多層壁の非定常熱伝導 (伝達関数による熱的応答の計算)

山 崎 博 司·佐 古 光 雄*·千 葉 徳 男** (愛媛大学教育学部技術研究室) (昭和62年10月9日受理)

Unsteady State Heat Conduction through Multi-Layer Walls (Calculation of Thermal Response by Transfer Function)

Hiroshi Yamasaki Mitsuo Sako* Tokuo Chiba**

Department of Technology, Faculty of Education,

Ehime University, Bunkyo-cho, Matsuyama 790

(Received October 9, 1987)

An accurate calculation of heat flow through the building enclosures is an important part of designing of the building and its air-conditioning system. The transfer functions for unsteady state heat conduction through the composite construction of the ferroconcrete and the plaster board with rock wool insulator at the inner surface is derived by the use of Laplace transform equations. Two boundary conditions, the periodic ambient temperature change and sudden room temperature change are applied to these functions. The frequency response and the step response of inner surface temperature for various thickness of insulator and ferroconcrete layer are discussed. It is concluded that the adequate thickness of insulator is estimated about 5cm, and the heat flow concerning with the seasonal ambient temperature change can be treated as steady state heat conduction with the time of delay.

1. 緒 言

ビル外壁は建物の強度を担うとともに、室内と外気との断熱という機能を持つことが要求される。空気調和の観点から見ると、室内温度に対する外気温変動の影響も空調機の起動負荷もできるだけ小さいことが望ましい。これは、外気温変動に対して内壁表面温度の変動が小さく、また空調機器の起動時には内壁表面が速やかに室内温度に近づくことを意味している。そのた

^{*} 広島大学 (Hiroshima University, Saijo-cho, Higashihiroshima, 724)

^{**} 香川職業訓練短期大学校 (Kagawa Vocational Training College, Gunge-cho, Marugame, 763)

め、壁材に断熱材を組み合わせて多層構造としたものも用いられている。このような多層壁について、非定常状態での通過熱量を予測することは建物を設計するうえで重要な問題である。

多層壁の非定常熱伝導については、1946年に Mackey とWrightが検討を行っているが、これは多層壁を熱的に等価な均質壁として取り扱い、その伝熱特性を検討したものである。また Pipesや Carslaw とJeagerは多層平板についてラプラス変換による解法を示しているが、実際 の多層壁についての検討は十分に行われていないようである。こののち熱流路を電気回路系で シミュレートする方法なども用いられたが、近年では計算機の発達に伴い、有限差分法や熱的 応答係数法などを用いての研究が多く行われている。しかしながら、これらは実際の温度条件 を精度よくかつ容易にシミュレートすることを目的としたものであり、純解析的な方法を用いて多層壁の非定常状態での伝熱特性を系統的かつ具体的に検討した例は見あたらない。

著者らは、壁体を平板と規定して、 n 層平板の非定常熱伝導問題についてラプラス変換を 適用し、鉄筋コンクリート、断熱材および内装材からなる3層壁の周波数応答およびステップ 応答の数値計算を行い、ビル外壁の断熱性能と壁材厚さとの関係について検討したので、その 結果について報告する。

2. 基礎方程式と伝達関数

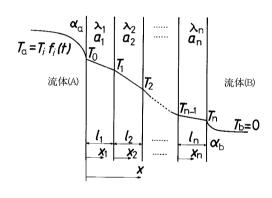


図1 熱伝導モデル

本計算で用いた多層平板の熱伝導モデルと座標系を図1に示す。ここでTは温度, α , λ ,aは熱伝達率,熱伝導率,熱拡散率である。実際には外気温度,室内温度はともに変動している。しかし境界条件としてはこれらを適当に分離し、一方の流体温度を一定としてそれぞれの応答を求め、その結果を線形結合することにより系全体の温度分布を求めることができる。すなわち座標系を入れ換えることで室内側、室外側の変化に対する応答を一つの座標系で取り扱うことができる。

