



【花山金次郎の算額の問題】

図 2.2 のように、直線上にある正三角形を 2 本の線分で分けた三角形に内接する等円が 3 個あり、直線と正三角形及び線分を延長した直線に接する外円 1 個がある。正三角形の 1 辺の長さが 20 寸のとき、外円の直径の長さを求めよ。

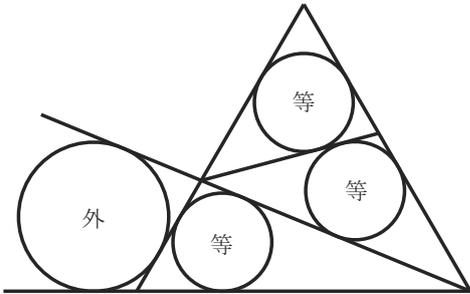


図 2.2: 花山金次郎の問題

【現代解】

この問題の本質的な部分は正三角形内の 3 等円の半径を求めるところにある。そのためどのよう連立方程式を立てるかに工夫が必要である。

図 2.3 のように、正三角形を  $\triangle ABC$ 、2 本の線分を DC、DE、3 個の等円の中心を  $O_1$ 、 $O_2$ 、 $O_3$  とし、その半径を  $r$  とする。4 線分 AB、AD、AE、DC の長さをそれぞれ  $a$ 、 $b$ 、 $c$ 、 $d$  とする。

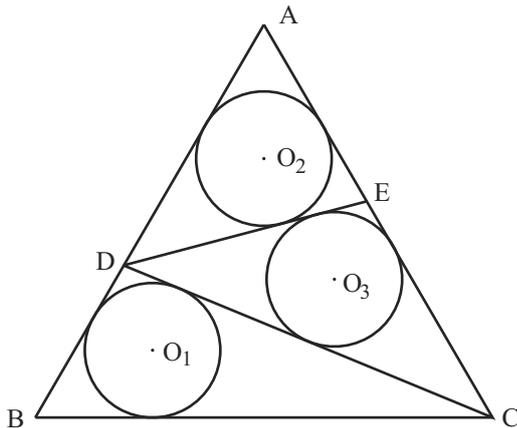


図 2.3: 正三角形内の 3 等円

最初に等円の半径  $r$  を求めるために必要な条件を探し出してみる。 $\triangle ADC$  に余弦定理を用いると、

$$d^2 = a^2 - ab + b^2 \tag{2.1}$$

である。 $\triangle DBC$  と内接円  $O_1$  に対して補助定理 1 を用いると、

$$d = 2a - b - 2\sqrt{3}r \tag{2.2}$$

である。 $\triangle ADC$  の内接円の半径を  $R$  とするとき、補助定理 1 により、

$$R = \frac{a+b-d}{2\sqrt{3}} = \frac{-a+2b+2\sqrt{3}r}{2\sqrt{3}} \tag{2.3}$$

である。 $\triangle ADC$  に対して、点 D から辺 AC に引いた垂線の長さ  $h$  は

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}b \tag{2.4}$$

である。 $\triangle ADC$  に補助定理 2 を用いることにより、

$$2hr - 2r^2 - hR = 0 \tag{2.5}$$

である。この補助定理 2 は和算家が編み出した重要な公式で、この公式を用いることで後の計算が簡潔になる。

それでは、これら 5 つの関係式 (2.1)~(2.5) を用いて、正三角形の 1 辺の長さ  $a$  と等円の半径  $r$  の関係式を導いてみる。最初に (2.1) に (2.2) を代入して  $d$  を消去し整理すると、

$$3a^2 - 3ab - 8\sqrt{3}ar + 4\sqrt{3}br + 12r^2 = 0$$

となる。これを  $b$  について解くと、

$$b = \frac{\sqrt{3}a^2 - 8ar + 4\sqrt{3}r^2}{\sqrt{3}a - 4r} = a - \frac{4r(\sqrt{3}r - a)}{4r - \sqrt{3}a} \tag{2.6}$$

となる。ここで、 $BD = a - b = \frac{4r(\sqrt{3}r - a)}{4r - \sqrt{3}a}$  であることに注意。続いて、(2.3) と (2.4) を (2.5) に代入し整理すると、

$$ab - 2b^2 + 2\sqrt{3}br - 8r^2 = 0$$

となり、これに (2.6) を代入して分母を払い整理すると、

$$3a^4 - 26\sqrt{3}a^3r + 228a^2r^2 - 264\sqrt{3}ar^3 + 320r^4 = 0 \tag{2.7}$$

を得る。これで  $a$  と  $r$  の関係式を求めることができた。

この 4 方程式を解けばよいのであるが、その前に  $\sqrt{3}$  を消去し、もう少し簡単な式に変形する。式 (2.7) に  $r =$

$\frac{\sqrt{3}}{6}at$  を代入して整理すると、整係数の方程式

$$20t^4 - 99t^3 + 171t^2 - 117t + 27 = 0 \quad (2.8)$$

を得る。これは算額の「術曰」に述べられている4次方程式と一致する。算額ではこの方程式から直接  $t$  を数値計算で求めているようである。しかし、 $t = \frac{3}{4}$  がこの4次方程式は1つの解であることに気づけば、さらに次のように因数分解できる。

$$(4t - 3)(5t^3 - 21t^2 + 27t - 9) = 0$$

ここで、 $t = \frac{3}{4}$  のとき、 $r = \frac{\sqrt{3}}{8}a$ 、 $b = \frac{3}{8}a < \frac{1}{2}a$  となり題意を満たさない。従って3次方程式

$$5t^3 - 21t^2 + 27t - 9 = 0 \quad (2.9)$$

を解かなければならないことになる。この3次方程式の正確な解の値（補定理3）は3次方程式のカルダノの公式で求めることができる。ここでは方程式(2.9)の唯一の実解を  $t = t_1$  とおく。この値を用いると、 $r = \frac{\sqrt{3}}{6}at_1$ 、 $BD = \frac{4r(\sqrt{3}r-a)}{4r-\sqrt{3}a} = \frac{t_1(2-t_1)}{3-2t_1}a$  となる。

