

# 算数・数学教育における記述表現活動研究の動向

二宮 裕之

(数学教育講座)

(平成15年10月23日受理)

## Recent Trends on the Researches in Mathematical Writing

Hiroyuki NINOMIYA

### 1. はじめに

コミュニケーションが成立する際には、必ずその媒体としての「表現活動」が介在する。算数・数学教育におけるコミュニケーションもまた例外ではない。この場合の「表現」とは、いわゆる数学的な表記はもちろん、「ボディーランゲージ」や実物を用いた「現実的表現」なども含まれるので、実際のコミュニケーション活動においては様々な抽象度を持つ表現が用いられることとなる。

このように様々な表現形態のある中で、本稿は特に「書く活動(記述表現)」に焦点をあて検討を行うものである。中原(1995)は数学教育における表現を、「現実的表現」「操作的表現」「図的表現」「言語的表現」「記号的表現」の5つの様式に分類している。本稿はその中でも『記述による表現』が可能なものとして「図的表現」「言語的表現」「記号的表現」の3つをその対象とする。そして、数学教育における「言語」や「記述表現」を捉える枠組みについて検討を行った上で、その枠組みに従い記述表現のもつ機能や記述表現活動の捉えられ方の変容について、更には評価の問題との関連について言及するものである。

### 2. 数学教育における「言語」と「記述表現」

二宮(2001a)は、ヴィゴツキー(1962)、外山(1974)、長谷川(1974)、岡本(1985)、平林(1993)、深田(1998)、などの先行研究を踏まえ、数学教育における「言語」を図1のように捉えた。

ここでは言語を、「思考-伝達」「個人-社会」という二つの機能(軸)で捉えており、ヴィゴツキー(1962)や岡本(1985)などの指摘からこれらの機能は厳密に二分される性質のものではないとしている。すなわち言語全般について、「思考-伝達」機能においては思考的側面

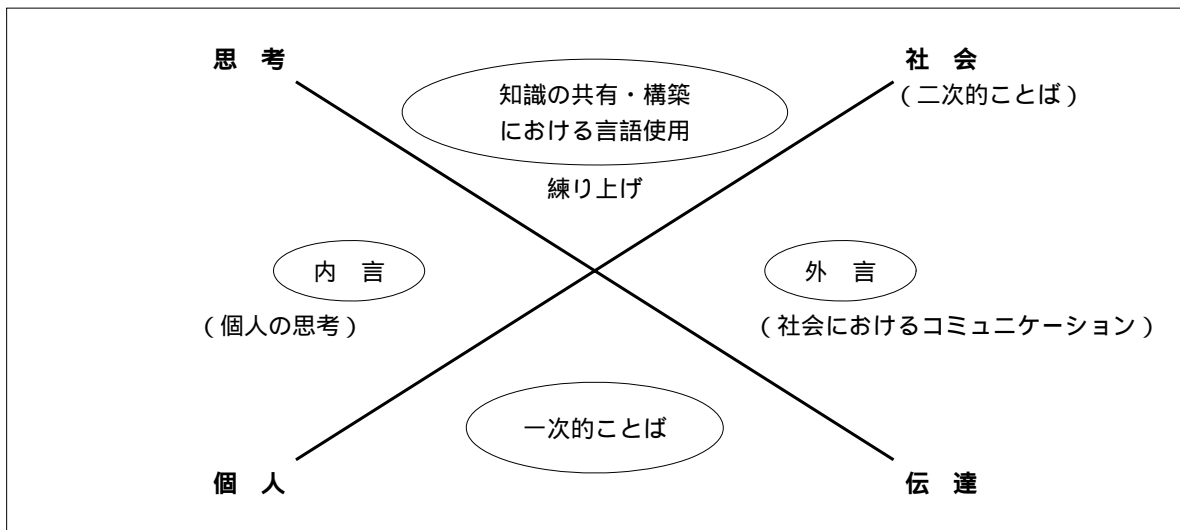


図1 数学教育における「言語」を捉える枠組み

と伝達的側面の双方を持ち合わせるものとして、また「個人 - 社会」機能においては個人的側面と社会的側面の双方を持ち合わせるものとして、それぞれ「相互構成的 (Reflexive) な本性をもつもの」として捉えていくことの必要を述べた。またヴィゴツキー (1962) の指摘から、「内言」は思考的・個人的様相が強いもの、「外言」は伝達的・社会的様相の強いものであることを指摘するとともに、個人的・伝達の様相をもつ言語の例として岡本 (1985) の「一次的事ば」を、思考的・社会的様相をもつものとして佐伯 (1995) の言う学習共同体における「知識の共有・構築における言語使用」を、それぞれの具体的事例としている。換言すれば、「算数・数学の学習とは、一人一人が問題を考え解くもの」といった旧来の数学学習観における言語は、「個人的」な「思考」の部分に限定されるものと考えることができる。また、従来から行われてきた「練り上げ」と言われる活動は、「社会的」な営みとしての「思考」と捉えることができよう。更に、近年のコミュニケーション研究は、言語のもつ「伝達」の機能に注目した数学教育研究と位置づけることが可能である。

