

多面体教材

— 切り出しによる正十二面体の作り方 —

(数学教育講座) 河村 泰之
(元愛媛大学教育学部) 三好 彩夏

Teaching materials for Polyhedron

— How to cut out a regular dodecahedron from a cube —

Yasuyuki KAWAMURA and Ayaka MIYOSHI

(平成 30 年 6 月 29 日受理)

抄録：本稿では教育現場で比較的手軽な教材として正十二面体をつくる方法について述べる。正十二面体を立方体から切り出す方法はすでに知られているが、切り出す角度の精度を高めることが課題となる。本稿では、教育現場にあるもので正十二面体を切り出すときに必要な角度を作り出し、また、切り出す際にできるだけ特殊な工具などを使わずに安定した切断ができる方法を紹介する。

キーワード： 正十二面体(regular dodecahedron)、立体教材(teaching materials for spatial figure)

1. 研究の背景

日本の算数・数学教育の中で多面体の教育は、小学校第 2 学年の箱の形をしたものについて知ることから始まる。その後、第 4 学年で立方体や直方体、第 5 学年で角柱を学ぶ。中学校では空間図形についての理解を深め、基本的な柱体及び錐体について、また、立体の相似について学ぶ。さらに高等学校では多面体に関する基本的な性質について理解し、空間座標とベクトル座標について学ぶ。この過程において主に扱われる多面体は、立方体や直方体、角柱・角錐、正多面体である。中でも正多面体は中学校でよくその内容が扱われる。正多面体を学習するときには、教材を用意して実際に作成する活動がよく行われている。

正多面体を作成するとき、教育現場でよく利用されるのは、展

開図による表現である。また、正多面体を構成する複数の正多角形面を結合する表現や、長さが等しい稜を用いて組み立てる表現もよく挙げられる。最近では 3D プリンタで作成することもあるがまだまだ高価で普及が進んでいるとは言えず、教育現場ではより手軽に、そして安価に作成できるものが好まれる。

本稿では、多面体の中でも特に正十二面体に焦点を当て、まず、平面による切断によって立体から正十二面体を切り出す方法を説明する^[1]。次に、切り出す際に、特殊な工具を使わず、教育現場で無理なく正十二面体を作ることを目指す。

2. 準備

立体を切断するとき、立体を固定することが課題となる。一般的には、クランプや万力など様々な固定器具があり、うまく角度を調

節して固定する方法が考えられるが、器具がない場合も多く、また、器具があっても扱いには慣れが必要で、あまり簡単な方法とは言えない。本稿では、学校の教室などでもう少し手軽に、そして比較的安価に実現できる方法を述べる。そのために、まず、直角切断の概念について説明する。

直角切断とは、水平な面（地面）に垂直な平面で立体を切断することである。安定した切断を行う工夫として、図1のような直交する3平面を用いる方法が知られている。平らな地面の上に2つの平面で支えて立体を切断する角度を作ることから、平面角度定規と呼ぶ。

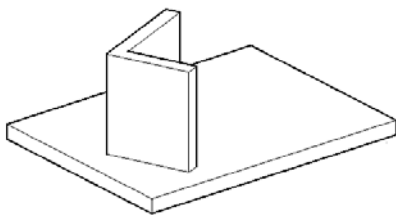


図1：直交する3平面による平面角度定規

平面角度定規は3つの平面を使って立体を固定することができ、切断面が鉛直な、例えば、糸のこ盤のような器具で立体を切断するには非常に使い勝手が良い。図2のように垂直な切断面に沿って、平面角度定規を動かすと、図3のように立体を垂直な平面で切断できる。

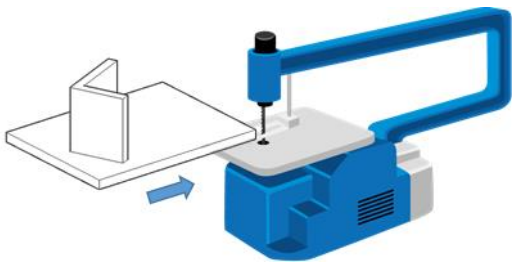


図2：平面角度定規と糸のこ盤¹

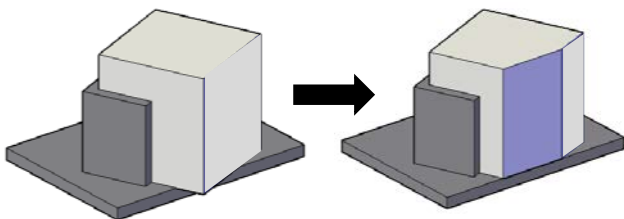


図3：垂直な面で切断する様子

直角切断を行うにあたって、切断面は地面に垂直な2平面の置き方、つまり切断面との角度が重要である。本稿では、文献[1]にならって図4に示すような a と b の比で切断する角度を表し、 $a : b$ の角度と呼ぶ。

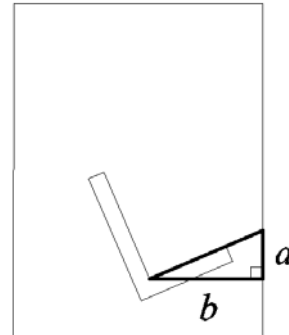


図4： $a : b$ の角度

3. 正十二面体を切り出すときに必要な平面角度定規

正十二面体を実際に切り出す角度は次のように求めることができる。無理数の扱いが必要なため、長さを測って求めるのではなく、次のような作図が必要である。

< 1 : τ の角度の平面角度定規の作成法 >

1. 正方形 OABC を描く。
2. OC の中点を M とする。
3. M を中心に、半径 MB の弧を描き、OC の延長との交点を T とする。

図5（左）はこの作図を説明したものである。このようにしてできあがった三角形 OAT に注目すると、OA と OT の長さの比 $OA : OT$ が $1 : \tau$ となっている（ここで、 $\tau = (1 + \sqrt{5}) / 2$ ）。できるだけ大きく描くことで、角度の精度が増す。