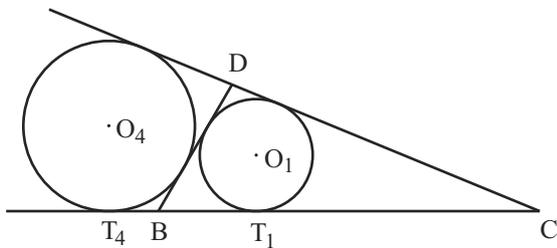


図 2.4: 外円を求める

最後に、外円の半径を計算しよう。外円の中心を  $O_4$  とし、その半径を  $r_4$  とする。また、直線  $BC$  と2円  $O_1$ 、 $O_4$  の接点をそれぞれ  $T_1$ 、 $T_4$  とする。このとき、 $\triangle O_4T_4C \sim \triangle O_1T_1C$  であることにより、 $O_4T_4 : O_1T_1 = T_4C : T_1C$  である。また、補定理4よ

り  $T_4T_1 = BD$  である。従って、

$$\begin{aligned} r_4 &= r \frac{T_4C}{T_1C} = r \left( 1 + \frac{T_4T_1}{T_1C} \right) \\ &= r \left( 1 + \frac{BD}{BC - BT_1} \right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{6}at_1 \left( 1 + \frac{\frac{t_1(2-t_1)}{3-2t_1}a}{a - \frac{1}{2}at_1} \right) \end{aligned}$$

となり、これを整理すると、

$$r_4 = \frac{\sqrt{3}t_1}{2(3-2t_1)}a \quad (2.10)$$

である。

#### 【算額の解】

正三角形の一辺の長さ  $a = 20$  と3次方程式(2.9)の解の近似値  $t_1 = 0.513055$  を代入すると、 $r_4 = 4.05196$  となり、外円の直径は  $2r_4 = 9.00393$  である。これは、算額の答曰の「九寸零零有奇」と一致する。

**補定理1**  $\angle C$  が  $60^\circ$  である  $\triangle ABC$  の内接円  $O$  の半径を  $r$  とする。辺  $BC$ 、 $CA$ 、 $AB$  の長さをそれぞれ  $a$ 、 $b$ 、 $c$  とするとき、次の関係式が成り立つ。

$$2\sqrt{3}r = a + b - c$$

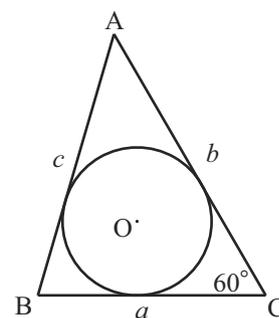


図 2.5: 補定理1

(証明) 内接円  $O$  と3辺  $BC$ 、 $CA$ 、 $AB$  との接点をそれぞれ  $D$ 、 $E$ 、 $F$  とする。このとき、 $\triangle ODC$  は直角三角形で  $\angle OCD = 30^\circ$  なので、 $CD = \sqrt{3}r$  である。また、 $2CD = CD + CE = BC - BD + AC - AE = BC - BF + AC - AF =$

$BC + AC - AB = a + b - c$  より、

$$2\sqrt{3}r = a + b - c$$

となる。

**補助定理 2** 図 2.6 のように 3 円  $O_1, O_2, O_3$  はそれぞれ  $\triangle ABC, \triangle ABP, \triangle APC$  の内接円とする。また、頂点 A から辺 BC に下ろした垂線の足を H とする。このとき、円  $O_1, O_2, O_3$  の半径をそれぞれ  $r_1, r_2, r_3$  とし、 $AH = h$  とするとき、

$$h(r_2 + r_3 - r_1) - 2r_2r_3 = 0$$

である。

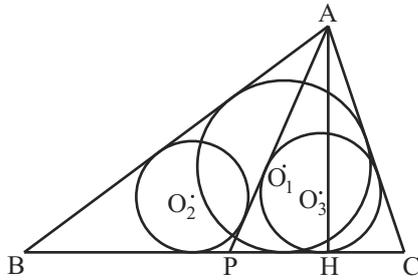


図 2.6: 補助定理 2

この補助定理は和算の公式集『算法助術』[1]の公式 57 である。

(証明) 図 2.7 のように、3 辺 BC, CA, AB の長さをそれぞれ  $a, b, c$  とし、 $s = (a + b + c)/2$  とする。また、内接円  $O_1$  が 3 辺 BC, CA, AB と接する点をそれぞれ  $D_1, E_1, F_1$  とし、 $AF_1 = \alpha, BD_1 = \beta, CE_1 = \gamma$  とする。このとき、

$$\beta = s - b, \quad \gamma = s - a \quad (2.11)$$

である。

次に、図 2.8 のように、辺 BC と 2 円  $O_2, O_3$  の接点をそれぞれ  $D_2, D_3$  とする。 $\triangle O_1BD_1$  と  $\triangle O_2BD_2$  は相似なので、 $BD_1 : BD_2 = \beta : BD_2 = r_1 : r_2$ 、同様に  $CD_1 : CD_3 = \gamma : CD_3 = r_1 : r_3$  となる。従って、

$$BD_2 = \frac{r_2(s - b)}{r_1}, \quad CD_3 = \frac{r_3(s - c)}{r_1} \quad (2.12)$$

