

# 不等式制約下の最適値問題への ニュートン法の適用<sup>1)</sup>

三 土 修 平

## I. 問題の所在

よく知られているように、経済問題の多くは一般均衡方程式で表現されるが、一般均衡方程式はその一部分として各経済主体の最適化を表現する式を含んでいる。このように、一般均衡方程式と最適値問題とのあいだには元来緊密な関係があるが、特に注目すべきことは、家計が1個の場合の最も単純な一般均衡方程式は、制約条件付きの最適値問題そのものになるということである。つまり、一般均衡方程式は、最適値問題のひとつの拡張と考えることができる。

こう考えたとき、両者のあいだに共通な解法を確立しておくことが、経済問題の数値解析にとって有利であることがわかる。

ひらがえって現状を見ると、必ずしもそのようにはなっていない。制約条件付き最適値問題に対しては、線形計画の場合のシンプレックス法に代表されるように、目的関数の値が改善される方向を直接に探索する方法が支配的であり、一般均衡方程式に対しては、写像の不動点を探索する方法が支配的である<sup>2)</sup>。

---

1) 本稿の作成にあたっては、草案の段階で、大阪大学社会経済研究所教授久我清氏より、書面による有益なご教示を賜った。また、1992年6月の理論・計量経済学会西部部会において、本稿のテーマでの筆者の報告に対して大阪大学経済学部助教授神谷和也氏より有益なコメントを賜った。記して謝意を表す。もとより、本稿に含まれているかもしれない誤りについては、筆者一人がその責に任ずる。

2) 経済問題にしばしば現れる凸計画に関しては、その解がラグランジュ関数の鞍点になることを利用した gradient method が解法として一般的である (宇沢[1], pp. 207-229.)。一般均衡方程式に関しては Scarf[5]等によって解を求めるアルゴリズムが開発されている。

ところで、制約条件つき最適値問題は、その古典的形態においては、ラグランジュ関数のグラディエントベクトルが零ベクトルに等しいという条件を極値の1階の条件としてもつため、元来、連立方程式の解法になじむものである<sup>3)</sup>。連立方程式の解法としては、解の近傍における収束性において優れているニュートン法が古くから知られている。ただ、ニュートン法には、大域的収束性に欠ける(任意の初期値からの収束が期待できない)という欠陥があり、これが経済解析において必ずしもこの方法が歓迎されてこなかった理由のひとつとなっている。

しかし、ニュートン法のこの欠陥は、次に述べるホモトピー法の併用によって多くの場合克服できることが最近では知られている<sup>4)</sup>。

解くべき連立方程式をまとめてベクトルで

$$F(\mathbf{x}) = \mathbf{o} \quad (1)$$

と表現することにしよう。

$F$  のヤコビ行列を  $J(\mathbf{x})$  と表わすことにする。

方程式の左辺に任意の値  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$  を代入すると、一般に  $F(\mathbf{x}) \neq \mathbf{o}$  であって、 $\mathbf{x}_0$  は方程式(1)の解にはならないが、ここでもうひとつの方程式

$$F(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}_0) \quad (2)$$

を立てると、 $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$  はこの方程式の自明な解になっている。さていま、新たにパラメーター  $t$  を含む方程式

$$H(\mathbf{x}, t) \equiv F(\mathbf{x}) - tF(\mathbf{x}_0) = \mathbf{o} \quad (3)$$

を立てると、この方程式の  $t = 1$  のときの解は既知の自明解であり、 $t = 0$  のときの解が方程式(1)の解ということになる。したがって、 $H(\mathbf{x}, t) = \mathbf{o}$  を満足

3) 田辺[4]によれば、目的関数が非線形である場合の制約条件つき最適値問題の解法としては、1960~70年代には、障壁関数法 (barrier function method) や罰金関数法 (penalty function method) など、制約条件式に何らかの加工をほどこした式を目的関数に加えて、問題を制約なしの最適値問題に帰着させて解く解法が愛好された。しかしこれらの方法は、解の探索が最終段階に近づくほど目的関数の準位集合がつぶれた形になるという好ましくない性質をもっているため、近年では極値の必要条件を表わす方程式や不等式に直接に着目する方法のほうが主流となりつつある。

4) ホモトピー法についての簡単な解説は田辺[4], p. 649に示されている。より詳細な解説は Kehoe[3], pp. 2061-2065を参照。

する  $(x, t)$  の集合を  $t = 1$  から  $t = 0$  まで追跡すれば方程式(1)の解に到達できることになる。

いま, (3)式を書き直して

$$F(x) = tF(x_0) \quad (4)$$

とし, 全微分すると

$$J(x)dx = dtF(x_0) \quad (5)$$

となるので, 求める集合は  $x(1) = x_0$  を境界値とする微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = [J(x)]^{-1} F(x_0) \quad (6)$$

の解ということになる。実際の計算にあたっては離散的に計算するので,

$$x(t + \Delta t) = x(t) + [J(x(t))]^{-1} F(x_0) \Delta t \quad (7)$$

という差分方程式を逐次計算して<sup>5)</sup>,  $t = 0$  となったときに計算を打ち切り, そのときの  $x$  の値を解と見なすことになる。その値は方程式(1)の真の解からは少しだけずれることになるが, 最後に, それを予測値とするニュートン法を実行すれば, 方程式(1)の解を高い精度で求めることができる。