ここで特に「記述表現」に着目し、図1について更なる検討を試みたい。「記述表現」に注目した場合、「思考 - 個人」に関わる部分は「自分自身の思考についての記述表現」、「思考 - 社会」に関わる部分は「他者理解を指向した記述表現」、「伝達 - 社会」に関わる部分は「メディア」、「伝達 - 個人」に関わる部分は「個人的メモ」というように解釈・特徴づけをすることができる。ところで平林 (1987) は、数学的活動の一つの特質として「最終的には何らかの形で『表記』に結ばれる (p 374)」という点を指摘した。そして「数学は表記をもってする表記の研究の科学であると捉えることができる (p 388)」とした上で、①研究の対象とされる表記、②研究の方法として使用される表記、の2種類の表記を同定している。更に一般言語学に倣い平林 (1987) では①を「対象表記」、②を「メタ表記」と呼んだ。これらの表記は厳格に区別されるような性質のものではなく、「一旦学習された対象言語は忽ちメタ言語として他の対象言語の学習に利用されることもあれば、また逆に、メタ言語が意識的に洗練され、形式化されて、対象言語化されることもしばしばある (p 391)」ものである。従って、ある表記が学習場面によって対象表記にもメタ表記にもなりうるという点で「相互構成的 (Reflexive) な本性をもつもの」として捉えられるべきものであろう。

数学教育における「言語」を捉える枠組み（図1）では、「思考 - 伝達」「個人 - 社会」という二つの機能が相互構成的様相をもつものとして二次元的モデルを想定した。数学教育における言語の中でも特に数学的表記或いは数学的記述表現のみについて考えると、更に「対象表記 - メタ表記」というもう一つの機能が相互構成的様相をもつものとして存在するであろう。すなわち、二次元で表される「言語」が数学的記述表現活動においてどのように用いられるかという観点から、更に別の次元へと延びるもう一つの機能「対象表記 - メタ表記」が想定できるのである。本研究では数学教育における記述表現を図2のような三次元モデルで捉えることとする。

