

代用電荷法による数値等角写像

Numerical Conformal Mappings by the Charge Simulation Method

天野 要*

Kaname AMANO**

Conformal mappings are familiar in science and engineering. However, exact mapping functions are not known except for some special domains. Therefore, numerical conformal mappings have been studied for decades, and those of multiply connected domains attract a renewed interest. This paper is an overview of the method of numerical conformal mappings by the charge simulation method, which gives approximate mapping functions of simple form and high accuracy.

Key words : numerical conformal mapping, charge simulation method, method of fundamental solution

1 緒言

等角写像は関数論の基本的な問題の一つであり、理工学への応用も広い[1, 16, 18]. しかし、その写像関数を厳密に記述できる場合は限られていて、精度と効率よく近似計算することも決して簡単ではない。それ故、数値等角写像は数値解析と科学技術計算の重要課題として長く研究されてきた[13, 14, 15, 19, 27].

数値等角写像の方法は与えられた問題領域から標準領域への写像を求める方法と、逆に標準領域から問題領域への写像を求める方法とに大別され、いずれの場合も境界対応関数を未知量として積分方程式に帰着されることが多い。一般に、前者は線形で、Symmの積分方程式法[24, 25, 26]が著名である。後者は非線形で、数値計算には様々な反復法が用いられる。

近年、多重連結領域の問題があらためて注目されている。多重連結領域では等角写像の存在は領域の多重度 n と $3n-6$ ($n \geq 3$) 個のモジュラスと呼ばれる保存量が一致する領域間に限られる。そこで、領域の幾何学的な形状に着目し、多重度とモジュラスに依存しない正準領域を設定するという方法がとられる。正準領域はスリットを伴うことが多く、Nehari [21] 等の (a) 平行スリット領域、(b) 円弧スリット領域、(c) 放射スリット領域、(d) 円弧スリット円板領域、(e) 円弧スリット円環領域が広く知られている。遡って、Koebe [17] はこれらを含む 39 種の正準スリット領域を挙げている。

1980年代の半ば、著者は数値等角写像にポテンシャル問題の半解析的数値解法として知られていた代用電荷法を適用した[2]。その方法は、原理と計算が簡単で、多重連結領域の問題にも容易に適用できて、一定の条件下では簡潔で精度の高い近似写像関数を具体的に与える。この性質は関数論の成果がそのまま利用できるという意味で等角写像の応用上も重要である。

ここでは代用電荷法による数値等角写像について概説する。論文の構成は次のとおりである。第2章では、代用電荷法の原理と数値等角写像との関連を記す[12]。第3章では、最も基本的な単連結領域の内部問題であるリーマン写像を扱う[2, 3]。第4章では、典型的な多重連結領域の外部問題として平行、円弧、放射スリット領域への等角写像を扱う[9]。第5章では、これまでの経緯と謝辞を記して結びとする。

* 〒790-8577 松山市文京町3番 愛媛大学大学院理工学研究科

** Graduate School of Science and Engineering, Ehime University, 3 Bunkyo-cho, Matsuyama 790-8577, Japan

原稿受理 平成25年10月31日

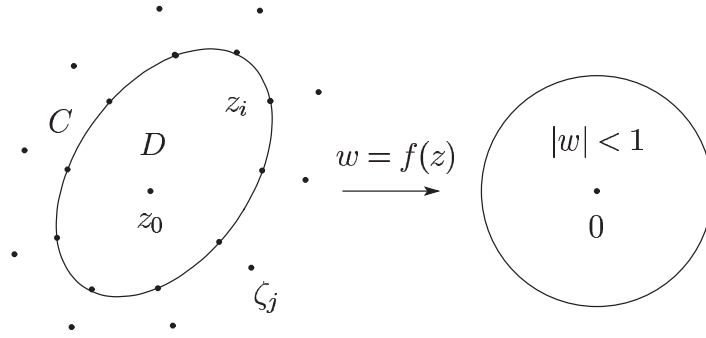


図 1: 代用電荷法と単位円板領域への等角写像 (z_i と ζ_j は拘束点と電荷点)

2 代用電荷法の原理

図 1 のように, $z = x + iy$ 平面上に与えられた単純閉曲線 C で囲まれた領域を D として, 2次元ラプラス方程式のディリクレ問題

$$\Delta g(z) = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0, \quad z \in D, \quad (1)$$

$$g(z) = b(z), \quad z \in C \quad (2)$$

を考える. この $b(z)$ は境界値である. 複素平面を実平面と同一視して $g(x, y)$ を $g(z)$, $b(x, y)$ を $b(z)$ と記している.