なお, (6)式や(7)式に登場する逆行列  $[J(x)]^{-1}$  は, 通常のニュートン法のサブルーチンの線形計算の部分に登場する逆行列と全く同じである。

このようにして, ニュートン法を大域的収束性をもつ方法へと拡張できるかぎり, 制約条件つき最適値問題を解くにあたって, その1階の条件に着目してニュートン法で解くことは, 賢明な選択であると言える。なぜなら, 最適値問題の拡張としての一般均衡方程式は, それ自身が最初から連立方程式体系であるため, ニュートン法に最初からなじみやすいからである。

5) この差分方程式を実際に数値積分する際には,  $\det J[x(t)]$  が0に近い場所では,  $x(t)$  の変化量が  $\Delta t$  に比して極端に大きくなるという不都合が起こる。さらに不幸な場合としては, この行列式の符号が計算途上で逆転し, 経路が一時的に  $t$  の値の増大する方向に向かうという場合も考えられる。これらの不都合があっても計算が続行できるようにアルゴリズムを修正したものが Smale[6]による global Newton method であり, 筆者も, 後にVにおいて示す計算例の作成にあたっては, global Newton method を用いている。そのアルゴリズムの要点は, 1ステップごとの経路の進行距離が  $(x, t)$  空間内で一定になるように,  $\Delta t$  の大きさを毎回調節すること, および, 行列式の反転が生じたときには  $\Delta t$  の符号を逆転させることである。詳しくは Ginsburgh & Waelbroeck [2], pp. 97-103 および Kehoe [3], pp. 2061-2065 を参照。

ところが、このように考えてきたときに、大きな障害として前途に立ちはだかってくるのが、不等式制約条件という問題である。古典的なラグランジュ乗数法では制約条件式はすべて等式であることが前提とされており、その帰結として、極値の1階の条件もまた、すべて等式で表現されるのだが、現代の経済学で用いられる最適値問題は、多くの場合、いわゆる「非線形計画」すなわち不等式制約下の最適値問題である。この種の問題の極値の1階の条件は、クーン=タッカーの条件であり、不等号を含む式となる。そこで、この種の式に対してどうやったらニュートン法を適用できるかということが、いまや、われわれの課題となるのである。

## II. 非線形計画問題の等式体系への還元

以下、 $m$  個の変数と  $n$  本の制約条件式をもつ非線形計画問題を題材として、考察を進めることにする。

変数の組をベクトル  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m)$  で表わす。

関数  $g_i(\mathbf{x})$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) を凸関数、 $f(\mathbf{x})$  を凹関数として、問題を次のように定式化しよう。

$$\begin{array}{l} \text{Maximize } f(\mathbf{x}) \\ \text{subject to } \left\{ \begin{array}{l} g_i(\mathbf{x}) \leq k_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{o}. \end{array} \right. \end{array} \quad (8)$$

なお、制約条件式としては右辺が0である形を用いるのが数学的にはふつうだが、経済問題としては、右辺に定数をおいて資源の量と解釈すると話がわかりやすいので、このような形を採用することにした。

ここで、第  $i$  番目の制約条件式に対応するラグランジュ乗数を  $\lambda_i$  とおき、この問題に対するラグランジュ関数を次のように構成する。

$$L = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^n \lambda_i [k_i - g_i(\mathbf{x})]. \quad (9)$$

すると、クーン=タッカーの定理により、ベクトル  $\mathbf{x}$  が問題(8)の最適解であ

するための必要十分条件は、あるラグランジュ乗数の組  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  があって、ベクトル  $\mathbf{x}$  とのあいだで以下の諸式が満たされていることである。

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} \equiv f_j(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^n \lambda_i g_{ij}(\mathbf{x}) \leq 0, \quad x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m). \quad (10)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} \cdot x_j = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m). \quad (11)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_i} \equiv k_i - g_i(\mathbf{x}) \geq 0, \quad \lambda_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (12)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_i} \cdot \lambda_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (13)$$

ただし、 $f_j(\mathbf{x})$  は  $f(\mathbf{x})$  を  $x_j$  で偏微分して得られる偏導関数、 $g_{ij}(\mathbf{x})$  は  $g_i(\mathbf{x})$  を  $x_j$  で偏微分して得られる偏導関数を表わしている。

ここで問題の見通しをよくするために、線形計画の場合との対応関係を考えてみよう。線形計画の場合ならば、目的関数および関数  $g_i(\mathbf{x})$  は、それぞれ次のような形をしているであろう。

$$f(\mathbf{x}) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_m x_m. \quad (14)$$

$$\left. \begin{aligned} g_1(\mathbf{x}) &= a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1m} x_m \\ g_2(\mathbf{x}) &= a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2m} x_m \\ &\dots\dots\dots \\ g_n(\mathbf{x}) &= a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \dots + a_{nm} x_m \end{aligned} \right\} (15)$$

この場合、(10)式に相当するものは次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} p_1 - a_{11} \lambda_1 - a_{21} \lambda_2 - \dots - a_{n1} \lambda_n &\leq 0 \\ p_2 - a_{12} \lambda_1 - a_{22} \lambda_2 - \dots - a_{n2} \lambda_n &\leq 0 \\ &\dots\dots\dots \\ p_m - a_{1m} \lambda_1 - a_{2m} \lambda_2 - \dots - a_{nm} \lambda_n &\leq 0 \\ x_j &\geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m). \end{aligned} \right\} (16)$$