そこで、それぞれの流体温度を $T_a=T_f(t)$ 、 $T_b=0$ として、図1の系の熱伝導方程式および境界条件を時間に関してラプラス変換すると次式を得る。ここで θ はラプラス変換温度である。

$$\frac{d^{2}\theta}{dx_{1}^{2}} - \frac{s}{a_{1}}\theta = 0 \qquad (0 \le x_{1} \le l_{1})$$

$$\frac{d^{2}\theta}{dx_{2}^{2}} - \frac{s}{a_{2}}\theta = 0 \qquad (0 \le x_{2} \le l_{2})$$

$$\vdots$$

$$\frac{d^{2}\theta}{dx_{n}^{2}} - \frac{s}{a_{n}}\theta = 0 \qquad (0 \le x_{n} \le l_{n})$$

$$x_{1} = 0 \qquad ; \quad \frac{d\theta}{dx_{1}} = h(\theta_{0} - T_{i}F_{i}(s)), \quad h = \alpha_{n}/\lambda_{1}$$

$$x_{1} = l_{1}$$

$$x_{2} = 0 \qquad ; \quad \theta_{x_{1}=l_{1}} = \theta_{x_{2}=0}, \quad \lambda_{1}\frac{d\theta}{dx_{1}}\Big|_{x_{1}=l_{1}} = \lambda_{2}\frac{d\theta}{dx_{2}}\Big|_{x_{2}=0}$$
(1)

$$\begin{array}{ll}
\vdots & \vdots \\
x_{n-1} = l_{n-1}; \ \theta_{x_{n-1} = l_{n-1}} = \theta_{x_{n} = 0}, \ \lambda_{n-1} \frac{d\theta}{dx_{n-1}} \Big|_{x_{n-1} = l_{n-1}} = \lambda_{n} \frac{d\theta}{dx_{n}} \Big|_{x_{n} = 0} \\
x_{n} = l_{n} \quad ; \frac{d\theta}{dx_{n}} = -h'\theta_{n}, \ h' = \alpha_{b}/\lambda_{n}
\end{array} \tag{2}$$

式(1)の一般解は次式で示され、式(3)を式(2)に代入すると、式(4)を得る。

$$\theta = A_i \sinh x_i \sqrt{\frac{s}{a_i}} + B_i \cosh x_i \sqrt{\frac{s}{a_i}}$$
(3)

$$P \cdot \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \\ A_2 \\ B_2 \\ \vdots \\ A_n \\ B_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -h T_i F_i(s) \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(4)$$

上式でPは式(5)で示される2n次の正方行列である。

$$\begin{split} a_{11} &= \sqrt{\frac{s}{a_1}}, \ a_{12} = -h \\ b_{m,2m-1} &= \sinh \ l_m \sqrt{\frac{s}{a_m}}, \ b_{m,2m} = \cosh \ l_m \sqrt{\frac{s}{a_m}} \\ c_{m,2m-1} &= \frac{K_m}{K_{m+1}} \cosh \ l_m \sqrt{\frac{s}{a_m}}, \ c_{m,2m} = \frac{K_m}{K_{m+1}} \sinh \ l_m \sqrt{\frac{s}{a_m}} \\ d_{n,2n-1} &= \sqrt{\frac{s}{a_n}} \cosh \ l_n \sqrt{\frac{s}{a_n}} + h' \sinh \ l_n \sqrt{\frac{s}{a_n}} \\ d_{n,2n} &= \sqrt{\frac{s}{a_n}} \sinh \ l_n \sqrt{\frac{s}{a_n}} + h' \cosh \ l_n \sqrt{\frac{s}{a_n}} \end{split}$$

式(5)において $K_m = \lambda_m l \sqrt{a_m}$, $(m=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$ であり, P はバンド幅が5の非対称行列である。式(4)から $A_i,\ B_i$ は次式によって求められる。

ここで |P| は P の行列式,また $|Q_i|$ は, A_i に対して P の (2i-1) 列を, B_i に対して P の (2i) 列を式(4)の右辺列ベクトルで置換した行列式である。式(3)の定数はこれらを逐次展開すれば求めることができ,n 層平板内における m 層目のラプラス変換温度 θ_m は次式で表現される。

$$\theta_m = G_m(s, x_m) \cdot F_i(s) \qquad (m = 1, 2, \dots, n)$$

$$(7)$$

ここで $G_m(s)$ は伝達関数であり, $F_i(s)$ はラプラス変換された入力関数である。実時間に対する温度分布は式(7)を逆変換することによって求まる。

