

多目的意思決定における評価の属性構造

石津昌平

1. はじめに

システムの複雑性が増加するに従い、意思決定者はシステムを様々な側面から評価することが必要になってきている。評価する側面が多くても評価関数が明確になっている場合は、基本的に意思決定の問題はモデルの同定と操作量の選択の問題に帰着される。しかし、システムの企画や設計における意思決定、経営的な意思決定（特に非定型な意思決定）においては行為の良否を判断する評価方法自体が不明確であり、モデルの同定や操作量の選択よりむしろ評価方法の設定がより重要な位置を占めてきている。実際、意思決定の過程は①評価尺度の設定、②目標の設定、③代替案の作成、④モデルの作成と予測、⑤代替案の選択に層別することができ、意思決定の良否は評価方法の良否に大きく依存していると言える。

システムの評価方法については効用理論の研究が知られており、多目的評価についても言及されている^{1) 2) 3)}。しかし、これらの研究は主に多次元の属性による評価を1次元の効用に変換する効用関数の存在やその同定を基本的な問題としており、次のような疑問に答えているとは言えない。

- ① 評価を行うためには評価すべき属性を明らかにする必要がある。評価属性の設定はどのように行われているのか？ 種々の評価属性を取り扱う際に評価属性間の関連性はどのように把握すべきか？
- ② 複数のシステムを企画、設計する時、システム毎に評価属性を変えなければならない場合がある。評価属性を変える時にどのような合理性が要求されるのか？

③ 複雑な意思決定においては評価属性の階層化が行われている。評価属性の階層化はいかなる原則に基づいてなされているのか？ また、階層化は意思決定者の価値体系とどのような関係をもっているのか？ 例えば企業経営においてはトップレベルの評価属性、ミドルレベルの評価属性、ローレベルの評価属性というように多くの評価属性の階層が存在している。これらの評価属性の階層の背後に意思決定者の価値体系があるとすれば、各階層の評価属性間にもどのような合理性が要求されるべきか？

例えば図1に示す製品の評価の場合、①製品企画から製造までの各評価間の関連性をどう把握するか、②製品の企画方法によって設計の評価方法を変えなければならない場合、評価属性をいかに変えるべきか、③製品企画の評価から製造における評価まで評価の階層が形成されているが、評価の階層を支える合理性は何かと言うと問題意識である。これらの問題意識は製品を提供する企業内の評価体制の整備において重要であるだけでなく、戦略により評価属性が多様に変化する戦略的意思決定を考える上で避けて通れない問題と言えよう。

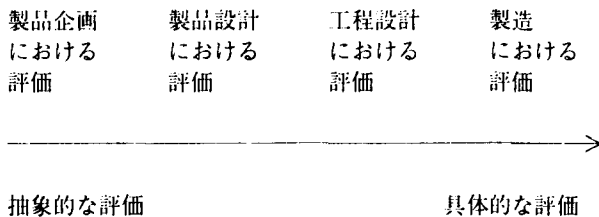


図1 製品の評価

これらの問題に対処するためには意思決定者の持つ評価体系と評価属性を合理的に表現する理論的枠組みが必要である。システムの属性間の関連性に着目した研究としては、システムの質的性質（特に製品の品質）間の関連性に基づく管理論の研究や^{3, 4)}、システム属性の依存関係を分析した関係データベース理論の研究や^{7, 9)}、システム属性に着目したシステム表現の研究¹⁾等がある。これらの研究ではシステムの一つのメタ知識として属性間の関連性の知識の重

要性が認識されている。本論文はこの認識に従うものであり、多くの評価属性を持つ多目的意思決定における評価属性の構造（評価構造）を分析するための理論的枠組みを提案することを目的としている。

本論文は数学的一般システム理論のフレームワークのもとで議論を進める。これは本論文で対象とする意思決定の研究は概念整理の段階であり、数学的一般システム理論は概念整理の段階であり、数学的一般システム理論は概念整理に有効と考えられるからである。