また、(12)式に相当するものは次のようになる。

$$\left. \begin{aligned}
 k_1 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - \cdots - a_{1m}x_m &\geq 0 \\
 k_2 - a_{21}x_1 - a_{22}x_2 - \cdots - a_{2m}x_m &\geq 0 \\
 \cdots \cdots \cdots & \\
 k_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \cdots - a_{nm}x_m &\geq 0 \\
 \lambda_i &\geq 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n).
 \end{aligned} \right\} (17)$$

(17)式は線形計画法の主問題の制約条件式にほかならず、(16)式は双対問題の制約条件式にほかならない。

ここでもし、変数  $x_j$  を生産物の量、定数  $p_j$  をそれらの生産物の価格、定数  $k_i$  を資源の賦存量と解釈するならば、双対変数  $\lambda_i$  が資源 1 単位に帰属するレントと解釈できることは、周知のとおりである。そして、(17)の諸式のうちいずれかが厳密な不等号で成り立っていれば、その資源には不使用分、すなわち「スラック」が生じているわけだが、その場合には必ずその資源のレントは 0 になるというのが、(13)式の意味である。また、(16)式の諸式のうちいずれかが厳密な不等号で成り立っていれば、その生産工程には「赤字」が生じているわけだが、その場合には必ずその工程の稼働量は 0 になるというのが、(11)式の意味である。これがいわゆる相補スラック性である。

そこで、各プロセスの「赤字」を  $\delta_i$  ( $i = 1, 2, \cdots, m$ ) で、各資源の「スラック」を  $\sigma_j$  ( $j = 1, 2, \cdots, n$ ) で表わすと、(16)式は

$$\left. \begin{aligned}
 p_1 - a_{11}\lambda_1 - a_{21}\lambda_2 - \cdots - a_{n1}\lambda_n + \delta_1 &= 0 \\
 p_2 - a_{12}\lambda_1 - a_{22}\lambda_2 - \cdots - a_{n2}\lambda_n + \delta_2 &= 0 \\
 \cdots \cdots \cdots & \\
 p_m - a_{1m}\lambda_1 - a_{2m}\lambda_2 - \cdots - a_{nm}\lambda_n + \delta_m &= 0 \\
 x_j &\geq 0 \quad (j = 1, 2, \cdots, n) \\
 \delta_i &\geq 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, m),
 \end{aligned} \right\} (18)$$

となり, また(17)式は

$$\left. \begin{aligned}
 k_1 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - \dots - a_{1m}x_m - \sigma_1 &= 0 \\
 k_2 - a_{21}x_1 - a_{22}x_2 - \dots - a_{2m}x_m - \sigma_2 &= 0 \\
 &\dots\dots\dots \\
 k_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \dots - a_{nm}x_m - \sigma_n &= 0 \\
 \lambda_i &\geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \\
 \sigma_i &\geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n),
 \end{aligned} \right\} (19)$$

となる。そして, (11)式は

$$\delta_j x_j = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m), \quad (20)$$

(13)式は

$$\sigma_i \lambda_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (21)$$

と書き改められることになる。

このようにして線形計画法は, 変数が非負であるという条件以外はすべて等式で表わされる形に, 書き直すことができる。

この方法を, より一般的な(8)式の形の非線形計画問題に適用すれば, 最適解の満たすべき条件は, 赤字変数とスラック変数とを用いて, 次の形に表現されることになる。

$$f_j(x) - \sum_{i=1}^n \lambda_i g_{ij}(x) + \delta_j = 0, \quad x_j \geq 0, \quad \delta_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m). \quad (22)$$

$$k_i - g_i(x) - \sigma_i = 0, \quad \lambda_i \geq 0, \quad \sigma_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (23)$$

$$\delta_j x_j = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m). \quad (24)$$

$$\sigma_i \lambda_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (25)$$

(22)~(25)の体系は, 変数が非負であるという条件以外は等式で表わされているから, この変形を通じて, 連立代数方程式の解法をこの問題に適用できる可能性が開けてきたことになる。

### Ⅲ. ニュートン法適用への障害

しかし、前節で導かれた方程式体系にニュートン法を適用して解を求めようとすると、ただちに障害に行き当たる。たとえ、非負条件をひとまず無視して、等式の部分だけに着目して解こうとしても、やはり解けないのである。

その原因は、(24)式や(25)式の表わしている集合が、交わる2直線の和集合であるという点にある。およそ連立方程式の解法というものは、解集合が体系を構成する各式の表わす図形の積集合であることを前提として作られているのであるから、1本の式そのものがすでに和集合を表わしているものが含まれていたのでは、通常解法が適用できないのは当然である。

例えば、(24)式において  $j = 1$  とした場合の式

$$\delta_1 x_1 = 0 \quad (26)$$

に着目して、この式が上記の連立方程式体系の中ではたしている役割を考察してみよう。この式を満たす変数値ベクトルの集合は、 $x_1 = 0$  を満たす変数値ベクトルの集合  $A$  と、 $\delta_1 = 0$  を満たす変数値ベクトルの集合  $B$  との和集合  $A \cup B$  であるから、他のすべての式を同時に満たす変数値ベクトルの集合を  $C$  としたとき、連立方程式体系(22)~(25)の解集合は  $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$  である。