である。

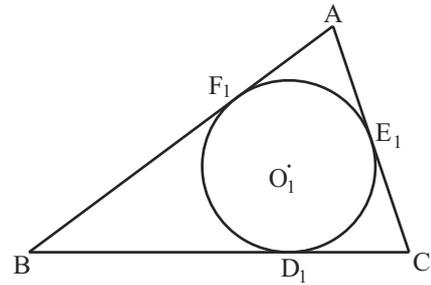


図 2.7: 内接円  $O_1$

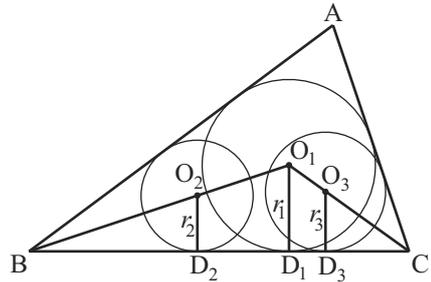


図 2.8: 半径の比

さらに、図 2.9 のように、円  $O_2$  が AB, AP と接する点をそれぞれ  $F_2, G_2$  とし、円  $O_3$  が AC, AP と接する点をそれぞれ  $E_3, G_3$  とする。このとき、 $\triangle ABP$  の面積は、 $\triangle ABP = \frac{r_2}{2}(AB + BP + PA) = \frac{r_2}{2}(AB + BP + PG_3 + AG_3) = \frac{r_2}{2}(AB + BP + PD_3 + AE_3) = \frac{r_2}{2}(AB + BD_3 + AE_3) = \frac{r_2}{2}(AB + BC - CD_3 + CA - CE_3) = \frac{r_2}{2}(a + b + c - 2CD_3) = r_2(s - CD_3)$  である。 $\triangle APC$  の面積についても同様である。従って、

$$\triangle ABP = r_2(s - CD_3), \triangle APC = r_3(s - BD_2) \quad (2.13)$$

となる。ここで、式 (2.12) を代入すると、

$$\triangle ABP = r_2s - \frac{r_2r_3(s - c)}{r_1}, \triangle APC = r_3s - \frac{r_2r_3(s - b)}{r_1} \quad (2.14)$$

である。

最後に、 $\triangle ABP + \triangle APC = \triangle ABC = \frac{1}{2}ah$  なので、

$$(r_2 + r_3)s - \frac{r_2r_3(2s - b - c)}{r_1} = \frac{1}{2}ah$$

$$(r_2 + r_3)s - \frac{ar_2r_3}{r_1} = \frac{1}{2}ah$$

$$(r_2 + r_3)r_1s - ar_2r_3 - \frac{1}{2}ahr_1 = 0$$

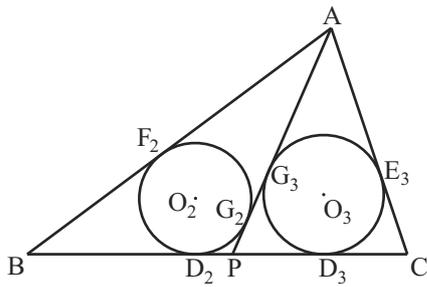


図 2.9: 内接円  $O_2, O_3$

ここで、 $r_1s = \frac{1}{2}ah$  であることにより、公式

$$h(r_2 + r_3 - r_1) - 2r_2r_3 = 0 \quad (2.15)$$

が得られる。

**補助定理 3** 3 次方程式  $5t^3 - 21t^2 + 27t - 9 = 0$  はただ一つの実数解をもち、その値は

$$t = \frac{7 - \sqrt[3]{2} - 2\sqrt[3]{4}}{5}$$

である。

(証明) 3 次方程式のカルダノの公式を用いて直接計算すればよい。

**補助定理 4** 図のように、2 円  $O_1, O_2$  の共通外接線を  $AB, CD$  とし、共通内接線を  $PQ$  とする。このとき、

$$AB = CD = PQ$$

である。

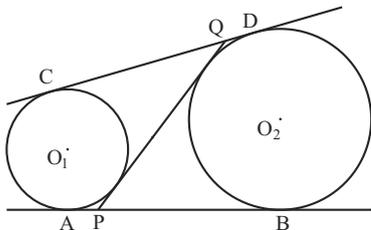


図 2.10: 補助定理 4

この補助定理は『算法助術』[1] の公式 39 である。和算でよく用いられる美しい公式である。

(証明) 接線の性質より、 $AB = CD$  は明らかである。共通内接線  $PQ$  と 2 円  $O_1, O_2$  との接点をそれぞれ  $E, F$  とし、 $PA = PE = p, QD = QF = q$  と置く。

ここで、 $AB = p + PB = p + PF = 2p + EF$  と  $CD = CQ + q = EQ + q = EF + 2q$  により、 $AB = CD$  から  $p = q$  が得られ、公式  $AB = CD = PQ$  を得る。

### 3 吉田茂兵衛の算額

吉田茂兵衛が嘉永 7 年 (1854 年) に伊佐爾波神社に奉納した算額には問題が 2 問掲載されている。1 問目がここで取り上げる類楕円 [2], [3] に関する問題である。2 問目は円柱と円柱の交わりとしてできる立体図形の体積を求める問題である。

