愛媛経済論集第17巻　第2号　(1997)

内部収益率と資本蓄積

川　口　和　仁

1　問　題　点

世界の至るところで，資本家は、自己の資本を増大させるために様々な投資活動を行っている。彼は，自己の資本をできるだけ大きく，さらにおそらくはより速く，より確実に増大させたいと考えている。そして，資本蓄積のために資本家が採用する投資計画の種類と規模は，経済の再生産が順調に行われるか否かを決定的に左右する。

投資計画の実行基準としては，現在価値法と内部収益率法の二つがよく知られている。現在価値法の基本的な発想は，投資期間全体にわたり，資金の調達・運用を市場利子率によって行ったとして，借入金を返済した後，最終的に手元に残る純資産の増加分が正であれば投資を行うということである[1)]。資本蓄積の観点から，現在価値法は，明白な合理性を持っている。ただ，資本家が，現在価値法を利用するためには，投資期間全体にわたる市場利子率の値について，一定の知識ないし見込みを持っていなければならず，現時点において，金利の正確な予測を行う経済モデルが存在しない以上，このことは，しばしばかなりの困難を伴う。

一方，内部収益率は，計画期首（第0期）に行った投資から得られる純収益

1）計画が無限期間にわたる場合には，将来のある期以降のいずれの期においても純資産増が正となっていることが条件となる。

の流列を内部収益率に等しい単位期間当り利子率で複利成長させて最終的に得られる金額が，期首投資額を同じ利子率の下で計画期末まで単純に複利運用して得られる金額と一致するという性質を持つ。すなわち，内部収益率は，それに等しい利子率で，第１期以降全ての資金運用，調達を行ったときの期首投資額の平均成長率を表すことになる。この想定の下では，期首投資額を自己資本で，あるいは内部収益率よりも安い金利で調達することが出来る限り，投資計画の実行は，資本蓄積に貢献することになる[2)]。

キャッシュフローの流列 $\{C_t\}_{t=0}^{T}, C_0 < 0$ で表される投資計画の内部収益率 r を

$$\beta^{*} = \inf\{\beta \in R^{+} \mid f(\beta) \equiv \sum_{t=0}^{T} \beta^{t} C_t = 0\} \tag{1}$$

とおき，$r = \dfrac{1-\beta^{*}}{\beta^{*}}$ で定義しよう。ただし，以下では，$0 < \beta^{*} < 1$ を前提し，$r \leq 0$ となっているような投資プロジェクトは問題にしない。本稿で示される主要な命題は，次の通りである。

1．投資計画の資金調達・運用を全て内部収益率に等しい利子率で行うものとする。このとき，任意の期において正の純資産増が生じないならば，$f(\beta) = 0$ の正根は唯一である。
2．1．の「任意の期において正の純資産増が生じない」という条件は，若干緩めることが出来る。すなわち，計画期間中任意の期について，その期から計画最終期までの各期に生じる純資産増の将来（現在）価値の総和が非正となっているならば，$f(\beta) = 0$ は，唯一の正根を持つ。
3．1．の条件は，資金の調達・運用が行われる毎期の利子率が，全て内部収益率未満であるとき，投資計画が，最終期に常に正の純資産増を生み出すための必要十分条件である。

2）この議論の詳しい説明は，第３節で与えられる。

特に，従来$f(\beta)=0$が，唯一の正根を持つための十分条件として重視されてきた1．の条件が，ある意味で根の存在を保証するに留まらない独自の重要性を持つことが主張される。

2　正根の一意性と資本蓄積

投資計画$\{C_t\}_{t=0}^{T}$，$C_0<0$の内部収益率を，$r>0$とする。今，資本家は，$r>0$に等しい単位期間当り利子率で，$-C_0$だけの資金を借り入れて，この投資計画をスタートさせ，毎期の余剰資金，不足資金の運用，調達を，全てrに等しい利子率で行うものとしよう。このとき，プロジェクトが生み出す各期の純資産の流列$B_0, B_1, \cdots, B_T$は，

$$\begin{aligned} C_0 &= B_0 \\ (1+r)B_0+C_1 &= B_1 \\ (1+r)B_1+C_2 &= B_2 \\ &\vdots \\ (1+r)B_{T-1}+C_T &= B_T \end{aligned} \tag{2}$$