したがって、この方程式体系は  $A \cap C$  という解集合をもつ方程式体系と  $B \cap C$  という解集合をもつ方程式体系とに分解して解くのが正道なのである。

しかも、同様の分解は、上に挙げた(26)式に関してだけでなく、(24)と(25)に属するあらゆる式に関して可能なのであるから、この方程式体系は、和集合を含まない通常の連立方程式体系に還元して解こうとするかぎり、 $2^{m+n}$  通りに場合分けして解かねばならないことになる。これはとうてい実用的な解法とは言えない。

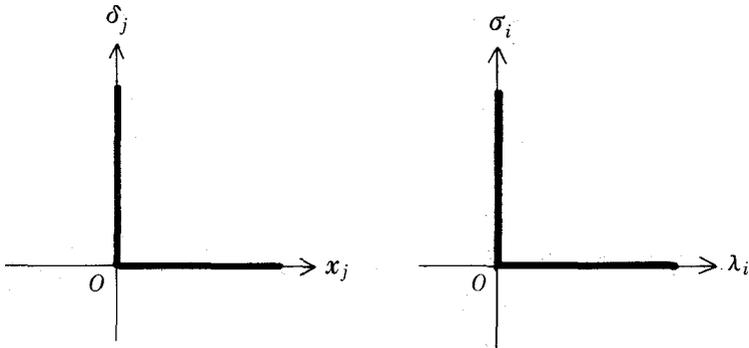
それでは方程式体系が和集合を含むことに目をつぶって、強引にニュートン法を適用した場合には、どういう不都合が起こるだろうか？ それは、探索の途上でヤコビ行列式が0になるという不都合である。このことは簡単にわかる。

(24式や25式)のグラディエントベクトルは、いずれも0以外の成分を2箇所だけに含むベクトルとなり、(24式の場合  $(x_j, \delta_j) = (0, 0)$  の点で零ベクトルとなり、(25式の場合  $(\lambda_i, \sigma_i) = (0, 0)$  の点で零ベクトルとなる。したがって、これらの点でこの体系のヤコビ行列式の値は0となり、解の探索が行きづまるのである。

#### IV. 変数変換による解決

ところが、上記の難点は、変数変換によって一気に解決することができる。困難の元凶となっている(24式や25式)について、考察を深めよう。これらの式が表わす集合は、非負条件をも加味した場合には、第1図に示すような折れ線となる。折れ線は、端点を共有する2本の半直線の和集合であるから、位相幾何的に言えば、両方向に無限の延長をもった1本の直線と同位相である。した

第1図



がって例えば  $x_j$  と  $\delta_j$  とが、折れ線上という条件を満たしつつ変化することは、ある第3の変数が負の無限大から正の無限大まで変化することに対応させることができ、 $x_j$  と  $\delta_j$  とはともにその第3変数の関数であるという形に、式を書き直すことができるはずである。その第3変数を新たな未知数とするならば、方程式は和集合を含まない通常の連立方程式に書き直される。しかも変数の定

義域には制約がなくなるので、非負条件を表わす不等式をも、同時に体系から追放することができるはずである。

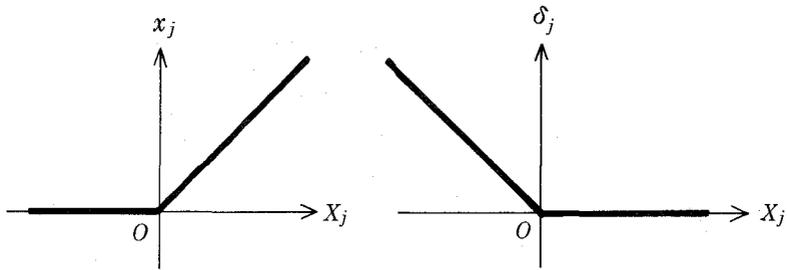
その第3変数の名を  $X_j$  とし、 $X_j$  と  $x_j$  との関係関数  $\phi$  で表わし、 $X_j$  と  $\delta_j$  との関係関数  $\psi$  で表わすことにしよう。結論的には、それらの関数はごく単純に次のように選べばよい。

$$\phi(X_j) = \max(0, X_j). \quad (27)$$

$$\psi(X_j) = \max(0, -X_j). \quad (28)$$

グラフを描けば第2図のとおりである。

第2図



$\lambda_i$  と  $\sigma_i$  についても同様の方法を適用する。すなわち、両者をつなぐ第3の変数  $R_i$  を考えて、 $\lambda_i$  を  $\phi(R_i)$  によって置き換え、 $\sigma_i$  を  $\psi(R_i)$  によって置き換えるのである。