いま 3 層平板の両表面のラプラス変換温度 θ_0 , θ_3 を式(8)で表すと,伝達関数 G_0 , G_3 は式(9)~式(11)となる。

$$\theta_0 = G_0(s) \cdot F_i(s)$$

$$\theta_3 = G_3(s) \cdot F_i(s)$$
(8)

$$G_{0}(s) = \left(h \left\{\frac{K_{2}}{K_{3}} \left(\frac{K_{1}}{K_{2}} \cosh l_{1} \sqrt{\frac{s}{a_{1}}} \cdot \cosh l_{2} \sqrt{\frac{s}{a_{2}}} + \sinh l_{1} \sqrt{\frac{s}{a_{1}}} \cdot \sinh l_{2} \sqrt{\frac{s}{a_{2}}}\right) \left(\sqrt{\frac{s}{a_{3}}} \cosh l_{2} \sqrt{\frac{s}{a_{3}}} + h' \sinh l_{3} \sqrt{\frac{s}{a_{3}}}\right) + \left(\frac{K_{1}}{K_{2}} \cosh l_{1} \sqrt{\frac{s}{a_{1}}} \cdot \sinh l_{2} \sqrt{\frac{s}{a_{2}}} + \sinh l_{1} \sqrt{\frac{s}{a_{1}}} \cosh l_{2} \sqrt{\frac{s}{a_{2}}}\right) \left(\sqrt{\frac{s}{a_{3}}} \sinh l_{3} \sqrt{\frac{s}{a_{3}}} + h' \cosh l_{3} \sqrt{\frac{s}{a_{3}}}\right)\right) |F_{3}(s)$$

$$(9)$$

$$G_3(s) = h \frac{K_1 K_2}{K_2 K_3} \sqrt{\frac{s}{a_3}} | F_3(s)$$
 (10)

$$F_{3}(s) = \frac{K_{2}}{K_{3}} \left\{ \frac{K_{1}}{K_{2}} \left(\sqrt{\frac{s}{a_{1}}} \right) \sinh l_{1} \sqrt{\frac{s}{a_{1}}} + h \cosh l_{1} \sqrt{\frac{s}{a_{1}}} \right) \cosh l_{2} \sqrt{\frac{s}{a_{2}}} + \left(\sqrt{\frac{s}{a_{1}}} \cosh l_{1} \sqrt{\frac{s}{a_{1}}} + h \cosh l_{1} \sqrt{\frac{s}{a_{1}}} \right) \sinh l_{2} \sqrt{\frac{s}{a_{2}}} \right\} \left(\sqrt{\frac{s}{a_{3}}} \cosh l_{3} \sqrt{\frac{s}{a_{3}}} + h' \sinh l_{3} \sqrt{\frac{s}{a_{3}}} \right) + \left\{ \frac{K_{1}}{K_{2}} \left(\sqrt{\frac{s}{a_{1}}} \sinh l_{1} \sqrt{\frac{s}{a_{1}}} + h \cosh l_{1} \sqrt{\frac{s}{a_{1}}} \right) \sinh l_{2} \sqrt{\frac{s}{a_{2}}} + \left(\sqrt{\frac{s}{a_{1}}} \cosh l_{1} \sqrt{\frac{s}{a_{1}}} + h \sinh l_{1} \sqrt{\frac{s}{a_{1}}} \right) \cosh l_{2} \sqrt{\frac{s}{a_{2}}} \right) \left(\sqrt{\frac{s}{a_{3}}} \sinh l_{3} \sqrt{\frac{s}{a_{3}}} + h' \cosh l_{3} \sqrt{\frac{s}{a_{3}}} \right) \right\}$$

$$(11)$$

3. ビル断熱壁の周波数応答およびステップ応答

ビル断熱壁は、基本的には外壁に強度を持たせるための鉄筋コンクリート、その内側に断熱材、それに接して内装材という組み合わせである。本報ではこのような 3 層壁について検討する。また本計算では熱伝達率を一定としているため、室内から壁への損失熱量は内壁表面温度と室内温度との差に比例する。すなわち室内から壁への損失熱量と内壁表面温度とは一対一に対応しており、本報では内壁表面温度を用いて多層壁の断熱性能を議論する。まず外気温が周期的に変動する場合の内壁表面温度の応答は外気温を T_a 、室温を T_b と考えればよく、伝達関数は式(10)となる。ここで、入力関数 f_a (t) は外気温の変動周期を t_b して次式で示される。

$$f_{\lambda}(t) = \sin \omega t, \ \omega = 2\pi/t_{\rm p} \tag{12}$$

式(12)の入力関数がある場合の内壁表面温度の周波数応答は、伝達関数の変数 s に $j\omega(j=\sqrt{-1})$ を代入することによって得られるゲイン $|G(j\omega)|$ と位相遅れ $\angle G(j\omega)$ から求まる。 つぎに室内温度が突変した場合の内壁表面温度の応答は、室温を T_a 、外気温を T_b と考えて式(9)の伝達関数から計算できる。この場合の f(t) は次式で示される。