で決まる。なお，B_Tは，内部収益率の定義より0に等しい[3]。上式から次の命題が成り立つ。

〈命題1〉

$B_1\leq 0, B_2\leq 0, \cdots, B_{T-1}\leq 0$ならば，$f(\beta)=0$は，唯一の正根を持つ。すなわち，全ての資金調達・運用を，内部収益率で行ったとき，投資期間中のいずれの期においても純資産の増加が生じないような投資計画では，全期間の資金調達・運用を，内部収益率よりも低い一定の利子率で行う限り，最終期に正

3）逆に，このような資金調達・運用を行うものとして，最終的に資本を増やすことにも減らすことにもならないような一定の利子率の最大値として内部収益率を定義してもよい。

の純資産増がもたらされる。

証明）

$\beta^* = 1/(1+r)$ において，$f(\beta)$ をテイラー展開すると，

$$f(\beta) = f(\beta^*) + f'(\beta^*)(\beta-\beta^*) + \frac{1}{2}f''(\beta^*)(\beta-\beta^*)^2 + \cdots$$
$$+ \frac{1}{T!}f^{(T)}(\beta^*)(\beta-\beta^*)^T \tag{3}$$

となる。ここで，$f(\beta^*) = 0$ であり，

$$\begin{aligned}\beta^* f'(\beta^*) &= \sum_{t=1}^{T} t\beta^{*t}C_t \\ &= \sum_{t=1}^{T} \beta^{*t}C_t + \sum_{t=2}^{T} \beta^{*t}C_t + \cdots + \beta^{*T}C_T\end{aligned}$$

であるが，

$$\beta^{*T}C_T = -\beta^{*T-1}B_{T-1} \geq 0$$
$$\beta^{*T}C_T + \beta^{*T-1}C_{T-1} = -\beta^{*T-2}B_{T-2} \geq 0$$
$$\vdots$$
$$\beta^{*T}C_T + \beta^{*T-1}C_{T-1} + \cdots + \beta^* C_1 = -B_0 > 0$$

より，$f'(\beta^*) > 0$ である。続いて，

$$\begin{aligned}\beta^{*2}f''(\beta^*) &= \sum_{t=2}^{T} t(t-1)\beta^{*t}C_t \\ &= -(2\cdot1)\beta^* B_1 - (3\cdot2-2\cdot1)\beta^{*2}B_2 - \cdots \\ &\qquad -(T(T-1)-(T-1)(T-2))\beta^{*T-1}B_{T-1}\end{aligned}$$

から，$f''(\beta^*) \geq 0$ が言え，同様にして，以下，n=2,3,4,⋯，$T-1$ について，

$$\beta^{*n}f^{(n)}(\beta^*) = \sum_{t=n}^{T} t(t-1)\cdots(t-n+1)\beta^{*t}C_t \tag{4}$$

$$= -n!\beta^{*n-1}B_{n-1} - (\frac{(n+1)!}{1!} - n!)\beta^{*n}B_n -$$

$$\cdots - (\frac{(n+j)!}{j!} - \frac{(n+j-1)!}{(j-1)!})\beta^{*n+j-1}B_{n+j-1} -$$

$$\cdots - (\frac{T!}{(T-n)!} - \frac{(T-1)!}{(T-1-n)!})\beta^{*T-1}B_{T-1} \geq 0$$

さらに

$$\beta^{*T}f^{(T)}(\beta^*) = -T!\beta^{*T-1}B_{T-1} \geq 0$$

が導かれる。故に，$f^{(n)}(\beta^*) \geq 0, n = 1, 2, 3, \cdots, T$，特に$f'(\beta^*) > 0$であり，区間［$\beta^*$ ∞）上で$f(\beta)$は，βの狭義単調増加関数となる。従って，$f(\beta)$が，$\beta > \beta^*$で0となることはなく，β^*は，$f(\beta)=0$の正根の最小値であるから，正根は，β^*のみである。なお，後段については，$\beta > \beta^* \Rightarrow \beta^{-T}f(\beta) > 0$となることから容易に解る（図1参照）。

〈$q.e.d$〉

〈命題.1〉は，Gronchi[1]の議論を，古典的な代数理論を利用することなしに証明したものであるが[4]，ここでは，$f(\beta)=0$の根の存在条件について，もう少し考えておくことにしよう。いずれの期においても資産が増加しないという条件は，明らかに強すぎる条件であって，これよりも若干緩い次のような条件の下でも正根の一意性を導くことができる。