こうすると、いまや(22)~(25)は、次のように書き改められることになる。

$$f_j(x) - \sum_{i=1}^n \lambda_i g_i(x) + \delta_j = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m). \quad (29)$$

$$k_i - g_i(x) - \sigma_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (30)$$

$$x_j = \phi(X_j) \quad (j = 1, 2, \dots, m). \quad (31)$$

$$\delta_j = \psi(X_j) \quad (j = 1, 2, \dots, m). \quad (32)$$

$$\lambda_i = \phi(R_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (33)$$

$$\sigma_i = \psi(R_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (34)$$

こうしておいて、最後に(31)~(34)を(29)および(30)に代入すれば、もとの変数は消去され、体系は新変数  $X_j$  および  $R_j$  のみに関する方程式となる。関数  $\phi$  および  $\psi$  は定義域が実数全体で値域は区間  $[0, +\infty)$  であるから、もとの変数についての非負条件は、関数  $\phi$  および  $\psi$  の導入によって自動的に達成され、新変数  $X_j$  と  $R_j$  の値には何らの制限もつける必要がない。このようにして、(8)式 of 非線形計画問題は、定義域に制約のない実変数についての、等式のみからなる体系へと翻訳され、ニュートン法およびその拡張形態であるホモトピー法を適用しうる形になった。

なお、変数変換にあたって採用する関数が連続微分可能でない折れ線になっていることについては、疑問を呈する人もあろう。そうした人は、例えば

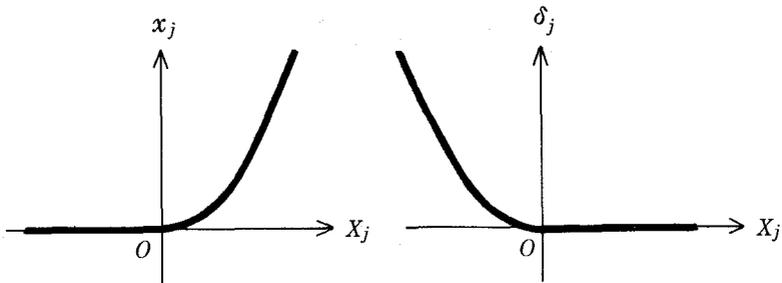
$$\phi(X_j) = [\max(0, X_j)]^2 \tag{35}$$

$$\psi(X_j) = [\max(0, -X_j)]^2 \tag{36}$$

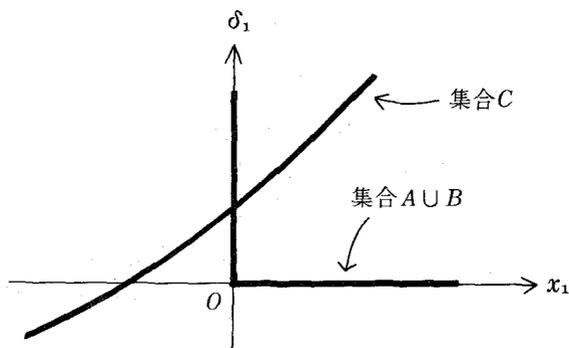
という関数形 (第3図) を採用したほうが計算にあたって好都合であろうとの意見を述べるかもしれない。しかし実は逆なのである。その点を説明しよう。

いま(29)式に立ち返って、これを満たす和集合  $A \cup B$  を  $x_j, \delta_j$  平面上に描こう (第4図)。非負条件を考慮すると和集合  $A \cup B$  は折れ線となる。体系の解がこの折れ線の屈折点 (すなわち原点) の付近にあるとき、集合  $C$  (他のすべての式を同時に満足する変数ベクトルの集合) はこの平面上の原点付近でこの折れ線に交わる曲線になるはずであるが、解の一意性を前提とするかぎり、折れ

第3図



第 4 図



線に 2 回交差することはありえないから、交点における集合 C の線形近似式は、正の傾きをもつ直線，すなわち

$$ax_1 - b\delta_1 + c = 0 \quad (a > 0, b > 0) \quad (37)$$

となるはずである。この式に例の変数変換をほどかせば

$$a\phi(X_1) - b\psi(X_1) + c = 0 \quad (38)$$

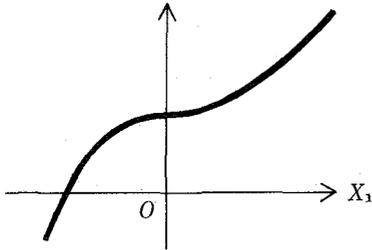
となる。この(38)式の左辺は変数  $X_1$  だけの関数になるが、この関数のグラフが横軸に交わる点が、方程式の解となるはずである。

ところが、もし  $\phi(X_1)$  と  $\psi(X_1)$  とが(35)式や(36)式で定義されている形の関数であった場合には、(38)式の左辺の関数は  $X_1 = 0$  の点で水平になるグラフをもつので(第 5 図)、解がちょうど  $X_1 = 0$  となるケースにおいては、ニュートン法の適用不可能な事態が発生する。

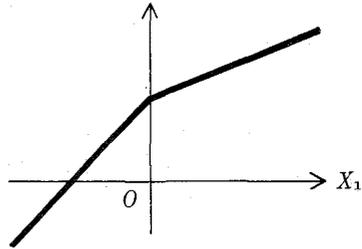
これに対して、 $\phi(X_1)$  と  $\psi(X_1)$  とが(27)式や(28)式で定義されている形の関数であった場合には、(38)式の左辺の関数は、つねに傾きが正のグラフをもつので(第 6 図)、解がちょうど  $X_1 = 0$  となるケースにおいても、ニュートン法の適用不可能な事態が発生することはない。