$$f_i(t) = u(t) \tag{13}$$

ここで u(t) は t<0 で u=0 , t≥0 で u=1 というユニット関数である。式(13)の入力があ

った場合の内壁表面温度の応答としては、式(9)の伝達関数をラプラス逆変換して、インパルス応答を求め、それを時間 t について積分すればよい。

式 (9) は一価関数であるので m 番目の特異点を z_m とすれば、ラプラス逆変換は次式で求まる。

$$L^{-1}[G_0(s)] = \sum_{m=1}^{\infty} R_0(z_m)e^{-zmt}$$
(14)

上式で $R_0(z_m)$ は特異点 z_m に対応する留数である。これより室温が突変したときの室内壁表面温度 T のステップ応答は, T_i で規格化して次式で示される。

$$T/T_i = \int_{-\infty}^{\infty} R_0(z_m) e^{-zm\tau} d\tau \tag{15}$$

また室内温度が突変してから時間 t だけ経過したときの壁への損失熱量の積算値 q は T_i で規格化して次式となる。

$$q/T_i = \int \alpha_a (1 - T/T_i) d\tau \tag{16}$$

なお本報では式(15)の収束誤差が0.5%以下となるまで計算を行った。

表1 壁材の熱物性値

	入 W/mK	a m²/s
鉄筋コンクリート	1.630	8.3 x 10 ⁻⁷
ロックウール	0.047	2.1
石膏ボード	0.209	3.3

本計算では断熱材にはロックウールを用い、 内装材は厚さ1 cmの石膏ボードを用いるものと した。表1 に計算に用いた壁材の熱物性値を示 す。また壁と空気の熱伝達率 α_a , α_b はともに 11.63W/ m^2 K(10kcal/ m^2 hK) で一定とした。

4. 数值計算結果

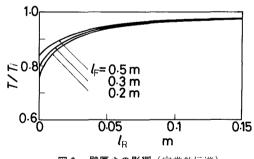
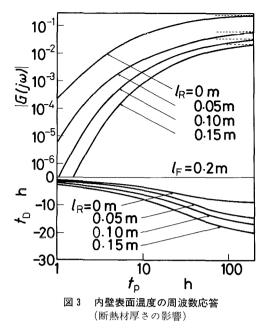


図2 壁厚さの影響(定常熱伝導)

周波数応答における変動周期 $t_p=\infty$ およびステップ応答における時間 $t=\infty$ での収束値は定常状態における解と等しい。そこでまず定常解について検討する。図 2 に室内温度を T_a として $T_a=T_i$ における内壁表面温度に対する断熱材厚さの影響を示す。図において横軸は断熱材厚さ、縦軸は内壁表面温度を T_i で規格化した無次元温度である。また図中の記号 l_R , l_F はそれぞれロックウール,鉄筋コンクリート壁

の厚さを示している。鉄筋コンクリート壁厚さが $20\,\mathrm{cm}$ に $5\,\mathrm{cm}$ の断熱材を挟むと,断熱材を用いない場合に比べて T/T_i が0.75から0.94と大きくなる。しかし断熱材を $10\,\mathrm{cm}$ にしても T/T_i は0.97であって,あまり大きくならない。また断熱材厚さが $5\,\mathrm{cm}$ の場合,鉄筋コンクリート壁厚さを $20\,\mathrm{cm}$ から $50\,\mathrm{cm}$ に増しても, T/T_i は0.94から0.95になるだけであり,鉄筋コンクリート壁の厚さを厚くしても定常状態にはあまり効果がない。

図 3 に鉄筋コンクリート壁の厚さを一定とした場合の内壁温度の周波数応答に対する断熱材厚さの影響を示す。図は鉄筋コンクリート壁厚さが $20\,\mathrm{cm}$ の場合についてのものであり、横軸は周期 $t_\mathrm{p}(\mathrm{h})$ 、縦軸はゲイン $|G(j\omega)|$ 、遅れ時間 $t_\mathrm{p}(\mathrm{h})=2\pi/\angle G(j\omega)$ である。図中の破線は $t_\mathrm{p}=\infty$