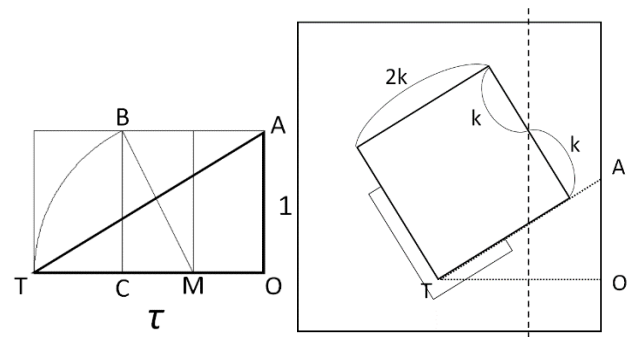


図5：立方体から正十二面体を切り出す平面角度定規の角度と切り出す面の位置

¹ 糸のこ盤の図は「商用フリーイラスト ビジソザ」(bsoza.com)より転載。

このように作った三角形 OAT を水平な面に置き、AT に垂直な面が重なるように、直角に交わる 3 平面を作ることで、正十二面体を切り出す角度ができてあがる。

次は、切り出す場所について考える必要がある。先ほどの OA と平行で、図 5 (右) のように立方体の一辺の中点を通る直線上に切断面がくるように調節する。立方体から正十二面体を切り出すにはこの平面角度定規があれば良い。

4. 立方体から正十二面体を切り出す

ここまでで説明した平面角度定規を用いて、立方体から正十二面体を切り出す方法を説明する。目標は、図 6 のように立方体に内接する正十二面体を作ることである。

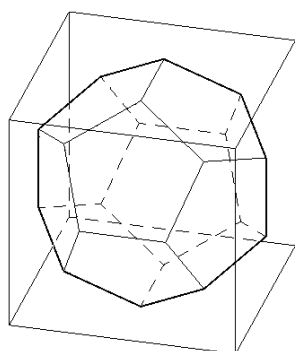


図 6 : 立方体に内接する正十二面体

実は、正十二面体は立方体に 12 回の切稜をする (辺とその周辺部分を切り落とす) だけで現れるのだが、実際に立体を面で切断するには動かさないよううまく固定する必要がある。固定のためには先述した平面角度定規を利用する。実際に切断するにあたって、例えば、次のものを用意する。

用意するもの

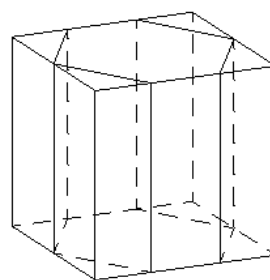
- (1) 発泡スチロール製 一辺 10cm の立方体
- (2) 地面に垂直な面で切る発泡スチロールカッター
- (3) $1:\tau$ の角度の平面角度定規
- (4) いくつかの木材や固定器具

(1) は 100 円ショップで入手できる。発泡スチロール製でなくともよいが、材質を変えた場合は切断機なども適宜変更する。(2) は

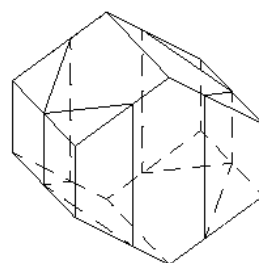
正確に垂直を保ちたい。著者らは 3 千円程度の手持ち用のものを固定したものを使った。(3) は図 5 の通り、 $1:\tau$ の角度で、かつ、立方体の辺の中点を通る平面で切断できるものが必要である。(4) は必要に応じて用意する。平面角度定規で立体を固定して、切断するときに滑らかにスライドできるようにできれば良い。

平面角度定規を用いて立体を固定する場合、3 つの面で支えることになるが、その 3 つの面が立体にどう接するかで安定性が変わる。最も安定するのは、3 面全てが立体の面と接するときであるが、直方体や切頂八面体などの特殊な場合にしか起こらない。接する部分が面でなく、辺や頂点となるとだんだん安定しなくなる。

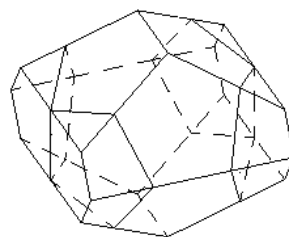
次に示す図 7 は、立方体から正十二面体を切り出す際に、できるだけ安定性するよう考えた手順である。



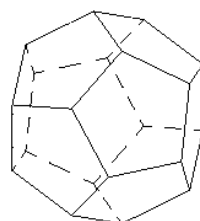
1 稜ずつ回転させながら 4 稜の切稜を行う。切稜の長さが異なるため、長さの取り方に注意する。



横に寝かせ、垂直な 4 稜を切り落とす。



元の立方体の稜で残っている 4 稜が垂直になるように置き、その 4 稜を切り落とす。



出来上がり。

図 7 : 立方体から正十二面体を切り出す手順

5. まとめ

本稿で説明した立方体から正十二面体を切り出す方法は、一つの平面角度定規を用いた12回の切稜で実現できるが、このような平面角度定規は量販店などでは手に入らない。そこで、作図により正確に $1:\tau$ の角度を作り出し、教育現場で教材を作る方法を提案した。この作図が $1:\tau$ を作り出すことを確認するには中学校レベル、切り出した立体が正十二面体であることを確認するには高校レベルの数学の知識が必要となる。

参考文献

- [1] 佐藤郁郎, 中川宏「多面体木工(増補版)」, 科学協力学際センター (2011)