このようにして、(27)式と(28)式を採用することの正当性が示された。

第5図



第6図



V. 具体的問題の例

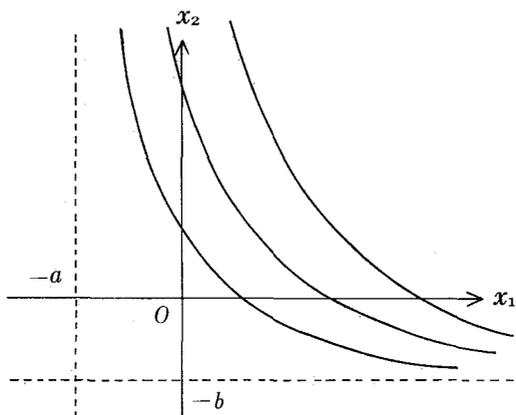
ここで、変数が2個、制約条件式が2本で、しかも制約条件式は線形、目的関数のみが非線形という簡単なケースについて、筆者の開発した方法で具体的に計算を実行した結果を、例として示すことにしよう。

問題は次のとおりである。

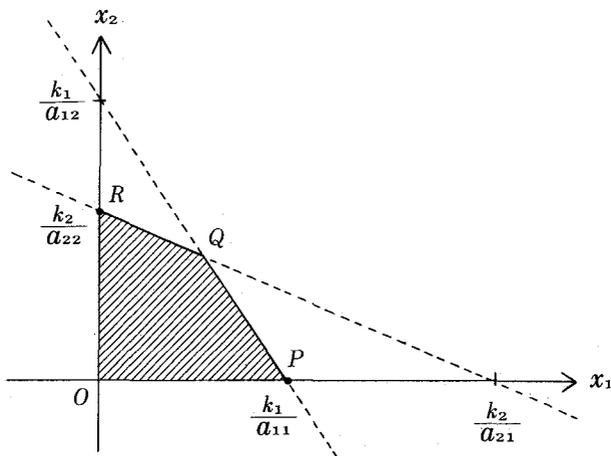
$$\begin{array}{l}
 \text{Maximize } f(x_1, x_2) = \alpha \log(x_1 + a) + (1 - \alpha) \log(x_2 + b) \\
 (0 < \alpha < 1, a > 0, b > 0) \\
 \text{subject to } \left\{ \begin{array}{l} k_1 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2 \geq 0 \\ k_2 - a_{21}x_1 - a_{22}x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{array} \right. \quad (39)
 \end{array}$$

目的関数の等高線は  $x_1 = -a$ ,  $x_2 = -b$  を漸近線とする曲線群であるから、両軸との交点も含めて第1象限全体で負の傾きをもっている (第7図)。制約条件式の表現する集合は第8図の多角形  $OPQR$  である。極値の生じる場所は、定性的にみて、点  $P$ 、線分  $PQ$  上、点  $Q$ 、線分  $QR$  上、点  $R$  の5種類の可能性があり、パラメーターの値に応じて、どこで極値が生じるかが違ってくる。

第7図



第8図



しかし、その最適解を求めるための連立方程式は、極値の生じる場所のいかんにかかわらず、次の1種類ですむ。

$$\begin{aligned}
 & \frac{\alpha}{x_1 + a} - a_{11}\lambda_1 - a_{21}\lambda_2 + \delta_1 = 0 \\
 & \frac{1 - \alpha}{x_2 + b} - a_{12}\lambda_1 - a_{22}\lambda_2 + \delta_2 = 0 \\
 & x_1\delta_1 = 0 \\
 & x_2\delta_2 = 0 \\
 & k_1 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - \sigma_1 = 0 \\
 & k_2 - a_{21}x_1 - a_{22}x_2 - \sigma_2 = 0 \\
 & \lambda_1\sigma_1 = 0 \\
 & \lambda_2\sigma_2 = 0 \\
 & x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2, \delta_1, \delta_2, \sigma_1, \sigma_2 \geq 0.
 \end{aligned} \tag{40}$$

ここで、解を数値的に見やすいものとするために、価格の概念を導入して、方程式体系に若干の修正をほどこすことにしよう。

その修正というのは、次のとおりである。 $x_1$ で表わされている第1財がニューメレールであって、つねに1の価格をもつと仮定する。すると、(40)の第1式を $\alpha/(x_1 + a)$ で割った式が、第1財の生産プロセスの取支均等を表わすので、 $\lambda_1$ と $\lambda_2$ をそれぞれこの値で割ったものが、第1資源と第2資源のレントになる。それらを $r_1, r_2$ と名付けると、(40)式全体は次のように修正されることになる。

$$\left. \begin{aligned}
 &1 - a_{11}r_1 - a_{21}r_2 + \delta_1 = 0 \\
 &\frac{(1 - \alpha)(x_1 + a)}{\alpha(x_2 + b)} - a_{12}r_1 - a_{22}r_2 + \delta_2 = 0 \\
 &x_1\delta_1 = 0 \\
 &x_2\delta_2 = 0 \\
 &k_1 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - \sigma_1 = 0 \\
 &k_2 - a_{21}x_1 - a_{22}x_2 - \sigma_2 = 0 \\
 &r_1\sigma_1 = 0 \\
 &r_2\sigma_2 = 0 \\
 &x_1, x_2, r_1, r_2, \delta_1, \delta_2, \sigma_1, \sigma_2 \geq 0.
 \end{aligned} \right\} (41)$$