〈系.1〉

4）1．の条件と，いわゆる投資の中断可能性（[3]，[4]参照）との関係については，Gronchi[1]で詳しく論じられている。現実に投資の中断が行われるときには，本来，中断したケースに対応する別の投資計画を考えるべきであり，そのような投資計画の下で成立する議論が，元の（中断されない）投資計画と何らかの理論的関係を持つとは限らない。特に，収入の獲得が打ち切られた後で，中断費用が生じるような場合，$\sup f(\beta)=0$となるような極めて特殊な場合を除いて，正根が一意となることはありえない。

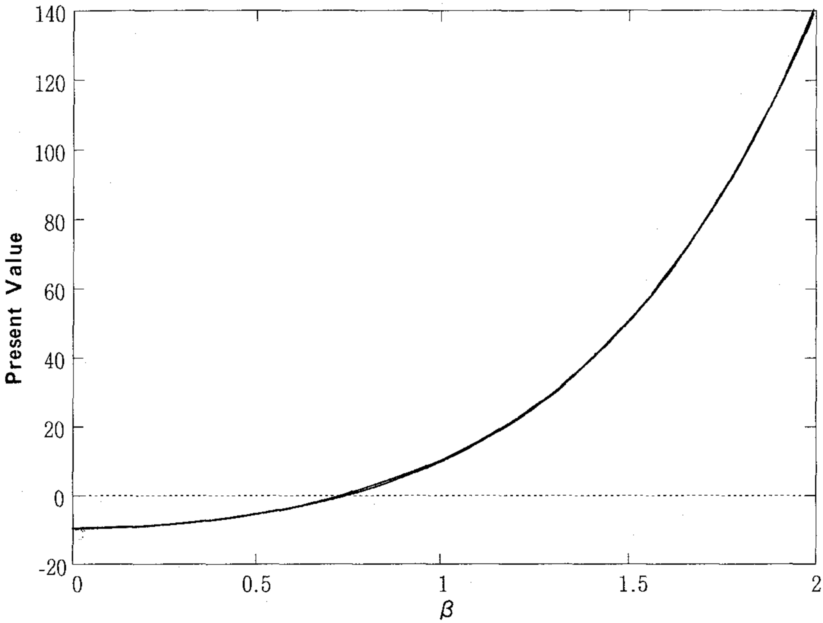

図1：$f(\beta)$ の例

〈命題1〉と同じ記号を用いる。条件

$$\sum_{t=j}^{T} \beta^{*t} B_t \leq 0 \quad j=0,1,2,3,\cdots,T \tag{5}$$

が満たされるならば，$f(\beta)=0$ は，唯一の正根を持つ。

証明）

(4)において，$\beta^{*n+j-1}B_{n+j-1}$ の係数を比較すると，

$$(\frac{(n+1)!}{1!}-n!)-n!=n(n!)>0$$

$$(\frac{(n+j)!}{j!}-\frac{(n+j-1)!}{(j-1)!})-(\frac{(n+j-1)!}{(j-1)!}-\frac{(n+j-2)!}{(j-2)!})$$

$$=\frac{(n+j-2)!n(n-1)}{j!}>0$$

$$n=2,3,\cdots,T-1$$

$$j=2,3,\cdots T-n$$

となっていることから，係数は，自然数 j の増加関数であることが解り，各 $\beta^{*n}f^{(n)}(\beta^*)$ は，$-\sum_{t=j}^{T}\beta^t B_t \geq 0, j=n-1, n,\cdots, T-1$ に自然数の係数を乗じた一次結合の形に書き直すことができる。従って，系の条件が満たされれば，$\beta^{*n}f^{(n)}(\beta)$ は，非負となり，特に，$B_0<0$ より，

$$\beta^* f'(\beta^*)=-\sum_{t=0}^{T}\beta^{*t}B_t>0$$

が得られ，$f(\beta)$ は，$[\beta^*\ \infty)$ 上狭義単調増加となる。

〈$q.e.d$〉

〈系. 1〉の条件の経済的意味について考えるため，(2)で表される資金の流れから第0期に y_0，第1期に y_1，…，第T期に y_T だけの資金を持ち出すことを考えてみよう。このとき(2)は，次のように書き変えられ，

$$C_0-y_0=\tilde{B}_0 \tag{6}$$

$$(1+r)\tilde{B}_0+C_1-y_1=\tilde{B}_1$$

$$(1+r)\tilde{B}_1+C_2-y_2=\tilde{B}_2$$

$$\vdots$$

$$(1+r)\tilde{B}_{T-1}+C_T-y_T=\tilde{B}_T$$

代入計算によって，

$$-\sum_{t=0}^{T}(1+r)^{T-t}y_t=\tilde{B}_T \tag{7}$$

が得られる。上式より，全ての期に非負の持出しを行おうとする限り，最終的に純資産を増大させることはできないということが，直ちに解る。従って，最終期に赤字を残さないという条件の下で，ある期に資金を持出すためには，別の期において逆に資金の充当をしておかなくてはならない。