2. 価値体系の多属性表現

本節ではシステムの属性に着目して意思決定者の価値体系がどのように表現されるか定式化する。このため、まず意思決定者の価値体系の定式化から始める。意思決定者の価値体系を $VS = \langle X, P \rangle$ とする。但し、 X は意思決定者が想定している代替案あるいは結果の集合であり、 P は $P \subset X \times X$ なる X 上の選好関係とする。

多次元の評価を行う時、通常我々は各々の評価属性を「かつ」で結んで評価していると言える。多目的意思決定におけるパレート解はこのような評価属性のもとで生じる解である。各々の評価属性が全順序（線形順序）の場合、それらを「かつ」で結ぶと半順序が得られる。逆に価値体系が半順序であれば、各評価属性は全順序であり、それらを「かつ」で結ぶことによって価値体系を表現することができる。また、任意の $\Delta \subset P$ を満たす選好関係 P （ただし、 $\Delta = \{(x, x) \mid x \in X\}$ とする）は半順序集合の和集合として表すことができる。これにより「多属性表現」のモチベーションとなる次の命題を得ることができる。

命題1. 価値体系 $VS = \langle X, P \rangle$ に対して、 P は $\Delta \subset P$ を満たしているとする。この時、次の条件を満足する $ES = \langle \Pi \{X_a \mid a \in A\}, ST, \{T_a \mid a \in A\} \rangle$ と、 X から $\Pi \{X_a \mid a \in A\}$ への関数 f が存在する。

$$\forall x, y \in X: \{(x, y) \in P\} \leftrightarrow \{\exists I \in ST; \forall a \in I: \{(f(x))_a, (f(y))_a\} \in T_a\}. \quad (1)$$

但し,

$\Pi \{X_a \mid a \in A\} : \{X_a \mid a \in A\}$ の直積集合,

A: 属性の集合,

X_a : 属性 $a \in A$ の値の集合,

Π : 直積集合を表す,

$ST \subset P(A)$: 属性集合の族,

$P(A)$: A の部分集合のすべての集合,

$T_a \subset X_a \times X_a$: X_a 上の全順序集合 ($a \in A$),

() a : $\Pi \{X_b \mid b \in A\}$ から X_a への射影作用素 ($a \in A$). (2)

(証明は付録を参照のこと)

命題 1 では各評価属性に全順序を仮定している。全順序ではどの値との比較も可能であり、推移律も満たしており、非常に理解し易く意思決定においても使用し易い順序と言えるからである。命題 1 は各評価属性は全順序という理解し易い順序であっても、属性間の関連性を考慮に入れることにより様々な選好関係が表現できることを示している。

定義 1. (評価空間 ES)

条件(2)を満たす $ES = \langle \Pi \{X_a \mid a \in A\}, ST, \{T_a \mid a \in A\} \rangle$ を評価空間と呼ぶ。

評価空間 $ES = \langle \Pi \{X_a \mid a \in A\}, ST, \{T_a \mid a \in A\} \rangle$ において $\Pi \{X_a \mid a \in A\}$ は属性の集合 A により構成される層性システムであり、全順序集合 X_a の直積空間を表している。ST は評価属性間の関連性を表すものであり、各 $I \in ST$ について全順序を「かつ」で結んだ評価空間が構成される。この意味で ST は評価空間の多様性を表しており、ST を評価構造と呼ぶことにする。

定義 2. (多属性表現可能性)

条件(1)を満足する X から $\Pi \{X_a \mid a \in A\}$ への上への関数 f が存在する時、価値体系 $VS = \langle X, P \rangle$ は評価空間 $ES = \langle \Pi \{X_a \mid a \in A\}, ST, \{T_a \mid a \in A\} \rangle$ において多属性表現可能と呼ぶ。

f は結果の集合 X から評価空間への関数であり結果の測定と言える。定義 1,

2に従えば命題1は「任意の価値体系 $VS = \langle X, P \rangle$ において P が $\Delta \subset P$ を満たしているならば多属性表現可能な評価空間が存在する」と言う意味になる。意思決定者は評価属性間の複雑性を受け入れてることによって、各評価属性を全順序にして評価し易くしていると言える。価値体系と評価空間の関係を図2に示す。