ここで例の関数  $\phi$  と  $\psi$  とを導入し、変数変換を実行すると、この方程式体系は、次のように、定義域に制約のない4つの未知数  $X_1, X_2, R_1, R_2$  についての4元連立方程式に変換される。

$$\left. \begin{aligned}
 &1 - a_{11}\phi(R_1) - a_{21}\phi(R_2) + \psi(X_1) = 0 \\
 &\frac{(1 - \alpha)(\phi(X_1) + a)}{\alpha(\phi(X_2) + b)} - a_{12}\phi(R_1) - a_{22}\phi(R_2) + \psi(X_2) = 0 \\
 &k_1 - a_{11}\phi(X_1) - a_{12}\phi(X_2) - \psi(R_1) = 0 \\
 &k_2 - a_{22}\phi(X_2) - a_{22}\phi(X_2) - \psi(R_2) = 0.
 \end{aligned} \right\} (42)$$

第1表は、このモデルに  $a_{11} = 3, a_{12} = 1, a_{21} = 1, a_{22} = 2, k_1 = 15, k_2 = 12, \alpha = 0.05$  という値を与え、ホモトピー法の最初の解をすべての未知数に対して1と与え、 $t$  の値を1から次第に減少させながら、差分方程式によって方程式  $H(x, t) = 0$  の解の近似値を追跡し、最後に  $t = 0$  として方程式(42)の解を求めたものである。

見られるとおり、この場合の解は定性的には第8図の点  $R$  に相当し、第1財の生産プロセスに赤字が生じ、第1資源にスラックが生じている状態を表わしているが、このような場合でも、等式体系に対する解法が通用するのである。

第1表

$n$	$t$	$x_1$	$x_2$	$r_1$	$r_2$	$\delta_1$	$\delta_2$	$\sigma_1$	$\sigma_2$	$X_1$	$X_2$	$R_1$	$R_2$
0	1.0000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
1	0.9611	1.10122	1.12458	0.85035	1.33215	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	1.10122	1.12458	0.85035	1.33215
2	0.9225	1.20153	1.24804	0.70080	1.66507	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	1.20153	1.24804	0.70080	1.66507
3	0.8842	1.30103	1.37050	0.55132	1.99869	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	1.30103	1.37050	0.55132	1.99869
4	0.8462	1.39979	1.49205	0.40193	2.33292	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	1.39979	1.49205	0.40193	2.33292
5	0.8085	1.49790	1.61280	0.25260	2.66769	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	1.49790	1.61280	0.25260	2.66769
6	0.7710	1.59540	1.73280	0.10335	3.00297	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	1.59540	1.73280	0.10335	3.00297
7	0.7335	1.66661	1.86607	0.00000	3.24847	0.00000	0.00000	0.08192	0.00000	1.66661	1.86607	-0.08192	3.24847
8	0.6965	1.62944	2.05081	0.00000	3.13770	0.00000	0.00000	0.41485	0.00000	1.62944	2.05081	-0.41485	3.13770
9	0.6619	1.58453	2.22935	0.00000	3.03365	0.00000	0.00000	0.75259	0.00000	1.58453	2.22935	-0.75259	3.03365
10	0.6292	1.53292	2.40234	0.00000	2.93552	0.00000	0.00000	1.09421	0.00000	1.53292	2.40234	-1.09421	2.93552
11	0.5982	1.47547	2.57034	0.00000	2.84267	0.00000	0.00000	1.43901	0.00000	1.47547	2.57034	-1.43901	2.84267
12	0.5688	1.41289	2.73385	0.00000	2.75452	0.00000	0.00000	1.78644	0.00000	1.41289	2.73385	-1.78644	2.75452
13	0.5409	1.34577	2.89329	0.00000	2.67061	0.00000	0.00000	2.13608	0.00000	1.34577	2.89329	-2.13608	2.67061
14	0.5142	1.27458	3.04902	0.00000	2.59051	0.00000	0.00000	2.48757	0.00000	1.27458	3.04902	-2.48757	2.59051
15	0.4886	1.19976	3.20137	0.00000	2.51389	0.00000	0.00000	2.84065	0.00000	1.19976	3.20137	-2.84065	2.51389
16	0.4641	1.12164	3.35061	0.00000	2.44044	0.00000	0.00000	3.19509	0.00000	1.12164	3.35061	-3.19509	2.44044
17	0.4406	1.04053	3.49698	0.00000	2.36989	0.00000	0.00000	3.55071	0.00000	1.04053	3.49698	-3.55071	2.36989
18	0.4180	0.95670	3.64071	0.00000	2.30201	0.00000	0.00000	3.90735	0.00000	0.95670	3.64071	-3.90735	2.30201
19	0.3962	0.87038	3.78199	0.00000	2.23660	0.00000	0.00000	4.26489	0.00000	0.87038	3.78199	-4.26489	2.23660
20	0.3751	0.78176	3.92099	0.00000	2.17347	0.00000	0.00000	4.62321	0.00000	0.78176	3.92099	-4.62321	2.17347
21	0.3548	0.69102	4.05787	0.00000	2.11247	0.00000	0.00000	4.98223	0.00000	0.69102	4.05787	-4.98223	2.11247
22	0.3351	0.59832	4.19275	0.00000	2.05344	0.00000	0.00000	5.34187	0.00000	0.59832	4.19275	-5.34187	2.05344
23	0.3161	0.50380	4.32578	0.00000	1.99627	0.00000	0.00000	5.70206	0.00000	0.50380	4.32578	-5.70206	1.99627
24	0.2976	0.40757	4.45706	0.00000	1.94083	0.00000	0.00000	6.06274	0.00000	0.40757	4.45706	-6.06274	1.94083
25	0.2797	0.30977	4.58669	0.00000	1.88701	0.00000	0.00000	6.42387	0.00000	0.30977	4.58669	-6.42387	1.88701
26	0.2622	0.21047	4.71476	0.00000	1.83472	0.00000	0.00000	6.78539	0.00000	0.21047	4.71476	-6.78539	1.83472
27	0.2453	0.10978	4.84137	0.00000	1.78388	0.00000	0.00000	7.14727	0.00000	0.10978	4.84137	-7.14727	1.78388
28	0.2288	0.00778	4.96659	0.00000	1.73440	0.00000	0.00000	7.50948	0.00000	0.00778	4.96659	-7.50948	1.73440
29	0.2017	0.00000	5.09855	0.00000	1.86771	0.22720	0.00000	7.73663	0.00000	-0.22720	5.09855	-7.73663	1.86771
30	0.1721	0.00000	5.23176	0.00000	2.04738	0.49568	0.00000	7.92903	0.00000	-0.49568	5.23176	-7.92903	2.04738
31	0.1427	0.00000	5.36428	0.00000	2.22795	0.76460	0.00000	8.12046	0.00000	-0.76460	5.36428	-8.12046	2.22795
32	0.1134	0.00000	5.49617	0.00000	2.40937	1.03394	0.00000	8.31097	0.00000	-1.03394	5.49617	-8.31097	2.40937
33	0.0842	0.00000	5.62746	0.00000	2.59157	1.30366	0.00000	8.50061	0.00000	-1.30366	5.62746	-8.50061	2.59157
34	0.0552	0.00000	5.75818	0.00000	2.77451	1.57375	0.00000	8.68943	0.00000	-1.57375	5.75818	-8.68943	2.77451
35	0.0262	0.00000	5.88837	0.00000	2.95814	1.84418	0.00000	8.87747	0.00000	-1.84418	5.88837	-8.87747	2.95814
36	-0.0026	0.00000	6.01805	0.00000	3.14244	2.11493	0.00000	9.06478	0.00000	-2.11493	6.01805	-9.06478	3.14244
37	0.0000	0.00000	6.00000	0.00000	3.16667	2.16667	0.00000	9.00000	0.00000	-2.16667	6.00000	-9.00000	3.16667