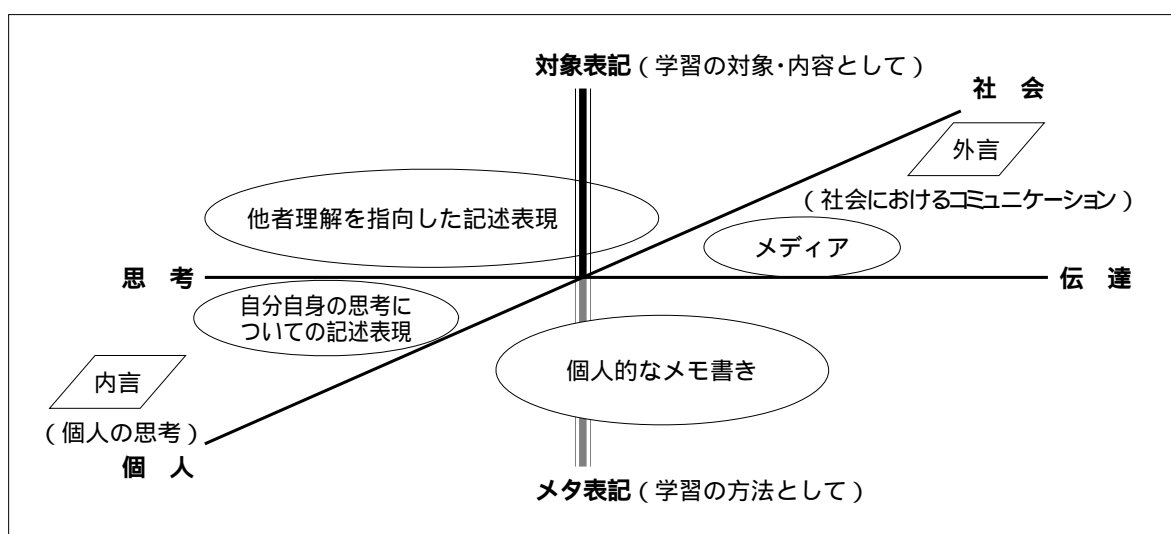


図2 数学教育における「記述表現」を捉える枠組み

### 3. 記述表現の担う3重の機能

中原（1995）は数学教育における表現体系研究の意義に関連し、「表現は学習の目標ともなり、学習の内容ともなり、さらに学習の方法ともなる（p.193）」と述べ、その「3重の機能」について言及している。このことは記述表現に限定しても同様のことが言えると考えられる。

#### （1）学習内容としての記述表現

算数・数学教育における「記述」は、従来学習の内容として位置づけられてきた。これは平林（1987）の言う「対象表記」に相当し、学習の対象としての「内容」を記録に留めようとするものである。旧来のノート指導における記述などは「学習内容」を記述するものであり、また記述されたものそれ自体も「学習内容」であった。そしてそれらの多くは、「個人」的な「思考」を記述したものであったことは、旧来の「数学学習観」が如実に反映されたものであったとも言える。一方近年では、協同学習などにおける「社会性」や、コミュニケーション活動としての「伝達」の重要性などが、算数・数学教育においても指摘されつつある。このような新しい数学学習観の台頭に伴い、ノートにまとめた内容を他者に示したり学習のまとめを後の学習において活用したりするような記述表現の「社会的」「伝達的」側面もまた、算数・数学の学習内容として認知されつつある。

## (2) 学習方法としての記述表現

学習の対象としての「対象表記」に対し、学習の方法としての記述が「メタ表記」である。ある表記（概念）を説明するためにメタ表記を用いるといった従来の記述表現の活用に加えて、近年では中村（1989）の「学習感想」、亀岡（1996）の「ふきだし法」、Kobayashi（2000）の「キャラクター学習」、二宮（2003a）の「ポートフォリオ学習」など、記述表現のメタ表記の側面に注目し、記述表現活動を学習の方法として位置づけようとする研究・実践が進められつつある。これらの実践は、「記述表現活動を通して学ぶ」ことを目指すものであり、記述された表現は学習の内容であるとともに「学習の方法（学び方）」ともなっている。従来、学習の方法として使用される言語は「伝達的」「社会的」なものが大半であった。しかし近年の実践では、「個人的」な「思考」を記述することそれ自体を『学習の方法』としても位置づけようとする傾向にある。

## (3) 学習目標としての記述表現

算数・数学の学習に係る諸活動は「最終的には何らかの形で『表記』に結ばれる（p 374）」という平林（1987）における指摘を見るまでもなく、記述表現はその学習においてとても重要な意味をもつ。これは、上述の「学習内容として」の記述表現を行えることが数学教育の目標となることはもちろん、「学習方法として」記述表現を行うことそれ自体も『獲得されるべき能力』として捉えようとするにもつながる。このような観点に立ったとき、記述表現を「内容」「方法」の両側面において等しく重視し、その習得・獲得を算数・数学の学習における目標として位置づけることができるのである。

## (4) 記述表現活動の捉えられ方の変容

旧来の「表記」或いは「記述表現」において、その『内容（対象）』としての記述の多くが「個人的」「思考的」側面の強いものとして、『方法』としての記述の多くが「社会的」「伝達的」側面の強いものとして捉えられてきた点に留意した上で、近年の数学教育における記述表現活動を改めて位置づけ直しおきたい。上述の通り、学習内容としての記述表現の多くは従来「個人・思考」であったものが、近年「社会・伝達」の側面の必要性・重要性をも認識したものへと変容してきた、一方、学習方法としての記述表現は従来「社会・伝達」の側面が強か