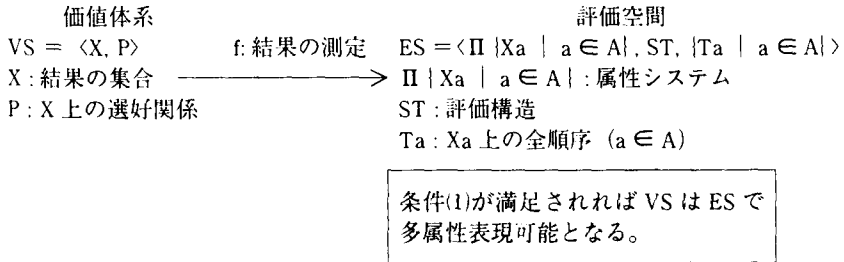


図2 価値体系と評価空間

価値体系 $VS = \langle X, P \rangle$ は評価空間 $ES = \langle \Pi \{X_a \mid a \in A\}, ST, \{T_a \mid a \in A\} \rangle$ において多属性表現可能の時、 $f(X)$ は $f(X) \subset \Pi \{X_a \mid a \in A\}$ であり、次の S と R が自然に定義される。

$$S = F(X),$$

$$R = \{(s, s') \in S \times S \mid \exists I \in ST; \forall a \in I; ((s)a, (s')a) \in T_a\} \quad (3)$$

この R によって S の自然な評価が可能となる。 S と R は価値体系 VS の X と P を評価空間 ES 上で表現したものであり、 S と R の対 $EAS = \langle S, R \rangle$ を評価属性システムと呼ぶことにする。

3. 評価属性の関連性

評価属性の階層性を議論するためには、評価属性間の関連性を明らかにする必要がある。特にトップレベルの評価からミドルレベル、ローレベルの評価という評価の階層は、トップレベルの抽象的な評価からローレベルの具体的

な評価に移行する過程と見なすことができる。以下では評価空間 $ES = \langle \Pi \{X_a \mid a \in A\}, ST, \{T_a \mid a \in A\} \rangle$ と評価属性システム $EAS = \langle S, R \rangle$ の枠組みの中で、抽象性に着目した評価属性間の関連性の概念を定義する。

まず $I \subset A$ なる各 I に対して次のような $R[I]$ を定義する。

$$R[I] = \{(s, s') \in S \times S \mid \forall a \in I; ((s)a, (s')a) \in T_a\} . \quad (4)$$

$(s, s') \in R[I]$ であるとは、属性 I における評価では s より s' の方が好ましいことを表している。

同様に $D \subset P(A)$ なる任意の D に対しても $R[D]$ が定義できる。

$$R[D] = \cup \{R[I] \mid I \in D\} . \quad (5)$$

定義 3. (評価属性間の抽象性)

A の部分集合 I, J が次の条件を満足する時、 J は I より抽象的な評価属性であるという。

$$\forall s, s' \in S; (s, s') \in R[I] \rightarrow (s, s') \in R[J]. \quad (6)$$

(6)式を満足する全ての (I, J) の集合を AD とし、 AD を抽象的依存関係と呼ぶことにする。

$(I, J) \in AD$ は I の属性について好ましかれば J の属性についても好ましいことを表しており、 I での評価は J より詳しく具体的であり、逆に J での評価は I より単純で抽象的な評価であることを表している。製品の評価の階層の例では、設計された製品は企画段階の評価を満足しなければならず、製造された製品は設計段階の評価を満足しなければならない。このことは評価の階層の上位と下位の評価属性には抽象的依存関係が要請されていることを示しており、抽象的依存関係は評価の階層を分析する上で1つの視点を与えていると言える。