代用電荷法 [20, 22] では, D の外部に電荷点 $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_N$ をとり, 近似解を基本解である対数ポテンシャルの 1 次結合で

$$g(z) \simeq G(z) = \sum_{j=1}^N Q_j \log |z - \zeta_j| \quad (3)$$

と表現する. 未定係数である電荷 Q_1, Q_2, \dots, Q_N は C 上に配置した拘束点 z_1, z_2, \dots, z_N で境界条件 (2) を満たすように N 元連立 1 次方程式 (拘束条件)

$$\sum_{j=1}^N Q_j \log |z_i - \zeta_j| = b(z_i), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (4)$$

を解いて定める. 近似解 (3) は厳密にラプラス方程式を満たす. したがって, 調和関数の最大値原理から, 誤差は境界上で最大値をとり

$$\epsilon(z) = |G(z) - g(z)| \leq \max_{z \in C} |G(z) - b(z)| \quad (5)$$

となる. この方法は原理と計算が簡単で, 高い精度を与える. 一定の条件下では, N に依存しない正定数 α と $\tau < 1$ が存在して, 最大誤差は

$$\epsilon < \alpha \tau^N \quad (6)$$

となることが知られている [22]. この性質は誤差の指数的減少と呼ばれ, N を倍増すれば計算精度の桁数が倍増するという誤差の急速な減少をもたらすことを意味する.

なお, 代用電荷法の計算精度は拘束点と電荷点の配置に依存する. 次の方法は簡単で, 様々な形状の領域に対して良い配置を与える [12]. まず境界上に拘束点 z_1, z_2, \dots, z_N を反時計回りに配置し, 次いで電荷点を

$$\zeta_j = z_j + iq(z_{j+1} - z_{j-1}), \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (z_0 = z_N, z_{N+1} = z_1) \quad (7)$$

と配置する. この $q > 0$ は配置のパラメータで, 複号は内部問題で $-$, 外部問題で $+$ にとる.

数値等角写像では, 写像関数 $f(z)$ を求める問題を標準領域の幾何学的形状に着目した境界条件を満たす調和関数 $g(z)$ とその共役調和関数 $h(z)$ を求める問題に帰着させる. 前者を (3) で近似すれば, 後者は定数分の任意性を除いて

$$h(z) \simeq H(z) = \sum_{j=1}^N Q_j \arg(z - \zeta_j) + c \quad (8)$$

と自然に定まる. この方法は様々な等角写像の問題に適用することができる.

3 単連結領域の数値等角写像

図 1 の等角写像を考える. 次の定理はリーマンの写像定理として知られている [1, 15, 21, 28].

定理 1 単連結領域 D から単位円板領域 $|w| < 1$ への等角写像 $w = f(z)$ は, D 内の任意の 1 点を z_0 として, 正規化条件

$$f(z_0) = 0, \quad f'(z_0) > 0 \quad (9)$$

の下に一意に定まる.

この写像関数を

$$f(z) = (z - z_0) \exp[g(z) + ih(z)] \quad (10)$$

と表現する. 条件 $f(z_0) = 0$ は自然に満たされる. 調和関数対 $g(z)$ と $h(z)$ は次の条件を満たさなければならない.

(1) 境界条件 閉曲線 C が単位円 $|f(z)| = 1$ に移ることから, $g(z)$ の境界条件は

$$g(z) = -\log|z - z_0|, \quad z \in C \quad (11)$$

となる.

(2) 正規化条件 $f'(z_0) = \exp[g(z_0) + ih(z_0)] > 0$ は

$$h(z_0) = 0 \quad (12)$$

を意味する.

等角写像の存在と一意性から, 問題はこのような 1 対の調和関数 $g(z)$ と $h(z)$ を求めることに帰着する.

代用電荷法を適用して, 境界条件 (11) を用いて連立 1 次方程式 (4) を解けば (3) の形で $G(z)$ が求まる. その共役調和関数 $H(z)$ は定数分の任意性を除いて (8) の形で自然に定まる. 後者の定数 c も正規化条件 (12) に対応して

$$H(z_0) = \sum_{j=1}^N Q_j \arg(z_0 - \zeta_j) + c = 0$$

で定まり, したがって

$$H(z) = \sum_{j=1}^N Q_j \arg(z - \zeta_j) - \sum_{j=1}^N Q_j \arg(z_0 - \zeta_j) = \sum_{j=1}^N Q_j \arg \frac{z - \zeta_j}{z_0 - \zeta_j} \quad (13)$$

となる. 次のスキームが得られる [2].