特別な場合として，投資計画に対し，期首にちょうど B_0 を埋め合わせるだけの資金を充当し $(B_0 = y_0)$，以降一切の持出しも充当も行わない $(y_1 = 0, y_2 = 0, \cdots, y_T = 0)$ 場合を考えると，(8)は，

$$(1+r)^T(-C_0) = -(1+r)^T y_0 = \tilde{B}_T > 0$$

となって，r は，期首資金充当額 $-y_0$ の平均成長率を表すことになる。また，$C_0 = y_0$ とした上で，第1期より，

$$y = \text{期首資金充当額} \times \text{内部収益率} = -rC_0$$

に等しい持出しを毎期行うとすると，

$$-(1+r)^T y_0 - \{(1+r)^{T-1} + (1+r)^{T-2} + \cdots + 1\} y$$

$$= -(1+r)^T C_0 - \frac{(1+r)^{T-1}}{r}(-rC_0) = -C_0 = -y_0$$

となり，$-rC_0$ は，期首の充当額を過不足なく回収した上で毎期コンスタントに持出すことのできる最大持出可能額となっている[5]。

さて，資金の持出し・充当を，投資計画が元々生み出していた毎期の純資産増を丁度埋め合わせるのに必要なだけ行うことを考えてみよう。すなわち，資金の充当・引出を，

$$y_0 = B_0, y_1 = B_1, \cdots, y_{T-1} = B_{T-1}, y_T = 0$$

なるように行うのである。このとき，(8)は，

$$-\sum_{t=0}^{T}(1+r)^{T-t}B_t = \tilde{B}_T$$

と書き直されることになるが，系の条件より，左辺は正となる。

5）このことを用いて，一般に，利子率 i の下で同様の資金運用を行ったとき，毎期 $-iC_0$ だけの資金を持出したとして，最終的に期首資金充当額を過不足なく回収するような利子率の最大値を内部収益率と定義することもできる。

$j = 1, 2, 3, \cdots, T$ についても同様に考えて，j 期まで一切の充当・持出しを行わないものとし，j 期から同様の操作を行うとすると，系の条件が満たされる限り，全ての場合において最終的な資産ポジションの悪化は起こらないことになる。

以上の議論の意味は，〈命題. 1〉の条件を満たす投資計画について考えたときには明白である。このような投資計画に上記の操作を施すということは，元々毎期発生していた赤字分を全額埋め合わせてもらうということであるから，最終的に資産ポジションが悪化する事態は起こりえない。すなわち，〈系. 1〉の条件を満たす投資計画の中には，〈命題. 1〉の条件を満たす投資計画は当然含まれることになるが，それに加えて，単に赤字分の補填を受けるだけでなく，元々の黒字分の持出しを認めたとしても，資産ポジションが悪化しないような投資計画もまた含まれることになる。逆に，〈系. 1〉の条件を満たさない投資計画は，本来の各期の黒字分を持出されてしまうと，赤字分全額の補填を受けたとしても資産ポジションを悪化させてしまうような投資計画であることになる。このような投資計画は，計画期間中に発生する黒字の運用益に強く依存していると言うことができ，(5)の条件は，次のように書き直すことによって，黒字額の上限を定めるものと解釈することができる。

$$\text{毎期の黒字額の将来価値総額} \leq \text{毎期の赤字額の将来価値総額} \tag{8}$$

3　利子率の変動と資本蓄積

前節では，投資計画が，〈命題. 1〉ないし〈系. 1〉の条件を満たすとき，毎期の資金調達・運用を内部収益率よりも低い一定の利子率で行うことが可能である限り，最終的に資産ポジションを改善させることができることを見た。しかし，長期利子率の下で期首に一度限りの借入契約を結ぶのではなく，計画期間中何度も貸借契約を結ばねばならないような場合，一般にはその時々の利子率が不変に留まるとは考えられない。この節では，毎期毎期の利子率の変化

を考慮に入れたとき，これまでに得られた結論がどのように変化するのかを考察する。利子率が，毎期異なった値を取りうる一般的な場合，内部収益率と利子率との間には，次のような関係が成立する。