任意の $I, J \in P(A)$ において $(I, J) \in AD$ かつ $(J, I) \in AD$ の時、 I と J は AD について等価であると言える。定義 3 より AD について等価な属性集合における最大の属性集合の存在を示すことができる。特に、 A が有限集合の時、 A は極小な属性集合が存在する。

命題 2. 任意の $I \in P(A)$ に対して、

- ① $(I, I^*) \in AD$ なる最大の I^* が存在する。
 ② A が有限集合の時, $(I^*, I) \in AD$ なる極小の I^* が存在する。

(証明は付録を参照のこと)

通常 AD に関する知識は個々の $s, s' \in S$ から調査されるよりも, 意思決定者の経験的な知識や属性間の論理的な関連性から得られることが多く, AD に関する論理性を分析することは有用である。このためには抽象的依存関係のある集合 D が意思決定者にとって既知の時, D からどれだけの依存関係が演繹できるかを示す推論規則が必要である。

定義4. (抽象的依存関係の推論規則)

- ① $I, J \in P(A)$ かつ $I \supset J$ の時, (I, J) は抽象的依存関係となる。
 ② $I, J, K \in P(A)$ かつ $(I, J), (J, K) \in D$ の時, (I, K) も抽象的依存関係となる。
 ③ $I, J, K \in P(A)$ かつ $(I, J) \in D$ の時, $(I \cup K, J \cup K)$ も抽象的依存関係となる。 (7)

定義4の3つの条件は関係データベース理論^{7, 9)}における関数的依存関係の公理と同じものであり, この3つの条件は抽象的依存関係の公理とも呼べるものである。実際この3つの条件は無矛盾性と完全性という推論規則における好ましい性質を満足する。ここで無矛盾性とは公理から余分な依存関係を導かないことであり, 完全性とは任意の依存関係の集合 $D \subset P(A)$ に対して D から論理的に得られる全ての依存関係が公理により求められることである。公理の無矛盾性と完全性については関係データベース推論における関数的依存関係の場合と同様な手順で示すことができる。

命題3.

抽象的依存関係の推論規則は無矛盾かつ完全である。

(証明は付録を参照のこと)

4. 評価属性の階層

以下では多属性表現と抽象的依存関係の概念に基づき、評価階層を定義し、評価階層の妥当性と効率性について分析する。

4. 1. 評価階層の定義

評価属性の階層として n レベルの階層を考える。各レベルにはいくつかの代替的な評価属性が存在し、下位レベルの各評価階層に対しての上位のレベルの評価属性への対応関係が存在すると考えられる。

定義 5. (評価階層)

$H_n, \dots, H_0 \subset P(A)$ とする。各 $m = 0, \dots, n - 1$ に対して H_m から H_{m+1} への上への関数 h_m が存在する時、 (H_n, \dots, H_0) を評価階層と呼ぶ。

定義 5 における h_m は各レベル間の評価属性の階層関係を示している。図 3 に評価階層の簡単な例を示す。この例では $H_2 = \{I_{21}\}$, $H_1 = \{I_{11}, I_{12}\}$, $H_0 = \{I_{01}, I_{02}, I_{03}, I_{04}\}$ であり、 h_1 は I_{11} と I_{12} を I_{21} に対応づけ、 h_0 は I_{01} と I_{02} を I_{11} に、 I_{03} と I_{04} を I_{12} に対応づけている。

h_m が関数であることから各評価属性について上位の評価属性はただ 1 つ存在することになり、評価階層における次の 2 つの補助概念を定義することができる。

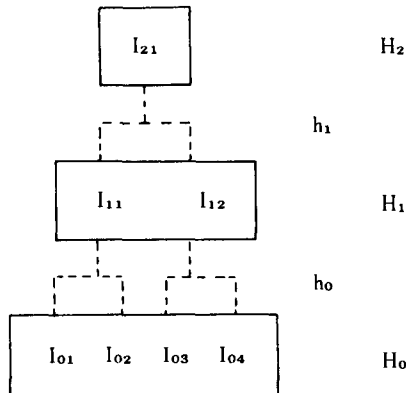


図 3 評価階層の例

定義6. (下位の評価属性と評価列)