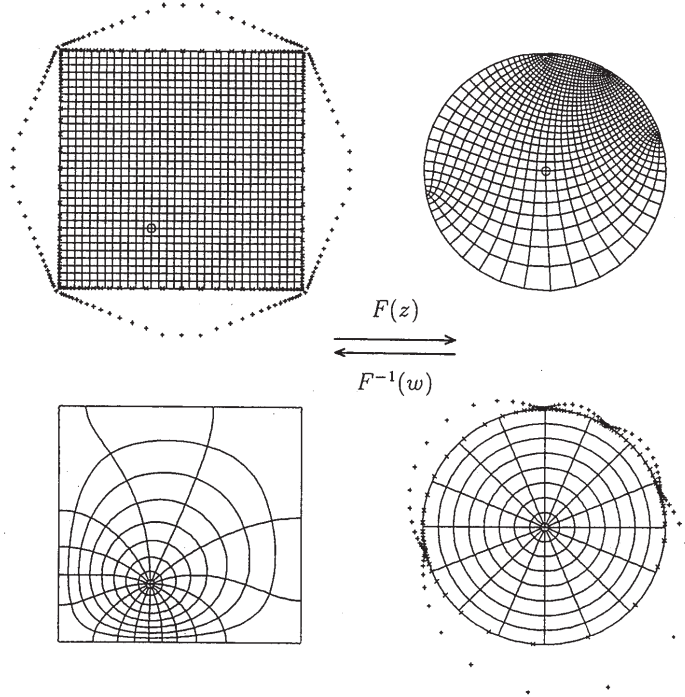


図 2: リーマン写像と逆写像の計算例

スキーム 1 近似写像関数を

$$F(z) = (z - z_0) \exp[G(z) + iH(z)], \quad (14)$$

$$G(z) + iH(z) = \sum_{j=1}^N Q_j \left(\log |z - \zeta_j| + i \arg \frac{z - \zeta_j}{z_0 - \zeta_j} \right) \quad (15)$$

と表現すれば、未定係数 Q_1, Q_2, \dots, Q_N は N 元連立 1 次方程式

$$\sum_{j=1}^N Q_j \log |z_i - \zeta_j| = -\log |z_i - z_0|, \quad z_i \in C, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (16)$$

を解いて定まる。

なお、複素対数関数の数値計算には注意が必要である。このスキームは閉曲線 C が星形であれば主値を用いて連続な近似写像関数を与えている（連続スキームと呼ぶ）。

例 1 正方形領域 $|x| < 1, |y| < 1$ を D , $z_0 = -0.25 - 0.5i$ とする。

図 2 上は問題領域 D から単位円板領域への数値等角写像 $w = F(z)$ の結果を矩形格子で表現している。角点は $f'(z) = 0$ となる特異点（臨界点）で、ここでは写像は等角にならない。拘束点と電荷点は角点近くで密になるように、さらに電荷点は境界近くになるように配置している。

こうして得られた拘束点 z_i と像 $w_i = F(z_i)$ の対応関係を利用し、 w 平面上で再び代用電荷法を適用して図 2 下のような近似逆写像関数 $z = F^{-1}(w)$ を構成することができる [3]。この電荷点配置には式 (7) を用いている。左下の図は、例えば平行な導線と矩形導波管の間の等電位面と電気力線を表現している。

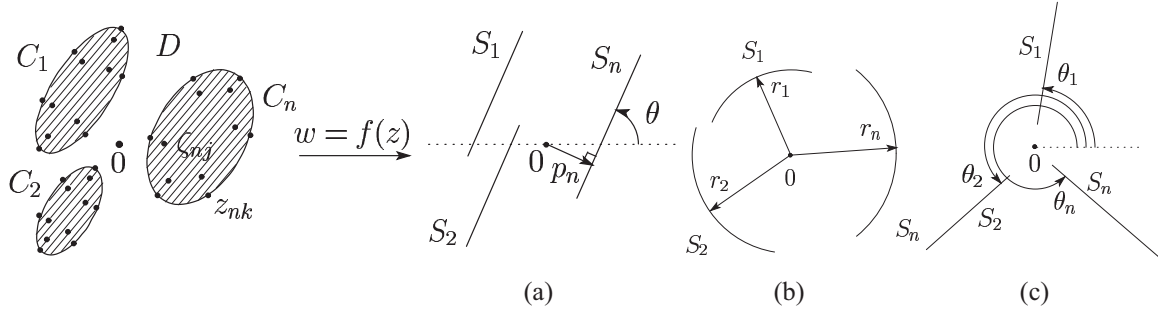


図 3: 非有界な多重連結領域から (a) 平行, (b) 円弧, (c) 放射スリット領域への等角写像

4 多重連結領域の数値等角写像

図 3 のように, z 平面上の単純閉曲線 C_1, C_2, \dots, C_n の外側の無限遠点を含む非有界な n 重連結領域 D から, w 平面上の (a) 平行スリット領域, (b) 円弧スリット領域, (c) 放射スリット領域 (無限遠点を含み, それぞれの形状のスリットを伴う複素平面の全体) への等角写像 $w = f(z)$ を考える. 閉曲線 C_1, C_2, \dots, C_n はそれぞれスリット S_1, S_2, \dots, S_n に移るとする.

4.1 平行スリット領域

定理 2 スリットが実軸となす角 θ を任意に指定して, 領域 D から平行スリット領域への等角写像 $w = f_\theta(z)$ は $f_\theta(\infty) = \infty$, $z = \infty$ を中心とするローラン級数が

$$f_\theta(z) = z + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots \quad (17)$$

の形になるという正規化条件の下に一意に定まる [21, 28].

この写像関数を

$$f_\theta(z) = z + ie^{i\theta} a(z), \quad a(z) = g(z) + ih(z) \quad (18)$$

と表現する. 解析関数 $a(z)$ すなわち調和関数対 $g(z)$ と $h(z)$ は次の条件を満たさなければならない.