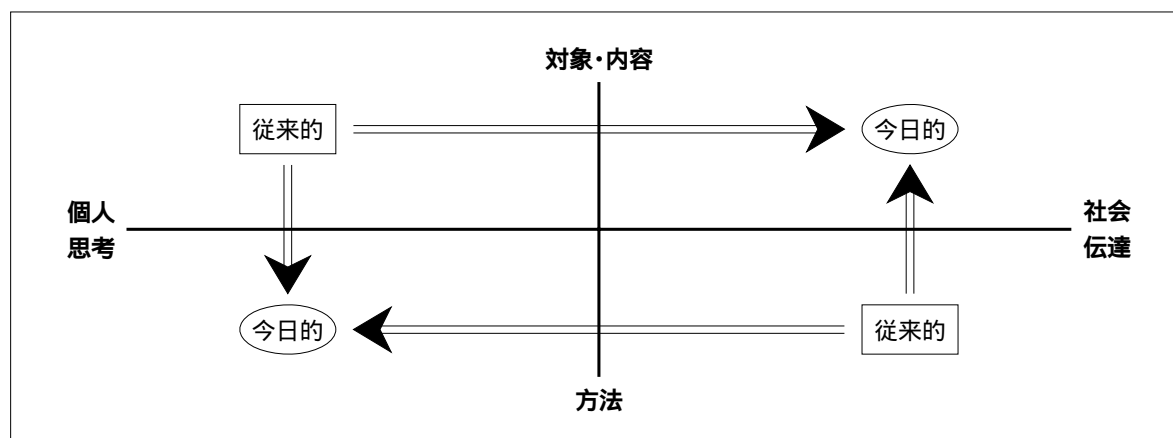


図3 記述表現活動の捉えられ方の変容

ったが、最近では「個人・思考」の記述をも学習の方法として捉えようとする動きが見られる。別の見方をするなら、「個人・思考」としての記述は従来学習の内容であったものが近年学習の方法として、「社会・伝達」としての記述は従来学習の方法であったものが近年学習の内容として、それぞれその価値を等しく見いだされようとしているのである。これら記述表現活動の捉えられ方の変容をまとめると図3のようになる。

#### 4. 記述表現活動と評価

学習方法としての記述は、これまでも様々に「教師による評価・指導」のための方法として活用されてきた。二宮（1998）では、算数・数学学習における記述表現活動の機能を、教師に対する機能及び学習者に対する機能という観点から表1のようにまとめている。このように記述表現活動は、児童・生徒の学習を評価する際に威力を発揮する。特に言語的な表現など、より具体的な表現様式を活用することで、学習者の情意的側面や、微妙なニュアンスを表わすことが可能となる。

表1 数学教育における Writing の機能

	教師の学習指導 (評価, 教師の子ども理解)	子どもの学習活動 (子どもの学習, 自己評価)
情 意	教師が子どもの情意面を知ること	数学学習に対する子どもの情意面を高揚させること
認 知	教師が子どもの理解度を知ること	数学の学習内容に対する子どもの理解を深めること

2000年12月の教育課程審議会答申では、指導と評価の一体化を図ることの必要性が述べられた。「指導と評価は別物ではなく、評価の結果によって後の指導を改善し、更に新しい指導の成果を再度評価するという、指導に生かす評価を充実させることが重要である」とされ、単に評価をすることで終わることなくその評価を次の指導へと生かしていくこと、そしてまた逆に、指導において必要に応じて適宜評価を行うこと、が求められている。このような指導観・評価観に立つとき、学習活動と学習指導（評価）の両側面に対して有効な機能を兼ね備える「記述表現活動」を積極的に活用していくことが望まれる。

評価という日本語に対応する英語には、Evaluation と Assessment という二つの言葉があるとされ、それぞれ若干意味が異なる。Assessment とは「生徒についての情報（彼らの知っていることやできること）を収集すること」であり、Evaluation とは「Assessment による情報を解釈し、そこに何らかの判断を加えること」であるとされている。数学教育の分野では、NCTM が1995年に『学校数学における Assessment の基準』を刊行しているが、ここでは Assessment を「生徒がもつ数学の知識、技能、態度についての事実・証拠を収集するプロセスであり、その証拠に基づき様々な目的に応じて何らかの推論を行うこと」とし、Evaluation を「試験・調査や判断に基づいて、価値を同定すること。Assessment の情報を活用する方法」としている。つまり Assessment とは、生徒の学習についての情報を分かりやすく収集・整理することであり、その情報に基づいて何らかの判断をするのが Evaluation なのである。日本語のいわゆる『評価』という言葉には、Assessment と Evaluation の両方の意味が含まれているが、ともすれば Assessment は評価を行うための下準備と見なされ、Evaluation まで行わなくては「評価」としては不完全といった認識をする傾向にあるかもしれない。生徒の

学習をありのままに収集・整理しそれを分かりやすく集約することは「評価 (Evaluation)」を行う際の準備として不可欠であることは言うまでもないが、Assessment としての評価を想定する場合、収集・整理・集約されたものそれ自体が既に「評価の結果」となる点に留意したい。