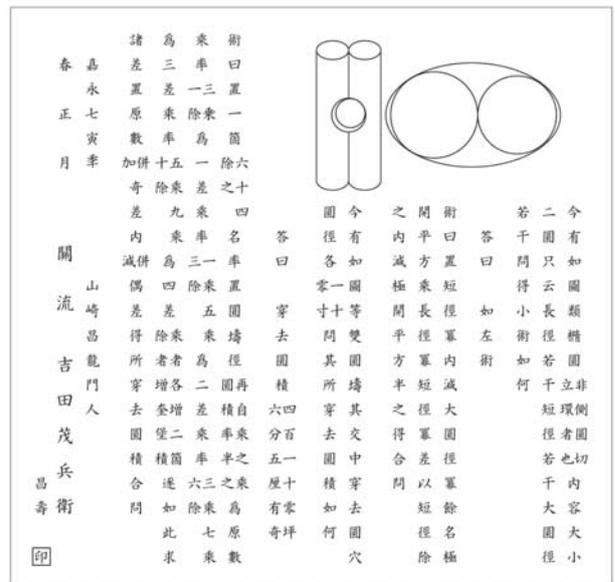


図 3.1: 吉田茂兵衛の算額の内容

**【吉田茂兵衛の算額の問題】** 図 3.2 のように、類楕円内に大小 2 個の円がある。類楕円の長径、短径、大円の直径の長さが与えられたとき、小円の直径の長さを求めよ。

**【現代解】**

算額中に類楕円とは「側円ではなく立環を切ったもの」とある。和算では楕円 ( $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ) のことを「側円」と呼んでいる。また「立環」とはトーラス (図 3.3) のことなので、類楕円はトーラスの切断面である。

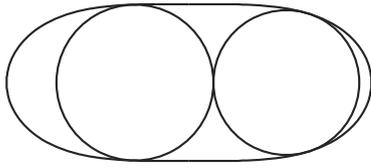


図 3.2: 吉田茂兵衛の問題

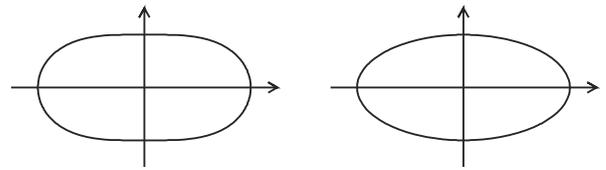


図 3.5: 類楕円 (左) と楕円 (右)

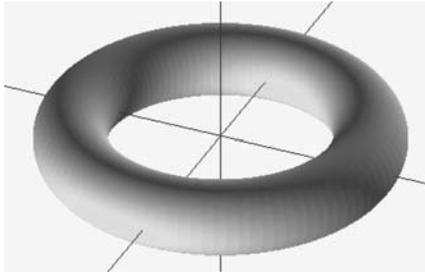


図 3.3: トーラス

トーラスの切断面にもさまざまあるが、トーラスの回転軸と平行な切断面で切ると対称性がよい。『算法楕円解』[2]によれば、トーラスを回転軸の上方から見た、図 3.4 において、直線  $l$  (トーラスの幅  $AB$  の中点を通り  $AB$  と垂直な直線) の位置の切断面で切ったものを「類楕円」または「環楕円」と和算では呼んでいる。また、直線  $m$  の位置の切断面で切ったものは「尖楕円」と呼び、その他の直線の位置の切断面で切ったものを「環偏楕円」と呼んでいる。

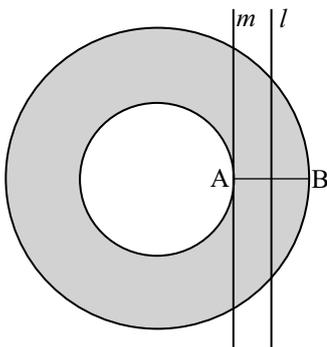


図 3.4: トーラスの切断面

図 3.5 では類楕円と通常の楕円の形状を比較してみた。類楕円の長軸の先端は楕円のように尖ってはおらず、丸みをおびていることが分かる。

図 3.6 を用いて、類楕円の方程式を求めるところから

始めることにする。左側の図はトーラスを作るための回転円と回転軸を表している。回転円の半径が  $b$  で、回転円の中心から回転軸までの距離が  $d$  である。中央の図はトーラスを回転軸の上方から見た図である。右側の図は切断面としての類楕円である。類楕円の短軸が  $2b$  となるためには、左側の図において回転円の半径が  $b$  でなければならない。類楕円の長軸が  $2a$  となるためには、中央の図において、切断面を表す直線が円によって切り取られる部分の長さが  $2a$  とならなければならない。従って、3 辺  $a, d, b+d$  からなる直角三角形に三平方の定理を用いると、

$$d = \frac{a^2 - b^2}{2b} \quad (3.1)$$

である。

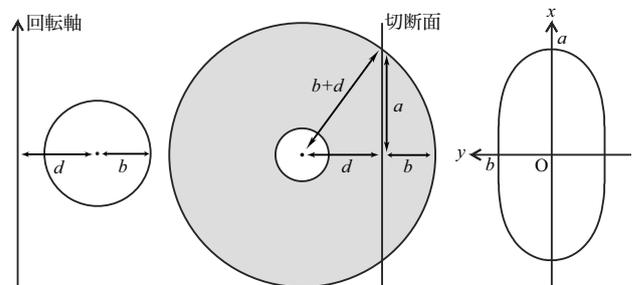


図 3.6:  $d$  を求める

次に、図 3.7 の左の図の点  $A$  について考えることにしよう。回転円の中心を通る水平方向の軸とのなす角を  $\theta$  とする。このとき  $AB = d + b \cos \theta$ 、 $AH = b \sin \theta$  である。この点  $A$  は中央の図では点  $A_1$  にあたる。点  $A_1$  を回転軸の周りを回転させ、切断面にぶつかったところが点  $A_2$  である。このとき、 $A_2H_2 = \sqrt{(d + b \cos \theta)^2 - d^2} = \sqrt{2bd \cos \theta + b^2 \cos^2 \theta} = \sqrt{(a^2 - b^2) \cos \theta + b^2 \cos^2 \theta}$  である。右側の図で点  $A_2$  に対応するものが点  $A_3$  であり、その座標は  $(\sqrt{(a^2 - b^2) \cos \theta + b^2 \cos^2 \theta}, b \sin \theta)$  である。以