(H_n, \dots, H_0) を評価階層とする。

① $m = 1, \dots, n$ とし, $I_m \in H_m$ とする。次の $\text{low}(I_m)$ を I_m の下位の評価属性と呼ぶ。

$$\text{low}(I_m) = \{I_{m-1} \in H_{m-1} \mid h_{m-1}(I_{m-1}) = I_m\}. \quad (8)$$

② 次の条件を満たす $(I_n, \dots, I_0) \in H_n \times \dots \times H_0$ を評価列という。

$$\forall m = 1, \dots, n: I_m = h_{m-1}(I_{m-1}). \quad (9)$$

下位の評価属性は、各レベルの評価属性に対して下位で階層関係にある評価属性の集合を表しており、現レベルの評価の次に下位レベルで評価すべき評価属性の代替案の集合を表すものである。評価列は、最上位のレベル (n レベル) の評価属性から階層関係にしたがって順次最下位レベル (0 レベル) の評価属性まで評価を行う際の評価属性の列を表すものである。

図3の例では、 $\text{low}(I_{11}) = \{I_{01}, I_{02}\}$ となり、 (I_{21}, I_{11}, I_{01}) 等が評価列となる。

4. 2. 評価階層の妥当性

評価階層が意思決定者の持ち価値体系を正しく表現しているか否かは評価階層全体の妥当性を考える上で重要な問題と言える。評価階層において上位から順次評価がなされ、最終的に 0 レベルの評価によって価値が判断されるとすれば、この問題はレベル 0 の評価属性が価値体系を正しく表現しているか否かの問題とみなすことができる。

定義7. (階層システム表現)

価値体系 $VS = \langle X, P \rangle$ が評価空間 $ES = \langle \Pi \{X_a \mid a \in A\}, H_0, \{T_a \mid a \in A\} \rangle$ において多属性表現可能の時、 VS は評価階層 (H_n, \dots, H_0) において階層表現可能であると呼ぶ。

評価階層の各評価列が上位の抽象的な評価から順次具体的な評価を行っているか否かは評価階層における階層関係の妥当性を考える上で重要な問題と言える。この問題を評価階層が下位レベルに対して具体化という一貫した評価列からなるか否かの問題としてとらえて定式化する。

定義 8. (評価階層の一貫性)

評価階層 (H_n, \dots, H_0) が一貫しているとは、評価階層における各評価列 $(I_n, \dots, I_0) \in H_n \times \dots \times H_0$ に対して次の条件が成立することである。

$$\forall m = 1, \dots, n; (I_{m-1}, I_m) \in AD. \quad (10)$$

評価階層の妥当性として、定義 7 では意思決定者の価値体系が評価階層に正しく反映されていることを示しており、定義 8 では評価属性の依存関係が評価階層に正しく反映されていることを示している。

4. 3. 評価階層の効率性

評価属性の上位から順次評価を進めていく時、各評価列 (I_0, \dots, I_n) で必ずしも全ての属性を評価する必要はない。実際、 $m = 1, \dots, n$ なる任意の I_m で評価が満足されているならば、依存関係 AD より $(I_m)^+$ の属性についても満足されることが保証できる。このため次の段階では $I_{m-1}^- (I_m)^+$ の属性についてのみ評価すれば良い。 $I_{m-1}^- (I_m)^+$ が小さい方が I_m の段階で具体的な評価が可能となる。評価階層の一貫性の立場からは、 I_m は各 $I_{m-1} \in \text{low}(I_m)$ に対して抽象的な方が望ましく、評価の効率の立場からは、 I_m は各 $I_{m-1} \in \text{low}(I_m)$ に近い具体的な評価が望ましいと言える。両者を満足する評価階層として、効率的評価階層の定義を行う。