ここで、「Assessment」すなわち「生徒の学習についての情報を分かりやすく収集・整理したもの」こそが、新しい評価観に基づく『学習 - 評価 - 指導』という一連の活動を有機的に結びつけ、指導と評価の一体化を実現するものであると言えるのではないだろうか。そして Assessment を行う際に、『学習 - 評価 - 指導』を有機的に結びつける働きをする表現活動こそが記述表現活動である。本節では、Assessment の一例としてポートフォリオ評価 (Portfolio Assessment) について述べていきたい。

ポートフォリオを『学習 - 評価 - 指導』という一連の活動の中で考えてみると、まずはポートフォリオを作成することそれ自体が「学習活動」の一環として位置づく。二宮 (2003a) はポートフォリオを学習の方法として活用する『ポートフォリオ学習』について、その具体的な手順を明らかにするとともに有効性を実証的に示した。ここでは、ポートフォリオ学習を規定する五つの原理を図4のようにまとめている。

- (1) ポートフォリオ学習とは、ポートフォリオの作成を学習活動の一部として位置づける「学習の方法」である。
- (2) ポートフォリオとは、生徒の知識、技能、態度の成長をモニターするために「『自分(生徒)が』何を学習したか」をまとめにおける重要な観点とした上で、生徒と教師が系統的かつ組織的に学習の成果を集めたものである。
- (3) ポートフォリオ学習を進めるにあたり、生徒は「ワーキング・ポートフォリオ」と「パーマメント・ポートフォリオ」の二種類のポートフォリオを作成する。
- (4) ポートフォリオ学習は、学習共同体において、「共同体全体の営み」としての『協同学習』を実現しようとするものであり、そこでは『表現活動』の効果的運用が望まれる。
- (5) ポートフォリオ学習における記述表現は、内省的活動を背景とした「(総体としての)内省的記述表現」を志向する。

図4 ポートフォリオ学習を規定する五つの原則

一方、ポートフォリオを『評価』する際には、大きく三通りの評価の有り様が存在するだろう。第一に、児童・生徒自身による『自己評価』である。ポートフォリオを数学の学習活動に積極的に取り入れているアメリカの高校カリキュラム Interactive Mathematics Program (IMP) では、ポートフォリオを纏める際の3つの大きな柱の一つとして「自分の成長についてのまとめ」を行っている(二宮, 2001b, p.36)。そもそもポートフォリオとは「児童・生徒の自らの学びを集約する新しいタイプの学習のまとめ(二宮, 2003b, p.110)」であることから、ポートフォリオを作成する過程で児童・生徒は自らの学習をふり返りそれを評価しつつ学習をまとめていく。第二には、友だちによる『他者評価』があげられる。この場合、友だちが自分のまとめたポートフォリオを見ているいとコメントするといった形の「他者による評価」が想定されきるとともに、友だちのポートフォリオを見て自らの学習やそのまとめをもう一度ふり返る「他者を介した評価」を考えることができる。そして第三に『教師による評価』である。この場合、Evaluation 的な評定を行う場合もあろうが、次の学習へとつながる示唆を

6月12日(木) 四角形 ③

**問題**  
正方形、長方形は、平行四辺形か台形の仲間に入りますか？入りませんか？

**自分の考え**  
正方形と長方形の間は、平行四辺形だと思ふ。

**友達の考え**  
~~平行四角形~~  
平行四辺形  
平行  
平行  
2組の平行な辺

**台形の考え方**  
台形  
1組の平行な辺

**友達の考え方**  
正方形、長方形 => 平行四辺形  
角A=角C

**今日のまとめ**  
今日は、平行四辺形と台形が正方形、長方形でもいえた。だから、仲間と言ってよいのではないかと。ということを知った。台形も

**今日の授業を振り返って**

新しく学んだこと	納得感	満足感
★ ◎ △	★ ◎ △	★ ◎ △
理由 図などを書いて少し分かったから。	理由 平行四辺形と台形が正方形、長方形でもいえる。少し分かったから。	理由 今日、知ったことが、少し分かったから。

**今日のMVP (今日の自分はここがすごかった!)**  
台形のこと分かった！  
形などか！

**おまけ・アクシデント**  
今日のワークシートは、差間休み(20分) 終わりました。

図5 ポートフォリオのワークシート(5年生)