(注)  $n$  は差分方程式の反復計算のステップを表わす。ただし、 $n=37$ の場合には方程式(42)それ自体を直接に解いている。

## VI. 結論と展望

以上のように、不等式制約下の最適値問題がニュートン法で解けることは示せたが、もとより、上の実例程度の問題は、他の方法でも容易に解くことができるから、わざわざニュートン法を適用してもメリットは乏しいとの批評が予想される。これに対しては、筆者の目的意識との関連で弁明をひとつ述べておこう。

筆者の当面の関心は、無限期間に近い長い時間的視野 (time horizon) をもつ通時的一般均衡モデル (intertemporal general equilibrium model) の、しかも不等式制約条件を含むタイプのを、パーソナルコンピューター上で数値的に解くというところにある。この種の問題は、部門数×期間数だけの未知数を含む静学的一般均衡モデルと考えれば、原理的には解けるであろうが、期間が長くなるとコンピューターの記憶スペースのたいへんな無駄づかいになる。ところが、見方を変えたとこの問題は、効用関数が時間反転的 (time-recursive) である場合を除けば、1階の条件をもう一度微分したヤコビ行列が分解可能になるという良好な性質を持っているので、問題全体にニュートン法が適用できさえすれば、ニュートン法のサブルーチンとして線形計算の部分は大きな dimension を切ることなく、なし崩し的に計算できることがわかる。そこで、不等式制約問題へのニュートン法の適用可能性いかんという問題が筆者の問題関心の中に浮上してきたわけである。今後、筆者としては、通時的一般均衡モデルへの適用を通じて、今回開発した方法の威力を説得的に示したいと考えている。

参 考 文 献

- [1] 宇沢弘文『経済解析・基礎篇』岩波書店, 1990.
- [2] Ginsburgh, V.A. & Waelbroeck, J.L., *Activity Analysis and General Equilibrium Modelling*, North Holland, 1981.
- [3] Kehoe, T.Y., "Computation and Multiplicity of Equilibria", in Hildenbrand, W. & Sonnenschein, H. (eds), *Handbook of Mathematical Economics*, Volume IV, North Holland, 1991, pp. 2049-2143.
- [4] 田辺國士「非線形最適化」, 広中平祐ほか編『現代数理科学事典』所収, 大阪書籍, 1991, pp. 641-650.
- [5] Scarf, H.E., "The Computation of Equilibrium Prices", in Arrow, K.J. & Intriligator, M.D. (eds), *Handbook of Mathematical Economics*, Volume II, North Holland, 1982, pp. 1007-1061.
- [6] Smale, S., "A Convergent Process of Price Adjustment and Global Newton Method", *Journal of Mathematical Economics*, 3(1976), pp. 107-120.