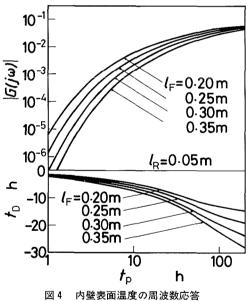
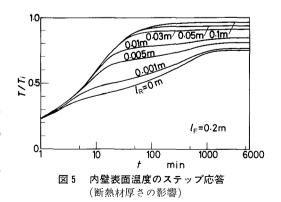


図 5 に、室内温度が突変した場合の内壁表面温度のステップ応答に対する断熱材厚さの影響を示す。ここで縦軸は規格化温度 T/T_i , 横軸は時間 $t(\min)$ で、 $1\min$ から $6000\min(100h)$ まで示してある。図において t=100h での各断熱材厚さの T/T_i は図 2 に示した定常状態での T/T_i とほぼ一致しており、ステップ応答を

(鉄筋コンクリート壁厚さの影響)

すなわち定常状態でのゲインを示したものである。 t_p =200h におけるゲインは定常状態における T/T_i とほぼ等しく, t_p =200h 以上での多層壁内の温度変化は $15\sim30$ h の遅れを伴う準定常的変化と考えてよい。また, t_p の大きいところでは断熱材を挟まない場合に比べて厚さ5 cmの断熱材を挟むと,ゲインは約 1/10になる。断熱材厚さを5 cm,10 cm,15 cm と増していくと,ゲインは断熱材の比にほぼ逆比例して減少する。つぎに遅れ時間は断熱材厚さが厚いほうが大きくなっており, t_p が小さいときには断熱材厚さの影響は小さいが, t_p が大きくなる。

図4に断熱材厚さが一定の場合の周波数応答 に対する鉄筋コンクリート壁厚さの影響を示 す。縦軸、横軸は図3と同じであり、図は断熱 材厚さが5cmの場合を示している。図3に示し た断熱材厚さの影響に比べてゲインに対する鉄 筋コンクリート壁厚さの影響は小さく、特に t_n =200h ではコンクリート壁の厚さはゲイン に対してほとんど影響していない。また遅れ時 間に対する鉄筋コンクリート壁厚さの影響は, 断熱材厚さの影響と同じ程度である。いま気温 変動の周期を日周期($t_p=24h$)と考えると、 鉄筋コンクリート壁厚さが20cm, 断熱材厚さが 5 cm の場合には $|G(j\omega)| = 0.08$, $t_D = 7.5 \text{h}$ で ある。すなわち、この条件では壁を通じての一 日の外気温変動の室内温度への影響はほとんど ないことがわかる。



検討するには、 t=100h 程度まで調べればよいことがわかる。また、断熱材厚さを厚くすると T/T_i の立上りが大きく、定常値になるまでの時間も断熱材厚さが厚いほうが短くなっている。断熱材厚さが 5 cm \ge 10 cm では t=60 min 以前においてほとんど差が見られない。これよりステップ応答初期については断熱材厚さを 5 cm 程度挟めば、それ以上厚くしても効果がないことがわかる。

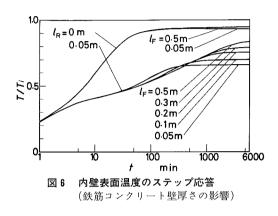
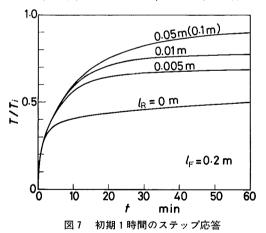


図 6 に内壁表面温度のステップ応答に対する 鉄筋コンクリート壁厚さの影響を示す。横軸, 縦軸は図 5 と同じであり,断熱材を用いない場 合と断熱材厚さが 5 cmの場合について鉄筋コン クリート壁厚さを 5 cmから50 cm まで変化させ た。断熱材を用いない場合,そのステップ応答 は 鉄 筋 コンクリート 壁厚 さが 5 cm では $t = 30 \min$, 10 cm では $t = 60 \min$ で影響が現れ 始めている。断熱材厚さが 5 cmの場合では断熱 材を挟まない場合に比べ,鉄筋コンクリート壁 厚さの影響は極めて小さく,その影響も

 $t = 120 \min$ を越えてから徐々に現れる程度であり、それ以前ではステップ応答に関しては鉄筋コンクリート壁厚さは影響していない。このことより冷暖房開始初期を問題とする場合、断熱材を5 cm用いていれば鉄筋コンクリート壁厚さの影響は考えなくてよいことがわかる。