上より類楕円のパラメータ表示は

$$\begin{cases} x = \sqrt{(a^2 - b^2) \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta} \\ y = b \sin \theta \end{cases} \quad (3.2)$$

である。この式から  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$  を利用して、 $\sin \theta, \cos \theta$  を消去すると、類楕円の方程式

$$b^2(x^2 + y^2 - b^2)^2 + (a^2 - b^2)^2(y^2 - b^2) = 0 \quad (3.3)$$

が得られる。従って類楕円は4次代数曲線である。

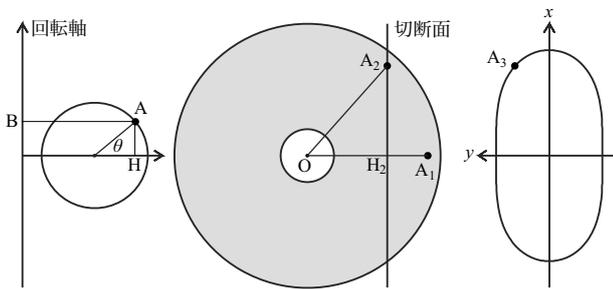


図 3.7: 類楕円の方程式を求める

さて、次に、この類楕円に内接する円を考えることにする。微積分を知っている我々は類楕円の方程式を偏微分して接線の傾きを計算して、それをもとに内接円を求めようとしがちであるが、和算家はもっと巧妙な方法を用いていた。そのアイデアは、トーラスに球を内接させて切断面でトーラスと一緒に球も切ってしまうのである [2], [3]。図 3.8 はその時のようすである。和算家は、円柱に球を内接させ、その切断面を使い楕円に内接する円の性質を調べている。それと同様な方法を類楕円にも適用しているのだ。

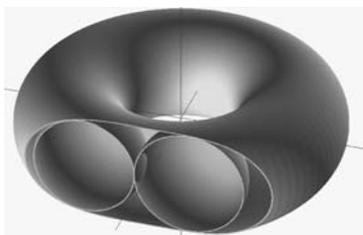


図 3.8: トーラス内に球を内接

さて、この類楕円の内接円を計算しよう。図 3.9 のようにトーラス内に半径  $b$  の球を内接させる。トーラスに内接する球の中心を  $A$ 、 $A$  から切断面に下ろした垂線

の足を  $B$  とすると、 $B$  は球を切断面で切った切口の円の中心である。切断面における点  $B$  の座標を  $(p, 0)$  とする。  $AB = w$  とおくと、直角三角形  $CAB$  において、  $w = \sqrt{b^2 - r^2}$  である。また、直角三角形  $AOD$  において、  $p = \sqrt{d^2 - (d - w)^2} = \sqrt{2dw - w^2}$  である。

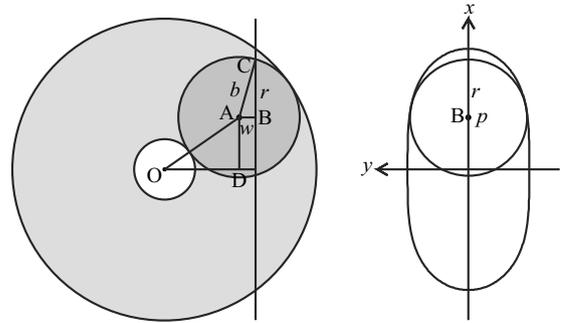


図 3.9: 類楕円の内接円

以上から、図 3.10 において、長軸  $2a$  で短軸  $2b$  の類楕円に内接する円の中心の座標を  $(p, 0)$  とし半径を  $r$  とするとき、

$$w = \sqrt{b^2 - r^2} \quad (3.4)$$

$$p = \pm \sqrt{2dw - w^2} \quad (3.5)$$

が成り立つ。

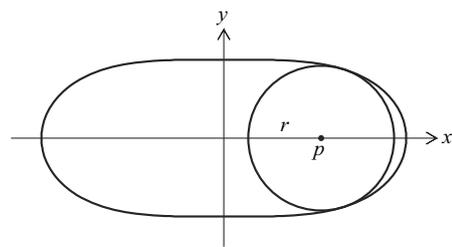


図 3.10: 内接円の位置と半径

これで類楕円についての準備ができたので、吉田茂兵衛の算額の問題のに移ることにする。図 3.11 のように、類楕円に内接する大小 2 個の円があるとき、それぞれの中心の座標を  $(p_1, 0), (p_2, 0)$  とし、それぞれの半径を  $r_1, r_2$  とする。このとき  $r_1$  から  $r_2$  を求めるためには、式 (3.1)、(3.6)、(3.7) により、以下の連立方程式

$$d = \frac{a^2 - b^2}{2b} \quad (3.6)$$

$$w_1 = \sqrt{b^2 - r_1^2} \tag{3.7}$$

$$p_1 = -\sqrt{2dw_1 - w_1^2} \tag{3.8}$$

$$w_2 = \sqrt{b^2 - r_2^2} \tag{3.9}$$

$$p_2 = \sqrt{2dw_2 - w_2^2} \tag{3.10}$$

$$p_2 - p_1 = r_1 + r_2 \tag{3.11}$$

を考えればよい。

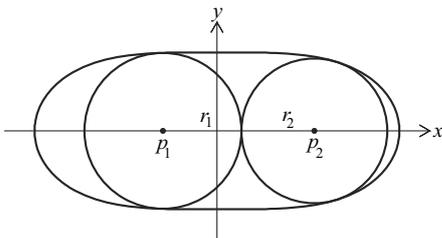


図 3.11: 類楕円の 2 つの内接円

このうち、 $d, w_1, p_1$  は  $a, b, r_1$  が与えられた時にすぐに定まる値であるので、実質的には (3.9)~(3.11) の 3 式から  $w_2, p_2$  を消去すればよい。そこで、(3.11) に (3.10) を代入して平方すると、