(1) 正規化条件 ローラン級数 (17) から

$$\lim_{z \rightarrow \infty} (f_\theta(z) - z) = 0, \quad \text{i.e.,} \quad a(\infty) = 0 \quad (19)$$

でなければならない.

(2) 境界条件 閉曲線 C_1, C_2, \dots, C_n が角 θ の平行スリット S_1, S_2, \dots, S_n に移ることから

$$\text{Im}(e^{-i\theta} f_\theta(z)) = p_m, \quad \text{i.e.,} \quad g(z) - p_m = -\text{Im}(e^{-i\theta} z), \quad (20)$$

$$z \in C_m, \quad m = 1, 2, \dots, n$$

でなければならない. この p_m は原点 $w = 0$ からスリット S_m を含む直線に下した垂線の符号付き長さを意味する未知の定数である.

こうして問題は (19) と (20) を満たす関数 $a(z) = g(z) + ih(z)$ を定数 p_m とともに求めることに帰着する. 代用電荷法を用いて, $a(z)$ を複素対数関数の 1 次結合で

$$a(z) \simeq A(z) = G(z) + iH(z) = Q_0 + \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^{N_l} Q_{lj} \log(z - \zeta_{lj}) \quad (21)$$

と近似する. この Q_0 は未知の複素定数で Q_{lj} は電荷である. 電荷点 ζ_{lj} は D の外部すなわち C_l の内側に配置する. この近似関数に次の3条件を課す.

(1) 1価性条件 近似関数 (21) は一般的には無限多価である. これが1価であるための必要十分条件は C_1, C_2, \dots, C_n に対して

$$\int_{C_l} dA(z) = i \int_{C_l} d \sum_{m=1}^n \sum_{j=1}^{N_m} Q_{mj} \arg(z - \zeta_{mj}) = 2\pi i \sum_{j=1}^{N_l} Q_{lj} = 0$$

すなわち

$$\sum_{j=1}^{N_l} Q_{lj} = 0, \quad l = 1, 2, \dots, n \quad (22)$$

である.

(2) 正規化条件 条件 (22) の下, (19) と同様に条件

$$A(\infty) = Q_0 + \lim_{z \rightarrow \infty} \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^{N_l} Q_{lj} \log(z - \zeta_{lj}) = 0$$

を課して $Q_0 = 0$, したがって

$$A(z) = \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^{N_l} Q_{lj} \log(z - \zeta_{lj}) \quad (23)$$

となる.

(3) 拘束条件 C_m 上に電荷と同数の拘束点 z_{mk} を配置し, ここで $A(z)$ に境界条件 (20) を課して

$$\sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^{N_l} Q_{lj} \log |z_{mk} - \zeta_{lj}| - P_m = -\text{Im}(e^{-i\theta} z_{mk}),$$

$$z_{mk} \in C_m, \quad k = 1, 2, \dots, N_m, \quad m = 1, 2, \dots, n \quad (24)$$

を得る. P_m は p_m の近似である.

式 (22) と (24) は Q_{lj} と P_m に関する $N_1 + \dots + N_n + n$ 元連立1次方程式を構成する. これを解いて Q_{lj} と P_m が求まれば, (23) から $A(z)$ が定まり, その $A(z)$ を (18) に代入して近似写像関数 $F_\theta(z) \simeq f_\theta(z)$ が得られる.

4.2 円弧スリット領域

定理3 領域 D 内の任意の1点を z_0 として, D から円弧スリット領域への等角写像 $w = f_c(z)$ は $f_c(z_0) = 0$, $f_c(\infty) = \infty$ かつ $z = \infty$ を中心とするローラン級数が

$$f_c(z) = z + b_0 + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \dots \quad (25)$$

の形になるという正規化条件の下に一意に定まる [21, 28].

この写像関数を

$$f_c(z) = (z - z_0) \exp a(z), \quad a(z) = g(z) + ih(z) \quad (26)$$

と表現する. 解析関数 $a(z)$ すなわち調和関数対 $g(z)$ と $h(z)$ は次の条件を満たさなければならない.

(1) 正規化条件 ローラン級数 (25) から

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{f_c(z)}{z} = 1, \quad \text{i.e.,} \quad a(\infty) = 0 \quad (27)$$

でなければならない.

(2) 境界条件 閉曲線 C_1, C_2, \dots, C_n が半径 r_1, r_2, \dots, r_n の円弧スリット S_1, S_2, \dots, S_n に移ることから

$$|f_c(z)| = r_m, \quad \text{i.e.,} \quad g(z) - \log r_m = -\log |z - z_0|, \\ z \in C_m, \quad m = 1, 2, \dots, n \quad (28)$$

でなければならない.

問題は (27) と (28) を満たす $a(z) = g(z) + ih(z)$ を定数 r_m とともに求めることに帰着する.

