

A Table of Congruences on Units in Cyclic Cubic Fields with Discriminant $\leq 1,000$

Toshiaki OKAMOTO

Department of Mathematics, Faculty of Education

Ehime University, Matsuyama, 790, Japan

(Received April 28, 1994)

Let $\mathbf{Q}(\varepsilon)$ be a cyclic cubic field with discriminant less than 1,000, ε be an unit of this field and $\bar{\varepsilon}$ be a conjugate number of ε .

In the following table, let n_1, n_2 be the smallest integers such that

$$\begin{aligned}\varepsilon^{n_1} &\equiv \pm 1 \pmod{\ell}, \\ \varepsilon^{n_1} &\equiv a + b\omega_1 + c\omega_2 \pmod{\ell^2},\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\bar{\varepsilon}^{n_2} \text{ or } (\varepsilon + 1)^{n_2} &\equiv \pm 1 \pmod{\ell}, \\ \bar{\varepsilon}^{n_2} \text{ or } (\varepsilon + 1)^{n_2} &\equiv d + e\omega_1 + f\omega_2 \pmod{\ell^2},\end{aligned}$$

where a, b, c, d, e, f are rational integers, $\{1, \omega_1, \omega_2\}$ denotes an integral basis of $\mathbf{Q}(\varepsilon)$. Moreover let

Cst : a or d ,

$C(\omega_1)$: b or e ,

$C(\omega_2)$: c or f ,

Det : $bf - ce \pmod{\ell^3}$,

D : the discriminant of $\mathbf{Q}(\varepsilon)$,

If $\text{Det} \not\equiv 0 \pmod{\ell^3}$ and $\text{gcd}(\ell, 3D) = 1$, then we have a theorem about diophantine equation over $\mathbf{Q}(\varepsilon, \zeta)$:

$$\alpha^\ell + \beta^\ell + \gamma^\ell = 0, \quad \gcd(\alpha\beta\gamma, \ell) = 1, \quad (1)$$

where ℓ is the fixed odd prime number, ζ is a primitive ℓ -th root of unity and α, β, γ are integers of $\mathbf{Q}(\varepsilon, \zeta)$. In particular, if $\ell < 6 \cdot 10^9$, then (1) has no solutions.

Use was made of a personal computer PC-9801RX.

Conjecture. *There are infinitely many primes ℓ such that $\text{Det} \not\equiv 0 \pmod{\ell^3}$.*

We referred to papers :

M. N. Gras, Méthod et algorithmes pour le calcul numérique du nombre de classes et des unités des extensions cubiques cycliques de \mathbf{Q} ,
J. reine angew. Math. Bd. **277**(1975), 89-116.

and

T. Okamoto, Fermat's Last Theorem over Algebraic Number Fields,
Mem. Fac. Educ. Ehime Univ., Nat. Sci., Vol. **14**, No. **1**(1993), 35-40.