$$2dw_2 - w_2^2 = p_1^2 + 2p_1(r_1 + r_2) + (r_1 + r_2)^2$$

さらに (3.8)、(3.9) を代入すると、

$$2dw_2 - b^2 + r_2^2 = 2dw_1 - w_1^2 + 2p_1(r_1 + r_2) + (r_1 + r_2)^2$$

となる。次に (3.7) を代入し整理すると、

$$dw_2 = dw_1 + (r_1 + r_2)(p_1 + r_1)$$

が得られ、両辺を平方して (3.7) と (3.9) を代入し整理すると、

$$d^2(r_1^2 - r_2^2) = 2dw_1(r_1 + r_2)(p_1 + r_1) + (r_1 + r_2)^2(p_1 + r_1)^2$$

となる、ここで、両辺を  $(r_1 + r_2)$  で割って整理することで、

$$r_2(d^2 + (p_1 + r_1)^2) = r_1(d^2 - (p_1 + r_1)^2) - 2dw_1(p_1 + r_1)$$

となり、従って、

$$r_2 = \frac{r_1(d^2 - (p_1 + r_1)^2) - 2dw_1(p_1 + r_1)}{d^2 + (p_1 + r_1)^2} \tag{3.12}$$

を得る。この式が類楕円の長軸を  $2a$ 、短軸を  $2b$  とし、1 つの内接円 (半径  $r_1$ ) が与えられたとき、(3.6)~(3.8) により  $d, w_1, p_1$  がすぐに計算できるので、それらを用いてもう 1 つの内接円の半径  $r_2$  を求める式である。

現代人の我々は数式処理ソフトという便利なものがあるので、複雑な計算はコンピュータに頼りがちである。この計算をコンピュータにさせてみると、(3.12) に (3.6)~(3.8) を代入して展開した式がでてくる。その式たるやルートが入っている長くて複雑なもので、それをどう整理しようかと思いつ途方に暮れてしまう。和算家が求めた公式 (3.12) はとても簡潔な見事な式である。

## 4 関家喜多次の算額

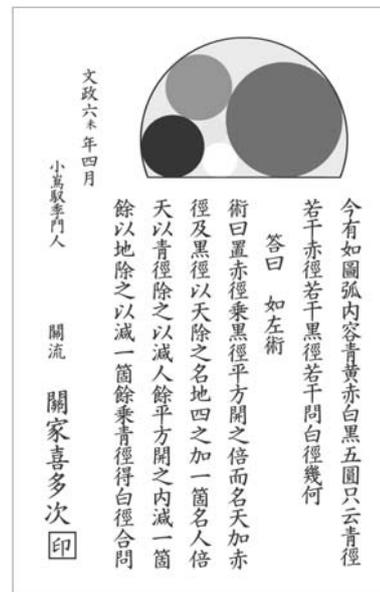


図 4.1: 関家喜多次の算額の内容

関家喜多次が文政 6 年 (1823 年) に伊佐爾波神社に奉納した算額であるが、現在は失われている。明治 44 年発行の『愛媛教育』に奉納された算額の写しが掲載されている。2007 年に愛媛和算研究会が復元奉納をしている。この問題の解法については、関家の師にあたる小畷

又兵衛が編纂したと伝えられている和算書『容術』の中に解法が収録されている。

【関家喜多次の算額の問題】

図??のように、円弧内に青、黄、赤、白、黒の5個の円がある。青、赤、黒の3個の円の直径が与えられたとき、白円の直径の長さを求めよ。

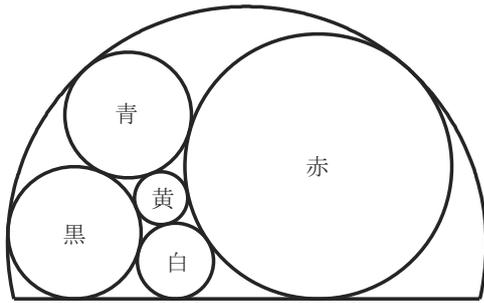


図 4.2: 関家喜多次の問題

【現代解】

算額の図??では5つの円が弓形内におさまっているが、実はこの弓形の円弧はこの問題の計算には直接関係していない。黒・白・赤の3円が一直線に接しているということがこの問題を解く重要なポイントである。

図 4.3 のように5円の中心を、A, B, C, X, Y とし、半径をそれぞれ  $a, b, c, x, y$  とする。直線と3円 B, Y, C の接点を  $T_B, T_Y, T_C$  とし、線分  $T_B T_C$  の長さを  $p$  と置く。

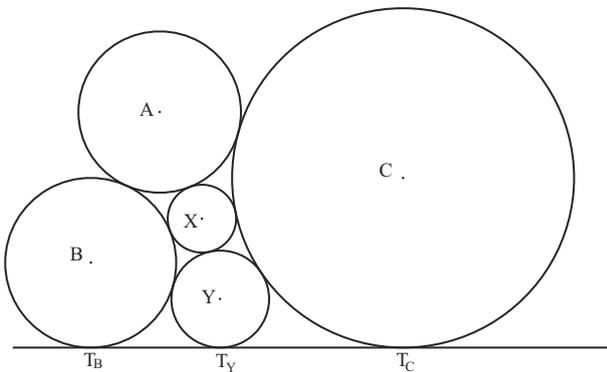


図 4.3: 5円と接線

最初に、4円 A, B, C, X に対して補助定理 5(1) を用

いると、

$$(a+x)^2 p^4 - 16abcx p^2 - 8ax(a+x)(b+c)p^2 + 16a^2 x^2 (b-c)^2 = 0 \quad (4.1)$$