定義 9. (効率的評価階層)

評価階層 (H_n, \dots, H_0) が効率的であるとは、各 $I_m \in H_n (m = 1, \dots, n)$ が次の条件を満足することである。

- ① $\forall I_{m-1} \in \text{low}(I_m); (I_{m-1}, I_m) \in AD,$
- ② $\forall I \in P(A); \{\forall I_{m-1} \in \text{low}(I_m); (I_{m-1}, I) \in AD\} \rightarrow (I_m, I) \in AD. \quad (11)$

①の条件は一貫性の条件であり、②の条件は一貫性を満足する評価属性の中で I_m が最も具体的であることを示している。効率的な評価階層を構成する 1 つの方法は、評価属性の共通性に着目する方法である。実際、定義 10 のように属性の共通性をとらえることにより効率的な評価階層を構成するための条件が導かれる。

定義10. (共通属性)

任意の $B \subset P(A)$ に対して次の $\oplus B$ を B の共通属性と呼ぶ。

$$\oplus B = \bigcap \{I^* \mid I \in B\}.$$

命題4.

評価階層 (H_n, \dots, H_0) に対して次の2つの条件は等価である。

- ① 評価階層 (H_n, \dots, H_0) は効率的である。
- ② $\forall m = 1, \dots, n: \forall I_m \in H_m: I_m$ と $\oplus \text{low}(I_m)$ は AD に関して等価である。

(命題は付録を参照のこと)

5. む す び

システムが複雑になるに従い、意思決定者が評価しなければならないシステムの評価属性は増加してきており、評価属性間の関連性をいかに把握し、評価するかが重要な課題となってきた。本論文では多数の評価属性を持つ多目的意思決定における評価属性間の関連性を分析するため、価値体系の多属性表現、評価属性間の依存関係、評価の階層について定式化を行った。これは多目的意思決定における属性構造を分析するための理論的枠組みを与えるものであり、複雑化するシステムを対象とする意思決定の合理性を明らかにするための1つのアプローチと言える。なお、この論文の作成にあたり池庄司英臣先生から貴重な御助言を賜りました事に感謝いたします。

〈参考文献〉

- 1) Fishburn, P.C.: Utility theory for decision making, John Wiley, New York, (1970).
- 2) Fishburn, P.C.: Mathematics of decision theory, UNESCO, (1972).
- 3) Furukawa, O., H. Ikeshoji, S. Ishizu: "Flexible quality control system-theory and application," Int. J. Systems Research, Vol. 2, No. 2, pp. 117 - 130,

- (1985).
- 4) Furukawa, O., H. Ikeshoji, A. Ohmori: "A methodology for quality goal seeking and coordination, and a practical application." Int. J. Systems Research, Vol. 1, No. 1, pp. 71-82, (1984).
 - 5) Ikeshoji, H., M.D. Mesarovic, O. Furukawa: "Attributes and complexity in general systems," Systems Sci., Vol. 8, No. 2-3, pp. 25-36, (1982).
 - 6) キニー, ライファ著, 高原等監訳: 「多目的問題解決の理論と実際」, 企画センター, (1980).
 - 7) Maier, D.: The theory of relational databases, Computer Science Press, (1982).
 - 8) Pfanzgal, J.: Theory of measurement, Physica-Verlag Rudolf Liebing, (1971).
 - 9) アルマン著, 國井等訳: 「データベース・システムの原理」, 日本コンピュータ協会, (1985).