前節と同様に, 代用電荷法を用いて $a(z)$ を (21) で近似し, 1 価性条件 (22) と正規化条件 (23) を得る. 拘束条件は境界条件 (28) から

$$\sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^{N_l} Q_{lj} \log |z_{mk} - \zeta_{lj}| - \log R_m = -\log |z_{mk} - z_0|, \\ z_{mk} \in C_m, \quad k = 1, 2, \dots, N_m, \quad m = 1, 2, \dots, n \quad (29)$$

となる. R_m は r_m の近似である.

式 (22) と (29) は Q_{lj} と $\log R_m$ に関する連立 1 次方程式を構成する. これを解いて Q_{lj} と R_m が求まれば, (23) から $A(z)$ が定まり, その $A(z)$ を式 (26) に代入して近似写像関数 $F_c(z) \approx f_c(z)$ が得られる.

4.3 放射スリット領域

定理 4 (放射) 領域 D 内の任意の 1 点を z_0 として, D から放射スリット領域への等角写像 $w = f_r(z)$ は $f_r(z_0) = 0$, $f_r(\infty) = \infty$ かつ $z = \infty$ を中心とするローラン級数が

$$f_r(z) = z + c_0 + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \dots \quad (30)$$

の形になるという条件の下に一意に定まる [21, 28].

この写像関数を

$$f_c(z) = (z - z_0) \exp(ia(z)), \quad a(z) = g(z) + ih(z) \quad (31)$$

と表現する. 解析関数 $a(z)$ すなわち調和関数対 $g(z)$ と $h(z)$ は次の条件を満たさなければならない.

(1) 正規化条件 ローラン級数 (30) から

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{f_c(z)}{z} = 1, \quad \text{i.e.,} \quad a(\infty) = 0 \quad (32)$$

でなければならない.

(2) 境界条件 閉曲線 C_1, C_2, \dots, C_n が偏角 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ の放射スリット S_1, S_2, \dots, S_n に移ることから

$$\arg f_c(z) = \theta_m, \quad \text{i.e.,} \quad g(z) - \theta_m = -\arg(z - z_0), \\ z \in C_m, \quad m = 1, 2, \dots, n \quad (33)$$

でなければならない.

問題は (32) と (33) を満たす $a(z) = g(z) + ih(z)$ を定数 θ_m とともに求めることに帰着する.

前節と同様に, 代用電荷法を用いて $a(z)$ を (21) で近似し, 1 価性条件 (22) と正規化条件 (23) を得る. 拘束条件は境界条件 (33) から

$$\sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^{N_l} Q_{lj} \log |z_{mk} - \zeta_{lj}| - \theta_m = -\arg(z_{mk} - z_0), \\ z_{mk} \in C_m, \quad k = 1, 2, \dots, N_m, \quad m = 1, 2, \dots, n \quad (34)$$

となる. Θ_m は θ_m の近似である.

式 (22) と (34) は Q_{lj} と Θ_m に関する連立 1 次方程式を構成する. これを解いて Q_{lj} と Θ_m が求まれば, (23) から $A(z)$ が定まり, その $A(z)$ を (31) に代入して近似写像関数 $F_r(z) \approx f_t(z)$ が得られる.

4.4 統合連続スキームの構成と数値例

複素対数関数の数値計算に主値を用いると式 (23) の虚部の $\arg(z - \zeta_{lj})$ は半直線 $\{\zeta_{lj} - it \mid 0 \leq t < \infty\}$ 上に 2π の不連続を伴い, D で連続な写像関数を構成することはできない. そこで, 1 価性条件 (22) を用いて, (23) を

$$\begin{aligned} A(z) &= \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^{N_l} Q_{lj} \log(z - \zeta_{lj}) - \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^{N_l} Q_{lj} \log(z - \zeta_{l0}) \\ &= \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^{N_l} Q_{lj} \log \frac{z - \zeta_{lj}}{z - \zeta_{l0}} \end{aligned}$$

と変形する. この式は (23) と等価で, C_1, C_2, \dots, C_n がそれぞれの内側の 1 点 $\zeta_{10}, \zeta_{20}, \dots, \zeta_{n0}$ に対して星形であれば D で連続である.

以上を整理して, (a) 平行スリット領域, (b) 円弧スリット領域, (c) 放射スリット領域への統合的な数値等角写像の連続スキームを得ることができる.

スキーム 2 近似写像関数を

$$F_{\theta, c, r}(z) = \begin{cases} \text{平行} : z + ic^{i\theta} A(z) \\ \text{円弧} : z \exp A(z) \\ \text{放射} : z \exp(iA(z)) \end{cases}, \quad A(z) = \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^{N_l} Q_{lj} \log \frac{z - \zeta_{lj}}{z - \zeta_{l0}} \quad (35)$$

と表現すれば, 未定係数 Q_{lj} は定数 S_m とともに連立 1 次方程式

$$\sum_{j=1}^{N_l} Q_{lj} = 0, \quad (36)$$

$$l = 1, 2, \dots, n, \quad (37)$$

$$\sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^{N_l} Q_{lj} \log |z_{mk} - \zeta_{lj}| - S_m = -t_{mk},$$

$$z_{mk} \in C_m, \quad k = 1, 2, \dots, N_m, \quad m = 1, 2, \dots, n \quad (38)$$

を解いて定まる. ここに,

$$S_m = \begin{cases} \text{平行} : P_m \\ \text{円弧} : \log R_m, \\ \text{放射} : \Theta_m \end{cases}, \quad t_{mk} = \begin{cases} \text{Im}(e^{-i\theta} z_{mk}) \\ \log |z_{mk} - z_0| \\ \arg(z_{mk} - z_0) \end{cases} \quad (39)$$

である.