を得る。同様に、4円 X, B, C, Y に対しても補助定理 5(1) を用いて、

$$(x+y)^2 p^4 - 16bcxy p^2 - 8xy(x+y)(b+c)p^2 + 16x^2 y^2 (b-c)^2 = 0 \quad (4.2)$$

を得る。さらに、補助定理 7 により、 $T_B T_Y = 2\sqrt{by}$ 、 $T_Y T_C = 2\sqrt{cy}$  となるので、 $p = T_B T_Y + T_Y T_C$  により、

$$p^2 = 4y(b + 2\sqrt{bc} + c) \quad (4.3)$$

となる。

これで、この問題を解くための条件式は出そろった。しかし (4.3) 式にルート記号が入っているのでこのままでは計算が厄介である。そこで、

$$\sqrt{b} = s, \quad \sqrt{c} = t \quad (4.4)$$

とおいて、3式を書き直すと、

$$(a+x)^2 p^4 - 16as^2 t^2 x p^2 - 8ax(a+x)(s^2 + t^2)p^2 + 16a^2 x^2 (s^2 - t^2)^2 = 0 \quad (4.5)$$

$$(x+y)^2 p^4 - 16s^2 t^2 xy p^2 - 8xy(x+y)(s^2 + t^2)p^2 + 16x^2 y^2 (s^2 - t^2)^2 = 0 \quad (4.6)$$

$$p^2 = 4y(s+t)^2 \quad (4.7)$$

となる。

これら3式から  $p, x$  を消去し、 $y$  に関する方程式を導けばよい。そこで、(4.6) 式に (4.7) 式を代入して  $p$  を消去して整理すると、

$$4st(st-y)x - y^2(s+t)^2 = 0$$

となる。これより  $x$  は、

$$x = \frac{y^2(s+t)^2}{4st(st-y)} \quad (4.8)$$

と表される。そこで、(4.5) 式に (4.7) 式と (4.8) 式を代入

して、根気よく整理すると、

$$(s+t)^4 y^3 - a(s+t)^2(s^2+6st+t^2)y^2 + 8as^2t^2(s^2+4st+t^2)y - 16as^4t^4 = 0 \quad (4.9)$$

となり、 $y$ に関する3次方程式が得られる。

以上により、算額の問題の解としては、青、黒、赤の3円の半径  $a, b, c$  が与えられたとき、(4.4)式で  $s, t$  を求め、それらを(4.9)式に代入し3次方程式を解くことで、白円の半径  $y$  が求まることになる。また、黄円の半径  $x$  が必要なときは(4.8)式を用いて計算すればよい。

しかしながら、3次方程式(4.9)は一般には平方根を使って解くことはできない。例えば  $a=2, b=c=1$  のとき、この3次方程式は

$$y^3 - 4y^2 + 6y - 2 = 0 \quad (4.10)$$

となる。この式はEisensteinの定理「整係数方程式  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$  は、ある素数  $p$  に対して、(1)  $a$  が  $p$  で割り切れず、(2)  $b, c, d$  が  $p$  で割り切れ、(3)  $d$  が  $p^2$  で割り切れないとき、この方程式は既約である。」の条件を  $p=2$  で満たしている。従って、この方程式の解は四則演算と平方根のみでは記述できず、3乗根がどうしても必要になる。ちなみに、(4.10)は一つの実解をもち、その正確な値は

$$y = \frac{1}{3} \left( 4 - \frac{2}{\sqrt[3]{3\sqrt{33}-17}} + \sqrt[3]{3\sqrt{33}-17} \right)$$

である。

**補助定理5 (傍斜術)** 図4.4のように、2円AとBが外接し、その2円にさらに円  $O_1$  と円  $O_2$  が外接している。円  $O_1$  と円  $O_2$  の共通外接線  $T_1T_2$  の長さを  $p$ 、4円の  $O_1, O_2, A, B$  の半径をそれぞれ  $r_1, r_2, a, b$  とするとき、

$$(a+b)^2 p^4 - 16abr_1 r_2 p^2 - 8ab(a+b)(r_1+r_2)p^2 + 16a^2 b^2 (r_1-r_2)^2 = 0$$

が成り立つ。

この補助定理は『算法助術』[1]の公式72である。2つの円  $O_1$  と  $O_2$  が接している特別な場合がデカルトの円

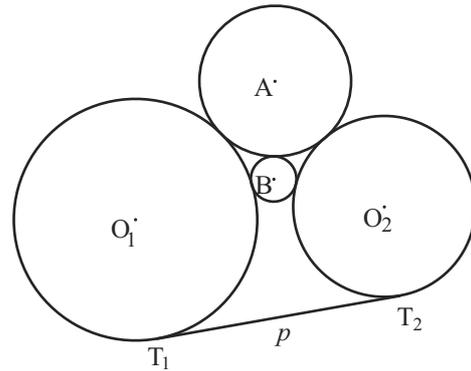


図4.4: 補助定理5

定理である。従ってこの傍斜術はデカルトの円定理をより一般化したものである。多数の円が複雑に接している問題を多く扱っている和算家にとって、この傍斜術は重要な公式であったと思われる。証明については六斜術を用いると分かりやすい。公式中のパラメータ  $p$  は、2つの円  $O_1$  と  $O_2$  がどのくらい離れているかを示しているものである。素人目には、2円の中心間の距離  $p' = O_1O_2$  をパラメータにしてもいいのではと思ってしまうのだが、やってみると補助定理の式より2倍以上も長い式になってしまう。共通外接線の長さ  $p$  をパラメータにして簡潔な式を導いているのは、数多くの計算をこなしてきた和算家の知恵であろう。