付 録

(命題 1 の証明)

$A = \{xy_1, xy_2 \mid (x, y) \in P\}$, $ST = \{\{xy_1, xy_2\} \mid (x, y) \in P\}$, 各 $(x, y) \in P$ に対して $Xxy_1 = Xxy_2 = X$ とする。各 $(x, y) \in P$ に対して Zermelo の定理より $X - \{x, y\}$ 上の全順序集合 T_1 が存在する。 T_2 を $T_2 = \{(v, w) \mid (w, v) \in T_1\}$ とする。

$$T_{xy_1} = \{(x, y) \cup T_1 \cup \{(x, v) \mid v \in X\} \cup \{(y, v) \mid v \in X, v \neq x\},$$

$$T_{xy_2} = \{(x, y) \cup T_2 \cup \{(v, x) \mid v \in X, v \neq y\} \cup \{(v, y) \mid v \in X\},$$

とする。 T_{xy_1} , T_{xy_2} は定義よりそれぞれ Xxy_1 , Xxy_2 上の全順序集合となり, $T_{xy_1} \cap T_{xy_2} = \Delta \cup \{(x, y)\}$ となる。 $f: X \rightarrow \Pi \{X_a \mid a \in A\}$ を $(f(x))_a = x$ とする。最後に $ES = \langle \Pi \{X_a \mid a \in A\}, ST, \{T_a \mid a \in A\} \rangle$ と f が条件(1)を満足することを示す。 $(x, y) \in P$ とすると $\{xy_1, xy_2\} \in ST$ となり, 各 $a \in \{xy_1, xy_2\}$ に対して $((f(x))_a, (f(y))_a) \in T_a$ となる。逆に $I \in ST$ が存在して,

任意の $a \in I$ に対して $((f(x))a, (f(y))a) \in Ta$ とする。 $I = \{vw1, vw2\}$, $(v, w) \in P$ となる $v, w \in X$ が存在し, $Tvw1 \cup Tvw2 = \Delta \subset \{(x, y)\}$ となる。よって $x = y$ もしくは $x = v, y = w$ となり, いずれの場合も $(x, y) \in P$ となる。

(証明終り)

(命題2の証明)

① $I^* = \cup \{J \mid (I, J) \in AD\}$ とする。 $(s, s') \in R|I|$ とすると, 各 $a \in I^*$ に対して $a \in J$ かつ $(I, J) \in AD$ なる J が存在する。よって $((s)a, (s')a) \in Ta$ となり, $(s, s') \in R|I^*|$ となる。 I^* の最大性は定義より明らかである。

② AD の定義3より $(I, I) \in AD$ となり, $(J, I) \in AD$ なる J が存在する。もし $(J - \{a\}, I) \in AD$ なる $a \in J$ が存在するならば J を $J - \{a\}$ に置き換える。これを全ての $a \in J$ について $(J - \{a\}, I) \in AD$ となるまで繰り返す。この操作は A が有限なので有限回で終了する。またこの操作によって得られた J は極小となる。

(証明終り)

(命題3の証明)

(無矛盾性の証明)

① $I \supset J$ とし, $(s, s') \in R|I|$ とする。各 $a \in J$ について $a \in I$ だから仮定により, $((s)a, (s')a) \in Ta$ となる。

② $R|I| \subset R|J|$ かつ $R|J| \subset R|K|$ より $R|I| \subset R|K|$ となる。

③ $(I, J) \in D$ とし, $(s, s') \in R|I \cup K|$ とする。各 $a \in J \cup K$ に対して $a \in J$ の時は $(I, J) \in D$ より, $a \in K$ の時は $(s, s') \in R|I \cup K|$ より $((s)a, (s')a) \in Ta$ となり, $(s, s') \in R|J \cup K|$ となる。

(完全性の証明)

D を従属性の集合とし, D^* を D より公理から導出される全ての従属性の集合, $I^* = \cup \{L \mid (I, L) \in D^*\}$ とする。 (I, J) を条件(7)の公理から導出不可能とする。即ち $(I, J) \notin D^*$ とする。この時 $(I, J) \notin AD$ となる属性システム S が存在することを示す。属性システム $S \subset \{Xa \mid a \in A\}$ を $S = \{s_0, s_1\}$ とする。但し, 各 $a \in I^*$ に対して $(s_0)a = 1$ とし, $a \notin I^*$ に対して $(s_0)a = 0, (s_1)a = 1$ とする。