A Table of Congruences on Units

$\varepsilon^3 + \varepsilon^2 - 2\varepsilon - 1 = 0, D = 7^2$																	
ℓ	n_1, n_2	Cst	$C(\omega_1)$	$C(\omega_2)$	Det												
ε	3					107	11557	6956	10914	7169		257	66307	61938	40349	10537	
$\varepsilon + 1$	3						11557	6633	4280	3745	389266		66307	12849	55512	29812	6869096
	5	13	7	3	6	109	11991	1200	1199	6649		263	69433	55231	15517	66802	
	5	13	8	3	6		11991	6866	5232	6431	118810		69433	17094	2367	17884	10237012
	7	31	11	5	0	113	112	8476	7345	9153		269	72631	51111	807	12912	
	7	31	24	0	5		112	4295	9153	1808	204304		72631	15870	59449	60256	1230137
	11	21	43	21	28	127	126	636	1778	9652		271	73713	32521	16260	57181	
	11	21	34	21	42		126	6224	9652	7874	725805		73713	24660	16260	32520	16964871
	13	133	23	110	33	131	17293	2228	6681	0		277	77007	15236	50691	16343	
	13	133	21	88	77		17293	6025	0	6681	1922032		77007	39610	60386	34348	10358415
	17	12	14	117	117	137	18907	2193	17125	17125		281	280	62945	23885	77556	
	17	12	40	117	0		18907	547	1644	0	131383		280	68003	77556	53671	15239473
	19	307	171	238	119	139	138	10982	6116	2363		283	80373	15000	41318	15282	
	19	307	50	170	119		138	13484	2363	15568	1004692		80373	58297	64807	26036	17379313
	23	127	286	342	114	149	721	13411	19221	13559		293	146	20511	35453	46294	
	23	127	303	247	228		721	15644	8642	5662	1576271		146	83213	46294	10841	1974527
	29	553	139	23	345	151	22953	2719	21593	7248		307	306	41446	15043	34691	
	29	553	68	184	207		22953	4076	15553	14345	775234		306	73067	34691	19648	18001559
	31	28	639	145	319	157	8269	21981	22137	1099		311	97033	82105	96099	27990	
	31	28	378	319	174		8269	5651	23550	21038	2538847		97033	70596	68731	68109	19150758
	37	993	435	744	465	163	26733	15812	23146	11084		313	32761	13147	35369	18780	
	37	993	340	496	279		26733	2770	15485	12062	3613384		32761	96716	79189	16589	19495831
	41	1407	1333	1036	777	167	83	23214	4175	20374		317	100807	29799	52305	12680	
	41	1407	221	592	259		83	20206	7515	11690	2816789		100807	63716	87809	39625	3517115
	43	40	288	410	246	173	30103	520	9861	25604		331	36631	51306	34755	85729	
	43	40	1477	246	1517		30103	27679	4325	14186	3262261		36631	19859	23832	58587	29362348
	47	42	1076	1634	1161	179	32221	26851	6802	4475		337	336	92676	20220	62008	
	47	42	560	1161	1376		32221	26670	27566	2327	1441845		336	102449	62008	41788	23508783
	53	2257	1928	1128	2162	181	90	27694	3801	3801		347	17251	45111	5899	70441	
	53	2257	1738	47	1175		90	1268	3801	0	3341622		17251	3816	49968	55867	26971616
	59	2863	743	2703	1219	191	36673	29033	16235	29605		349	348	119359	17450	29316	
	59	2863	1801	1590	1484		36673	12414	6876	23111	4414201		348	71197	29316	11866	27770628
	61	3541	2538	3422	1947	193	37443	30881	12931	28757		353	124963	7767	106959	41654	
	61	3541	1533	1534	1475		37443	16790	8492	21423	4060141		124963	43418	82955	65305	10591765
	67	291	62	3233	610	197	196	4532	32308	3743		359	18463	56723	75031	109854	
	67	291	2866	3111	2623		196	10048	3743	10244	3492810		18463	107340	19027	94058	16367887
	71	4557	1207	1139	402	199	39801	34826	7164	28059		367	45019	126249	37801	120376	
	71	4557	133	4087	737		39801	25471	11542	18706	7167781		45019	7706	14313	52114	49296174
	73	70	3764	710	1917	211	210	1689	18146	29329		373	46501	88029	7087	32078	
	73	70	1989	1917	1207		210	35660	29329	11183	311647		46501	30958	107051	114138	21564995
	79	1801	4089	2555	4453	223	222	22970	13157	38579		379	189	139094	110289	82243	
	79	1801	1678	876	3431		222	36796	38579	25422	10542548		189	21602	61398	28046	3447384
	83	6321	238	1422	5135	227	51757	28603	33142	51302		383	147073	101496	74685	100729	
	83	6321	315	1106	2528		51757	13165	227	33369	6441125		147073	107622	45960	120645	54861686
	89	82	997	5146	4565	229	52671	22443	23816	43739		389	151711	18673	138095	46680	
	89	82	2491	4565	6308		52671	1144	8702	32518	9544262		151711	33842	104641	91415	28145706
	97	8011	3383	6942	5696	233	54523	6292	49629	17009		397	158007	70667	50816	62329	
	97	8011	6585	2225	1246		54523	12348	37280	32620	10803511		158007	156020	95280	146096	46179437
	101	96	2620	8730	5820	239	119	17926	37762	31070		401	161203	71379	137142	48922	
	101	96	6791	5820	6499		119	35610	26051	6692	3027413		161203	104660	111879	88220	48240300
	103	10303	1718	8787	8888	241	58323	45068	21931	35427		409	167691	97343	164827	108385	
	103	10303	605	1313	10100		58323	49404	22654	44585	7260125		167691	92842	58896	56442	46169556
		10713	4327	10403	10094	251	125	53464	15311	8785		419	418	31426	31006	127795	
		10713	3192	515	309		125	49195	54216	6526	3150050		418	173886	127795	96789	57408447