与えたり、その内容そのものに対する指導を行ったり、といった具合に、更に先の学習活動へとつながるような展開(指導)を心がけることが肝要であろう。

さて、ポートフォリオを介した評価の成果を指導へと生かすことはもちろんであるが、ポートフォリオを作成することそれ自体が『指導』の対象となる場合もある。例えば「手作りの参考書(堀川, 1996)」として機能するような形のまとめを作成しようとする場合、より望ましいまとめ方を想定することができる。このことは本稿第3節(3)「学習目標としての記述表現」とも関連する。つまり、あとから見直してみてもよく分かるようにまとめておくこと、それ自体が算数・数学の学習の目標となるのである。否、そのようなまとめを行うこと自体が算数・数学の学習活動そのものなのかもしれない。

一例として、ワーキングポートフォリオを作成する際のワークシートの例を図5に示す。

## 5. おわりに

本稿は、算数・数学教育における記述表現活動に注目し考察を進めた。数学教育における「言語」を捉える枠組みと、「記述表現」を捉える枠組みを同定するとともに、その枠組みに従い、記述表現活動の今日の変容を捉えた。更に、近年大きなテーマとなっている評価の問題と関連して、記述表現が指導と評価の一体化を実現させる有効な手だてであることを明らかに

した。そしてその一つの方法として、ポートフォリオの活用について概説した。

記述表現活動の今日的活用については、更なる実証的検討が必要である。

## 附 記

本稿は、日本数学教育学会第36回数学教育論文発表会における課題別分科会「WG6 言語とコミュニケーション」における筆者の報告『算数・数学教育における記述表現活動』に加筆修正したものである。

## 文 献

- ヴィゴツキー (1962), 『思考と言語』, 明治図書
- 岡本夏木 (1985), 『ことばと発達』, 岩波新書
- 亀岡正睦 (1996), 「「ふきだし法」による指導と評価の一体化に関する研究」『日本数学教育学会誌 算数教育』, 第78巻第10号, pp 25 - 30
- 佐伯 胖 (1995), 「文化的実践への参加としての学習」『学びへの誘い』, 東京大学出版会, pp .1 - 48
- 外山滋比古 (1974), 「言語教育研究の視点」倉沢栄吉・野地潤家編著『言語と人間』, 第一法規, pp 41 - 58
- 中原忠男 (1995), 『算数・数学教育における構成的アプローチの研究』, 聖文社
- 中村亨史 (1989), 「数学的な考え方を伸ばす学習感想のあり方 - 第4学年面積の指導を中心に - 」, 『日本数学教育学会誌 算数教育』, 第71巻第2号, pp .14 - 21
- 二宮裕之 (1998), 「数学的 Writing と数学的コミュニケーションとの関わりについて」『日本数学教育学会第31回数学教育論文発表会「テーマ別研究部会」発表収録』, pp 63 - 68
- 二宮裕之 (2001a) 『数学教育における内省的記述表現活動に関する研究』広島大学学位論文
- 二宮裕之 (2001b) 「算数・数学教育における「ポートフォリオ」の活用事例」『新しい算数研究 2001年10月号』, 東洋館出版社, pp 35 - 37
- 二宮裕之 (2003a) 「高等学校数学における「ポートフォリオ学習」の試み」『日本数学教育学会誌』第85巻第5号, pp .2 - 11
- 二宮裕之 (2003b) 「数学科におけるポートフォリオによる評価」長崎栄三編著『中学校数学科における新しい評価の在り方 - 目標に準拠した評価を求めて - 』明治図書, pp .110 - 121
- 二宮裕之 (2003c) 「算数・数学教育における記述表現活動」『日本数学教育学会第36回数学教育論文発表会「課題別分科会」発表集録』, pp .188 - 194
- 長谷川孝士 (1974), 「言語と社会」倉沢栄吉・野地潤家編著『言語と人間』, 第一法規, pp .9 - 17
- 平林一榮 (1987), 『数学教育の活動主義的展開』, 東洋館出版社
- 平林一榮 (1993), 「数学教育の目標」数学教育学研究会編『新数学教育の理論と実際』, 聖文社, pp 24 - 35
- 堀川雅子 (1996), 「Mathematical Writing を取り入れた授業の研究」『日本数学教育学 臨時増刊第78回総会 (長崎大会) 特集号』, p 420
- Kobayashi, Tohru (2000) A Study on Mathematics Learning with the Active Use of Writings( 2 ) Some Examples From Character Method, *The 9<sup>th</sup> International Congress on Mathematical Education SHORT PRESENTATIONS*, p 218
- NCTM (1995) *Assessment Standards For School Mathematics*, National Council of Teachers of Mathematics