S から定義される AD に対して $K, L \in AD$ の時, $K \not\subset I^+$ もしくは $L \subset I^+$ ならば $(K, L) \in AD$ となる。実際, $K \not\subset I^+$ ならば $R[K] = \{(s_0, s_0), (s_0, s_1), (s_1, s_1)\}$ となり, 任意の L について $(K, L) \in AD$ となる。また $L \subset I^+$ ならば $R[L] = \{(s_0, s_0), (s_0, s_1), (s_1, s_0), (s_1, s_1)\}$ となり, 任意の K について $(K, L) \in AD$ となる。

まずこの S について各 $(K, L) \in D$ が $(K, L) \in AD$ となることを示す。 $(K, L) \in D$ かつ $(K, L) \notin AD$ と仮定し矛盾を導く。 $(K, L) \notin AD$ より $K \cup I^+$ かつ $L \not\subset I^+$ となる。しかし, $K \subset I^+$ より $(I, K) \in D^+$ となり, $(K, L) \in D^+$ より $(I, L) \in D^+$ となり各 $a \in L$ に対して $a \in I^+$ となる。これは $L \not\subset I^+$ に矛盾する。よって $(K, L) \in D$ ならば $(K, L) \in AD$ となる。

次に $(I, J) \notin AD$ を示す。 $(I, J) \notin D^+$ だから $J \not\subset I^+$ となり, $I \subset I^+$ なので $R[I] = \{(s_0, s_0), (s_0, s_1), (s_1, s_0), (s_1, s_1)\}$, $R[J] = \{(s_0, s_0), (s_0, s_1), (s_1, s_1)\}$ となり, $R[I] \not\subset R[J]$ 即ち $(I, J) \notin AD$ となる。

以上により $(I, J) \notin D^+$ ならば $(I, J) \notin AD$ となる S が存在する事が示された。
(証明終り)

(命題 4 の証明)

①→② (H_0, \dots, H_n) は効率的であるとする。 $m = 1, \dots, n$ とし, $I_m \in H_m$ とする。定義 9-②において各 $I_{m-1} \in \text{low}(I_m)$ に対して $(I_{m-1}, \oplus \text{low}(I_m)) \in AD$ だから $(I_m, \oplus \text{low}(I_m)) \in AD$ となる。また定義 9-①より各 $I_{m-1} \in \text{low}(I_m)$ に対して $(I_{m-1}, I_m) \in AD$ となる。即ち $I_m \subset (I_{m-1})^+$ となり $I_m \subset \bigcap \{(I_{m-1})^+ \mid I_{m-1} \in \text{low}(I_m)\} = \oplus \text{low}(I_m)$ となる。よって $(\oplus \text{low}(I_m), I_m) \in AD$ となる。

②→① $m = 1, \dots, n$ とし, $I_m \in \text{low}(I_m)$ とする。 $(I_{m-1}, (I_{m-1})^+) \in AD$, $((I_{m-1})^+, \oplus \text{low}(I_m)) \in AD$ となり, $\oplus \text{low}(I_m)$ と I_m は等価であるから, 推移性により $(I_{m-1}, I_m) \in AD$ となる。次に定義 9-②を示す。 $I \in P(A)$ が各 $I_{m-1} \in \text{low}(I_m)$ について $(I_{m-1}, I) \in AD$ を満足するとする。各 I_{m-1} について $I \subset (I_{m-1})^+$ より $I \subset \bigcap \{(I_{m-1})^+ \mid I_{m-1} \in \text{low}(I_m)\} = \oplus \text{low}(I_m)$ となり $\oplus \text{low}(I_m)$ と I_m は等価であるから, $(I_m, I) \in AD$ となる。
(証明終り)