆使した活動をさせている。数式処理ソフトがブラックボックスにならないようにするためには，このような配慮が必要である。

Ⅳ．おわりに

コンピュータの発達に伴い，小・中・高校の算数・数学教育でコンピュータを授業に活用することがさまざまに試みられている。本稿では，いまだ小・中・高校では実践が乏しい数式処理ソフトの数学教育での利用例を提案した。数式処理ソフトは数値計算・数式計算など，数学のさまざまな計算に威力を発揮するソフトである。数学の歴史を計算の観点で捉えてみると，

それは「手計算」を正確に，効率よく行なうことを求めてきたと言えるのではないだろうか。数学教育との関連で見ても，平方根表や対数表を用意したこと，開平の計算，分母の有理化などで平方根を簡単に表わす知識を得ること，さまざまな計算公式を得ることなど，このような知識・技能の発達は，「手計算」の確実で迅速な遂行という目標や願い無くしてはあり得なかったであろう。しかし，コンピュータが発達した今日，「手計算」のための知識は考え直す必要があるのではないだろうか。とくに，人間の陶冶という目的をもつ教育における数学においては，「手計算」のための知識がどれほど必要であるのか，検討する必要性がある。数学教育における数式処理ソフトの利用という課題は，とりわけ，そのような検討を我々に要求していると思われる。

参 考 文 献

（1）佐伯昭彦　他「テクノロジーを活用した新しい数学教育」明治図書　1997
（2）拙稿　『学校数学としての統計の指導について』「愛媛大学教育学部紀要　第Ⅰ部　教育科学」第45巻　第2号　1999年
（3）バルク「重心の概念の幾何への応用（下)」東京図書　1961