〈命題 2〉

投資計画 $\{C_t\}_{t=0}^{T}$, $C_0<0$ を考える。t 期の市場利子率を，i_t, $t=0,\cdots,T-1$ とし，内部収益率 r が，条件

$$r>\max\{i_0,i_1,\cdots,i_{T-1}\}$$

を満たすものとする。資金調達を

$$\begin{aligned} C_0 &= \hat{B}_0 \\ (1+i_0)\hat{B}_0+C_1 &= \hat{B}_1 \\ (1+i_1)\hat{B}_1+C_2 &= \hat{B}_2 \\ &\vdots \\ (1+i_{T-1})\hat{B}_{T-1}+C_T &= \hat{B}_T \end{aligned} \tag{9}$$

のように行ったとき，最終的に必ず正の純資産増が発生する（$\hat{B}_T>0$）ための必要十分条件は，(2)式において，条件 $B_1\leq 0$, $\cdots$, $B_{T-1}\leq 0$ が，成立することである。

証明）

十分性）

$0>\hat{B}_0=B_0$ であるから，$r>i_0$ より，$\hat{B}_1>B_1$ となるが，$B_1\leq 0$ より，第1期においてもやはり，

$$\hat{B}_2=(1+i_1)\hat{B}_1+C_1>(1+r)B_1+C_1=B_2$$

が成立つ。以下同様に考えていくと，最終的に

$$\hat{B}_T=(1+i_{T-1})\hat{B}_{T-1}+C_T>(1+r)B_{T-1}+C_T=B_T=0$$

が導かれる。

必要性）

$B_1 \leq 0, \cdots, B_{T-1} \leq 0$ が満たされないとすると，$\exists s,\ s = \max\{t: B_t > 0\}$ となる。そこで，$r = i_0 = i_1 = \cdots = i_{s-1}$ とし，$i_s < r$ とすると，

$$\hat{B}_0 = B_0, \hat{B}_1 = B_1, \cdots, \hat{B}_s = B_s, \hat{B}_{s+1} < B_{s+1} \leq 0$$

となる。続いて，$r = i_{s+1} = i_{s+2} = \cdots i_{T-1}$ とすれば，

$$\hat{B}_{s+2} = (1+r)\hat{B}_{s+1} + C_{s+2} < (1+r)B_{s+1} + C_{s+2} = B_{s+2} \leq 0$$

$$\vdots$$

$$\hat{B}_T = (1+r)\hat{B}_{T-1} + C_T < (1+r)B_{T-1} + C_T = B_T = 0$$

が得られる。ここで，$i_0, \cdots, i_{T-1}$ は，すべて r 未満の値をとらねばならないが，連続性により，$i_0, \cdots, i_{s-1}, i_{s+1}, \cdots, i_{T-1}$ を，r に十分近く取ることによって，やはり $\hat{B}_T < 0$ とできる。

〈$q.e.d$〉

〈命題．2〉より，条件 $B_1 \leq 0, \cdots, B_{T-1} \leq 0$ を満たす投資計画では，内部収益率の高いものほど最終的に損失を被る可能性は小さくなることが解った。このことは，内部収益率が，投資計画の実行基準として，一定の有効性を持つことを示すものである。

4　投資理論の課題

資本家が投資を行う動機は，言うまでもなく資本蓄積にある。しかし，投資を行う際に彼が考慮する要因には，投資によって生まれる利益の大小に加えて，少なくとも，投資期間の長さ，リスクの大きさなどに対する彼自身の評価が含まれることになる。経済の現状について，各々の資本家が，独自の観察を行い，評価を行っている状況下で，経済全体の投資額がどのような振る舞いを見せることになるかについては，まだまだ未解明な点が多い。特に，資本主義社会において，持続的に正の投資が行われ続けるために，人々の投資態度がどのような条件を満たさねばならないのかという問題は，資本主義社会の持続性を検討

していく上で，様々な角度からアプローチしていかねばならない課題である[6]。

参考文献

[1] Gronchi,S."On Investment Criteria Based on the Internal Rate of Return". *Oxford Economic Papers*, 1986, vol.38, pp.174-180.

[2] Promislow, S. D.,D. Spring. "Postulates for the internal rate of return of an investment project". *Journal of Mathematical Economics,* 1996, vol. 26, pp. 326-361.

[3] 松田和久・置塩信雄「投資の中断に関する定理」(『国民経済雑誌』1976年5月).

[4] 置塩信雄「利潤率の概念と資本維持」(『国民経済雑誌』1977年4月).

6）言うまでもなく，リカードウ，マルクス，シュムペーターといった近代以降の代表的な経済学者は，資本主義社会において，長期的には必ず投資意欲の喪失が生じることを予言している。