解くべき連立 1 次方程式の係数行列はいずれの問題でも同一である.

表 1: 誤差評価 ($N = 64$, $q = 0.8$, $\theta = \pi/3$, $\kappa = 4.7 \times 10^4$)

		$\epsilon_{F_{\theta l}}$	ϵ_{P_l}	P_l
(a) $F_{\theta}(z)$	C_1	5.2E-08	1.2E-08	-1.30820139
	C_2	2.6E-08	1.3E-08	1.17981520
	C_3	7.5E-08	4.5E-09	-0.135327009
		$\epsilon_{F_{cl}}$	ϵ_{R_l}	R_l
(b) $F_c(z)$	C_1	2.1E-07	1.8E-08	2.69585239
	C_2	3.9E-08	2.3E-08	2.91217882
	C_3	8.6E-05	6.2E-09	2.265373689
		$\epsilon_{F_{\theta l}}$	ϵ_{θ_l}	θ_l
(c) $F_r(z)$	C_1	6.7E-08	1.3E-08	-0.23582973
	C_2	2.1E-08	8.5E-08	2.246730504
	C_3	2.5E-05	4.9E-09	-2.005025898

例 2 3つの円

$$C_l: |z - \zeta_{l0}| = \rho_l, \quad \rho_1 = 1, \rho_2 = 0.5, \rho_3 = 1.5,$$

$$\zeta_{l0} = 2 \exp \frac{2(l-1)\pi i}{3}, \quad l = 1, 2, 3$$

の外側を D , $z_0=0$ とする.

拘束点と電荷点は

$$z_{lj} = \zeta_{l0} + \rho_l \exp \frac{2(j-1)\pi i}{N}, \quad \zeta_{lj} = \zeta_{l0} + q\rho_l \exp \frac{2(j-1)\pi i}{N},$$

$$j = 1, 2, \dots, N, \quad l = 1, 2, 3 \quad (40)$$

と配置する. $0 < q < 1$ は電荷配置のパラメータである. 誤差の指標としては

$$\epsilon_{F_{\theta l}} = \max_{z \in C_l} |\operatorname{Im}(e^{-i\theta} F_{\theta}(z)) - P_l|, \quad \epsilon_{P_l} = |P_l - P_l^{(2N)}|, \quad (41)$$

$$\epsilon_{F_{cl}} = \max_{z \in C_l} |F_c(z) - R_l|, \quad \epsilon_{R_l} = |R_l - R_l^{(2N)}|, \quad (42)$$

$$\epsilon_{F_{rl}} = \max_{z \in C_l} |\arg F_r(z) - \theta_l|, \quad \epsilon_{\theta_l} = |\theta_l - \theta_l^{(2N)}| \quad (43)$$

を用いる. これらの第 1 式は近似写像関数のスリットからのずれを意味し, その評価には C_l 上に一様に配置された $8N$ 個の点を用いる. $P_l^{(2N)}$, $R_l^{(2N)}$, $\theta_l^{(2N)}$ は $2N$ 個の電荷を用いた値である.

図 4 は問題領域 D から (a) 平行 ($\theta = \pi/3$), (b) 円弧, (c) 放射スリット領域への数値等角写像の結果である. 表 1 は誤差評価の一例で, κ は連立 1 次方程式の係数行列の L_1 条件数である. P_l , R_l , θ_l の値は (41), (42), (43) の右辺に非零の数字が現れた桁までを記している. $\epsilon_{F_{cl}}$ と $\epsilon_{F_{rl}}$ が C_3 上で比較的大きいのは $a(z)$ の境界条件 (28) と (33) が $z = z_0$ に持つ対数関数の特異性の影響である.

図 5 は円 C_1 , C_2 , C_3 を輪郭線とする円柱状の障害物を過ぎる (a) 一様流 ($\theta = \pi/3$), (b) 渦流, (c) 湧き出し流の流線をそれぞれの近似複素速度ポテンシャルの虚部 (a) $\operatorname{Im}(e^{-i\theta} F_{\theta}(z))$, (b) $\operatorname{Im}(-\log F_c(z))$, (c) $\operatorname{Im}(\log F_r(z))$ の等高線として描いたものである. 渦と湧き出しは原点 $z_0 = 0$ に存在する.