(証明) 四角形(4点)  $O_1O_2AB$  に補助定理6(六斜術)を用いることにしよう。四角形の6辺の長さを計算すると、 $AO_1 = a+r_1, AO_2 = a+r_2, AB = a+b, O_2B = r_2+b, BO_1 = b+r_1, O_1O_2 = \sqrt{p^2 + (r_1-r_2)^2}$  である。これらを補助定理6に代入して根気よく整理すると、

$$(a+b)^2 p^4 - 16abr_1 r_2 p^2 - 8ab(a+b)(r_1+r_2)p^2 + 16a^2 b^2 (r_1-r_2)^2 = 0 \quad (4.11)$$

を得る。

**補助定理6 (六斜術)** 平面上に4点  $O, A, B, C$  があり、その間の距離が、 $OA = a, OB = b, OC = c, BC = x, CA =$

$y$ ,  $AB = z$  と表されるとき、

$$\begin{aligned} & a^2x^2(-a^2 + b^2 + c^2 - x^2 + y^2 + z^2) \\ & + b^2y^2(a^2 - b^2 + c^2 + x^2 - y^2 + z^2) \\ & + c^2z^2(a^2 + b^2 - c^2 + x^2 + y^2 - z^2) \\ & - (a^2b^2z^2 + b^2c^2x^2 + c^2a^2y^2 + x^2y^2z^2) = 0 \end{aligned}$$

が成り立つ。

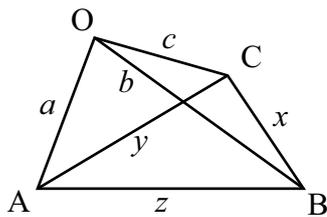


図 4.5: 補助定理 6

この公式は六斜術と呼ばれ、和算でよく使われる公式である。六斜術の証明については [5], [6] を参照されたし。

**補助定理 7** 図 4.6 のように、2 円  $O_1$ ,  $O_2$  は互いに外接し、直線  $l$  に 2 点 A, B で接している。円  $O_1$ ,  $O_2$  の半径をそれぞれ  $r_1$ ,  $r_2$  とするとき、

$$AB = 2\sqrt{r_1r_2}$$

である。

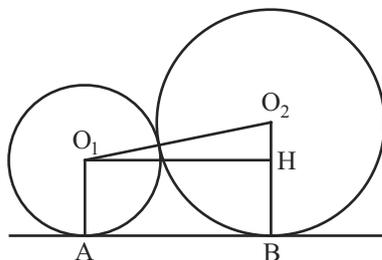


図 4.6: 補助定理 7

この補助定理は『算法助術』[1]の公式 40 で、和算では頻りに持つられる公式である。

(証明)  $O_1$  から  $O_2B$  に下ろした垂線の足を  $H$  とする。

$$\begin{aligned} \Delta O_2O_1H \text{ に三平方の定理を用いると、} AB = O_1H = \\ \sqrt{O_1O_2^2 - O_2H^2} = \sqrt{(r_1 + r_2)^2 - (r_2 - r_1)^2} = \sqrt{4r_1r_2} = \\ 2\sqrt{r_1r_2} \text{ を得る。} \end{aligned}$$

## 5 まとめ

伊佐爾波神社の算額の中から 3 つの問題を取り上げてみた。いずれも難度の高い図形問題である。現代的に問題を解いてみることで、当時の和算の特徴が見えてきた。

一つは、江戸時代を代表する和算家で算聖とあがめられている関孝和の考案した、多変数代数方程式を漢字と算木で表す「点竄術」を駆使して、膨大な量の代数計算をこなしていることである。しかも、結論として導く式は、なるべく短い簡潔な式となるよう、周到な工夫がなされていることも和算の特徴である。

和算家が好んだ図形問題は、その図形のもつ性質を式で表し、連立方程式を立てるところから計算が始まる。筆者も自分で多くの和算問題を解いてみたが、立式に苦勞することが多い。また、うまく立式できたとしても、その後の計算式が長く複雑なものとなり收拾がつかなくなることも稀ではない。和算家かというと、図形問題を解くために『算法助術』のような公式集を利用してはいた。そこ收拾されている公式を用いれば、立式が容易になり、かつその後の計算も簡単になるという、すばらしいものである。和算家が膨大な計算をする中で見いだした智恵が、公式集として結晶しているといってもよい。

最後に、本研究は、「科学研究費助成事業（基盤研究(C)）」および「教育学部学部長裁量経費による教育・学術支援経費」の研究助成を受けて行われた研究成果である。

## 参考文献

- [1] 長谷川弘閔/山本賀前編, 算法助術, 1841 (天保 12 年)
- [2] 村田恒光閔/豊田勝義撰, 算法楯円解, 1842 (天保 13 年)
- [3] 加藤平左エ門, 和算ノ研究 雑論 I, 日本学術振興会, 1954

- [4] 伊佐爾波神社, 道後八幡 伊佐爾波神社の算額, 2005
- [5] 一松信, 現代に活かす初等幾何入門, 2005
- [6] 平田浩一, 六斜術とトレミーの定理の関係について,  
日本数学教育学会高専・大学部会論文誌, 18-1, 2011