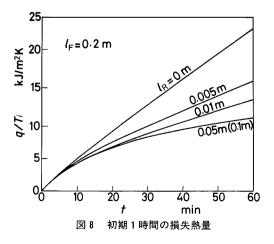
図 7 に室内温度が急変してから 60min までの内壁表面温度のステップ応答を示す。横軸は時間 t(min), 縦軸は T/T_i であり、鉄筋コンクリート壁厚さが20cmで断熱材厚さを変化させ



グラフ上では差が見られない。その後,温度分布は鉄筋コンクリートの影響を受け,断熱材が 薄いものから差が生じ始める。

図7の各条件について,室温が急変してから60min までの,壁表面を通過した熱の積算量を図8に示す。ここで横軸は時間t(min),縦軸は伝熱量 g/T_i である。厚さ0.5cmの断熱材を

た場合について示している。図からわかるように断熱材を用いない場合も,厚さが5 cmのものを用いた場合でも室温が急変してから1.5 minまでは内壁表面温度の応答には差がない。t=1.5 min以後,断熱材を挟んだものと挟まないものとで差が生じはじめるが,約5 minまでは断熱材厚さが0.5 cmと5 cmとの両者の間には



用いただけで、空調機器起動時における初期 60 min の壁体への放熱量は、37 %減になることがわかる。また、断熱材の厚さをさらに 1 cm、5 cmと厚くすると壁への放熱量は44 %減、57 %減と少なくなるが、5 cm以上に断熱材を厚くしても初期放熱量の低減にはあまり効果がない。

5. 結 言

多層壁の断熱性能を検討するため、非定常熱伝導問題として多層平板の伝達関数を求め、これを用いて外気温が周期的に変動した場合の周波数応答および空調機器起動時を想定して室内 温度が急変したときのステップ応答を計算した結果、次の結論を得た。

- 1) 周期 200h 以上の外気温変動に対する壁体内部温度変化は準定常的変化とみなすことができる。
- 2)鉄筋コンクリート壁が20cm以上の場合,内側に5cm以上の断熱材を用いれば,室内壁表面温度の変動は8%程度となり,室内負荷に対する壁からの外気温度の日周変動の影響を無視することができる。したがって,壁からの損失熱量の評価は各季節の平均外気温に基づけばよい。
- 3)空調機器の運転開始初期における壁からの損失熱量は,5cmの断熱材を用いると断熱材を 用いない場合に比べて約1/2になる。断熱材の厚さをそれ以上にしても空調機起動時の壁か らの損失熱量の低減に対しては影響がない。

参考文献

- C.O. Mackey and L.T. Wright: Periodic Heat Flow-Composite Walls or Roofs, ASHRAE Trans., Vol.52, 1946
- L.A. Pipes: Matrix Analysis of Heat Trensfer Problems, J.Franklin Institute, Vol.263 №3, March 1957, p.195
- 3) H.H. Carslaw and J.C. Jeager: Conduction of Heat in Solids, 2nd ed., Oxford University Press, 1957
- 4) D.G. Stephenson and G.P. Mitalas: Cooling Load Calculations by Thermal Response Factor Method, ASHRAE Trans., Vol.73, 1967
- 5) G.P. Mitalas and D.G. Stephenson: Room Response Factors, ASHRAE Trans., Vol.73, 1976
- 6) G.P. Mitalas: Calculation of Transient Heat Flow through Walls and Roofs, ASHRAE Trans., Vol.74, Part II, 1968
- 7) K. Kimura and D.G. Stephenson: Theoretical Study of Cooling Load Caused by Lights, ASHRAE Trans., Vol.74, Part II, 1968
- 8) G.P. Mitalas: An Experimental Check on the Weighting Factor Method of Calculating Room Cooling Load, ASHRAE Trans., Vol.75, Part II, 1969
- 9) D.G. Stephenson and G.P. Mitalas: Calculation of Heat Conduction Transfer Functions for Multi-Layer Slabs, ASHRAE Trans., Vol.77, Part II, 1971
- 10) K. Kimura: Simulation of Cooling and Heating Loads under Intermittent Operating of Air Conditioning, ASHRAE Trans., Vol.78, Part I , 1972
- 11) G.P. Mitalas: Transfer Function Method of Calculating Cooling Load, Heat Extraction & Space Temperature, ASHRAE Journal Dec. 1972, p.54
- 12) K. Kusuda: Thermal Response Factors for Multi-Layer Structures of Various Heat Conduction Systems, ASHRAE Trans., Vol.75, Part I , 1969