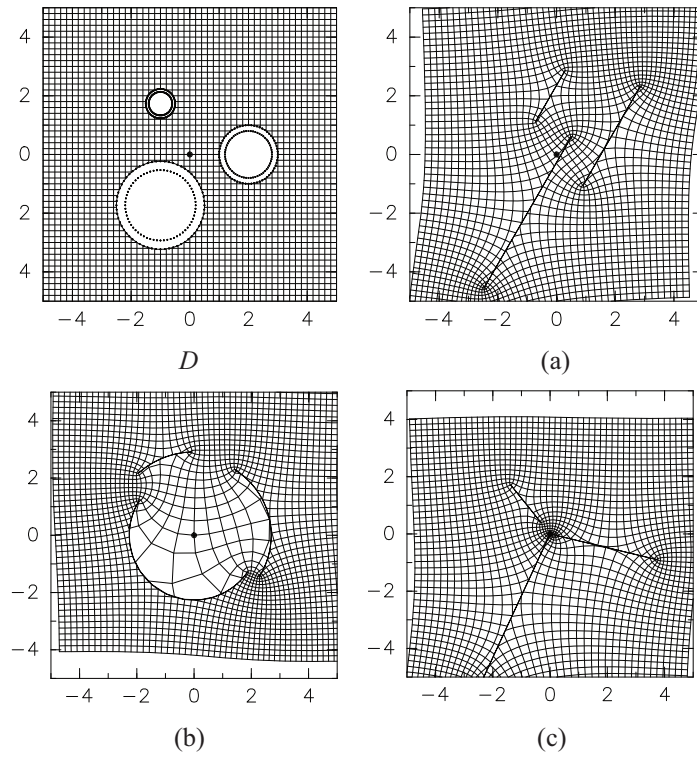


図 4: 非有界な 3 重連結領域 D から (a) 平行, (b) 円弧, (c) 放射スリット領域への数値等角写像

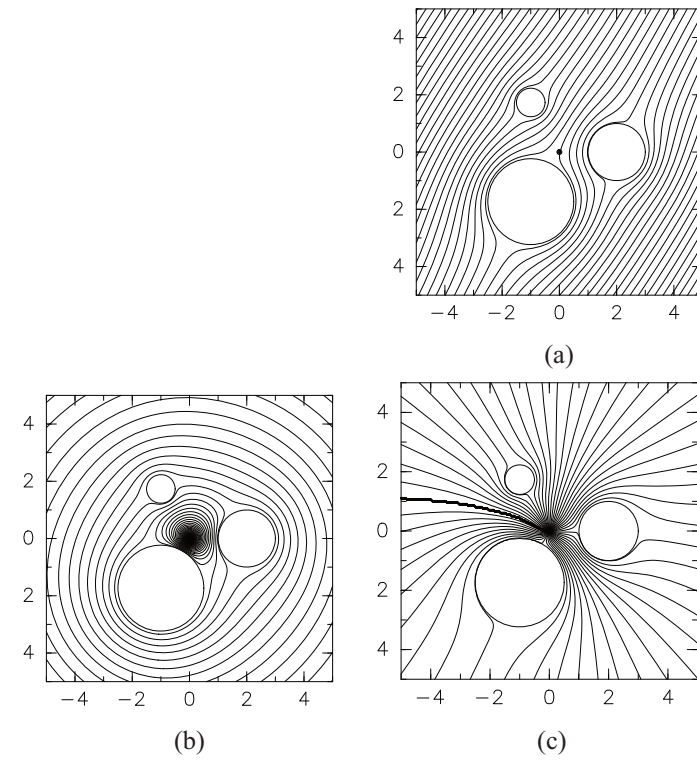


図 5: 円柱状の障害物を過ぎる (a) 一様流, (b) 渦流, (c) 湧き出し流

5 結言

領域の幾何学的な形状に着目して、等角写像の問題を調和関数の境界値問題とその共役調和関数の問題に帰着させ、前者に代用電荷法を適用すれば後者は自然に定まる。この方法はリーマン写像の問題 [2] に始まり、逆写像（すなわち標準領域から問題領域への等角写像）[3]、外部領域や2重連結領域の問題 [4]、さらに Nehari [21] 等の5種の正準スリット領域への問題 [5, 6, 7, 9, 23] に適用されて簡潔で精度の高い近似写像関数を与えた。最近では、Koebe [17] の円弧放射スリット領域、直交直線スリット領域、螺旋スリット領域等への近似写像関数をより一般的な形で構成することも可能になりつつある [8, 10, 11]。そこでは、代用電荷法は対数ポテンシャルの1次結合による調和関数の近似解法から、複素対数関数の1次結合による解析関数の直接的な近似解法に拡張された役割を果たしている。

なお、複素対数関数の数値計算には注意と工夫が必要である。例えば、スキーム1とスキーム2では境界閉曲線が星形であることを仮定した。また、放射スリット領域の問題では境界閉曲線と正規化点との位置関係によっては境界条件に不連続が現れる。これらの問題については説明を割愛した。

基本解の重ね合わせ法や数値等角写像の研究の歴史は長く、近年も活発に研究されている。代用電荷法による数値等角写像についても理論と応用の両面で今後の研究に期待すべき課題は多い。

謝辞 代用電荷法による数値等角写像の研究は愛媛大学赴任直後に故安倍 齋先生 (愛媛大学名誉教授) から紹介された Symm の積分方程式法 [24, 25, 26] にヒントを得たものです。以後、研究は4半世紀にわたって展開し、情報処理学会創立30周年記念論文賞 [3]、日本応用数理学会1996年度論文賞 [5]、情報処理学会創立40周年記念論文賞 [7] の受賞という幸運に恵まれ、科学研究費の継続的な支援も受けてきました。この間、同時にパターン認知の数心理学的研究にも取り組んできました。いずれの課題でも研究の過程では多くの方々のお世話になりました。個々にお名前を記すことはできませんが、あらためて感謝を申し上げます。

参考文献

- [1] 安倍 齋, 応用関数論, 森北出版, 東京, 1981.
- [2] 天野 要: 代用電荷法に基づく等角写像の数値計算法. 情報処理学会論文誌, **28** (1987), 697–704.
- [3] 天野 要: 代用電荷法に基づく双方向的な数値等角写像の方法. 情報処理, **31** (1990), 623–632.
- [4] Amano, K.: A charge simulation method for the numerical conformal mapping of interior, exterior and doubly-connected domains. *J. Comput. Appl. Math.*, **53** (1994), 353–370.
- [5] 天野 要: 代用電荷法による放射スリット領域への数値等角写像の方法. 日本応用数理学会論文誌, **5** (1995), 267–280.
- [6] Amano, K.: A charge simulation method for numerical conformal mapping onto circular and radial slit domains. *SIAM J. Sci. Comput.*, **19** (1998), 1169–1187.
- [7] 天野 要, 岡野 大, 緒方秀教, 下平博巳, 杉原正顕: 代用電荷法による非有界な多重連結領域の統一的な数値等角写像の方法. 情報処理学会論文誌 **42**, 385–395 (2001).
- [8] Amano, K. and Okano, D.: A circular and radial slit mapping of unbounded multiply connected domains. *JSIAM Letters*, **2** (2010), 53–56.
- [9] Amano, K. and Okano, D.: Numerical conformal mappings onto the canonical slit domains. *Theoretical and Applied Mechanics Japan*, **60** (2012), 317–332.

- [10] Amano, K., Okano, D., Ogata, H. and Sugihara, M.: Numerical conformal mappings onto the linear slit domain. *Japan J. Indust. Appl. Math.*, **29** (2012), 165–186.
- [11] 天野 要, 岡野 大, 遠藤慶一, 緒方秀教: 代用電荷法による Koebe (1916) の正準スリット領域への数値等角写像. 日本応用数理学会環瀬戸内応用数理研究部会第 16 回シンポジウム講演予稿集, (2013), 58–61.
- [12] 天野 要, 岡野 大: 代用電荷法. 薩摩順吉, 大石進一, 杉原正顕 (編集): 応用数理ハンドブック, 朝倉書店 (印刷中)
- [13] Driscoll, T.A. and Trefethen, L.N.: *Schwarz-Christoffel Mapping*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [14] Gaier, D.: *Konstruktive Methoden der konformen Abbildung*, Springer, Berlin, 1964.
- [15] Henrici, P.: *Applied and Computational Complex Analysis* **3**, John Wiley & Sons, New york, 1986.
- [16] 今井 功: 複素解析と流体力学, 日本評論社, 東京, 1989.
- [17] Koebe, P.: *Abhandlungen zur Theorie der konformen Abbildung IV, Abbildung mehrfach zusammenhängender schlichter Bereiche auf Schlitzbereiche*. *Acta Math.*, **41** (1916), 305–344.
- [18] Kreyszig, E.: *Advanced Engineering Mathematics*, 8th ed. John Wiley & Sons, New york, 1999.
- [19] Kythe, P.K.: *Computational Conformal Mapping*, Birkhäuser, Boston, 1998.
- [20] 村島定行: 代用電荷法とその応用, 森北出版, 東京, 1983.
- [21] Nehari, Z.: *Conformal Mapping*, McGraw-Hill, New york, 1952.
- [22] 岡本 久, 桂田祐史: ポテンシャル問題の高速解法, *応用数理*, **2** (1992), 212–230.
- [23] Okano, D., Ogata, H., Amano, K. and Sugihara, M.: Numerical conformal mappings of bounded multiply connected domains by the charge simulation method. *J. Comput. Appl. Math.*, **159** (2003), 109–117.
- [24] Symm, G.T.: An integral equation method in conformal mapping, *Numer. Math.*, **9** (1966), 250–258.
- [25] Symm, G.T.: Numerical mapping of exterior domains, *Numer. Math.*, **10** (1967), 437–445.
- [26] Symm, G.T.: Conformal mapping of doubly-connected domains, *Numer. Math.*, **13** (1969), 448–457. (1969)
- [27] Trefethen, L.N., (ed.): *Numerical Conformal Mapping*, North-Holland, Amsterdam, 1986.
- [28] Wen, G.-C.: *Conformal Mappings and Boundary Value Problems*. Amer. Math. Soc., Providence, 1992.