Toshiaki OKAMOTO

$\epsilon^3 - 3\epsilon - 1 = 0, D = 9^2$																			
ℓ	n_1, n_2	Cst	$C(\omega_1)$	$C(\omega_2)$	Det														
ϵ	3	1	3	0		421													
$\epsilon + 1$	3	2	6	3	9	420	126722	117880	53888		29	871	175	232	754				
5						420	124617	53888	113249	73909497	31	871	376	696	232	16820			
7	31	1	10	0		186193	159040	158177	121973		37	993	900	0	31				
	31	4	15	10	100	186193	22842	63788	36204	27864150	37	993	960	930	0	961			
11	57	29	21	35		432	109117	42001	55424		41	36	630	1258	370				
	57	6	42	21	0	432	183593	55424	13423	8624494	41	36	1148	259	111	43808			
13	133	34	66	44		64387	170333	187453	50924		43	1723	657	1230	1353				
	133	109	11	66	1210	64387	140918	141797	136529	12719586	43	1723	901	779	1230	45387			
17	183	157	65	91		28099	138217	4430	192705		47	1893	517	43	1591				
	183	38	13	65	845	28099	118723	3544	7974	47884756	47	1893	1762	215	43	57319			
19	16	103	153	238		448	42207	185437	52084		53	2257	565	470	1927				
	16	18	102	136	1445	448	172417	52084	68248	76406779	53	2257	1268	2021	470	64061			
23	18	229	133	247		209307	81804	111965	15081		59	52	584	901	1113				
	18	267	19	228	5054	209307	111964	193768	96884	3550433	59	52	1803	2014	1908	73034			
	553	208	23	161		460	53016	18440	184400		61	3541	2951	2537	2006				
	553	482	345	23	5819	460	68229	184400	165960	16151596	61	3541	1887	2419	2537	146202			
						462	131493	212517	6482		67	1261	2380	1464	671				
						462	59728	6482	8334	41801955	67	1261	792	1586	1464	171166			
						218557	85462	78456	95268		71	1519	537	2077	4221				
						218557	214352	122821	201277	16574764	71	1519	334	2680	2077	219961			
						229921	116877	216987	19160		73	35	3480	142	781				
						229921	199263	210281	197827	101412922	73	35	4756	4118	142	25205			
						11317	51623	133925	185547		79	72	5111	1679	2774				
						11317	103243	51622	185547	24902745	79	72	3359	4453	3650	0			
						245	80034	52537	58920		83	6321	5215	4977	3634				
						245	151718	182161	234698	58582683	83	6321	2527	3871	4977	349496			
						249501	81837	195608	239021		89	6973	4483	2573	4648				
						249501	158681	9980	205588	56772228	89	6973	1742	6557	2573	158447			
						88	6409	5874	4717		97	88	3828	2670	2047	134657			
						88	3828	2670	2047	134657	97	88	3828	2670	2047	134657			
						9507	5433	5626	6693		101	9507	5433	5626	6693	18818			
						9507	7565	6499	5626	18818	101	9507	7565	6499	5626	18818			
						10303	2425	6404	8989		103	10303	2425	6404	8989				
						10303	7473	4949	6464	387638	103	10303	7473	4949	6464	387638			
						3571	3915	6695	8652		107	3571	3915	6695	8652				
						3571	7827	5871	6695	583495	107	3571	7827	5871	6695	583495			
						106	1499	9737	10700		109	106	1499	9737	10700				
						106	8026	8988	1712	125939	109	106	8026	8988	1712	125939			
						108	6977	6431	8393		113	108	6977	6431	8393				
						108	982	2943	5450	1283148	113	108	982	2943	5450	1283148			
						12883	4295	10396	10622		127	12883	4295	10396	10622				
						12883	4745	4520	10396	906599	127	12883	4745	4520	10396	906599			
						126	3049	15367	14605		131	126	3049	15367	14605				
						126	14606	13843	762	32258	131	126	14606	13843	762	32258			
						17293	14149	14541	10087		137	17293	14149	14541	10087				
						17293	5239	9694	14541	1252753	137	17293	5239	9694	14541	1252753			
						18907	4111	12330	16714		139	18907	4111	12330	16714				
						18907	12877	8494	12330	2346125	139	18907	12877	8494	12330	2346125			
						19461	11121	12510	13761		149	19461	11121	12510	13761				
						19461	13621	12371	12510	2376483	149	19461	13621	12371	12510	2376483			
						22351	7749	10579	18327		151	22351	7749	10579	18327				
						22351	1042	15496	10579	3241346	151	22351	1042	15496	10579	3241346			
						7651	3323	21140	21140		157	7651	3323	21140	21140				
						7651	3321	3322	21140	1390861	157	7651	3321	3322	21140	1390861			
						24807	9421	8949	19939		163	24807	9421	8949	19939				
						24807	6750	20410	8949	2070516	163	24807	6750	20410	8949	2070516			
						162	12715	17930	20212		167	162	12715	17930	20212				
						162	9292	11573	8639	3267987	167	162	9292	11573	8639	3267987			
						28057	3007	21042	26386		173	28057	3007	21042	26386				
						28057	13693	8350	21042	3541903	173	28057	13693	8350	21042	3541903			
						30103	9170	22836	10380		179	30103	9170	22836	10380				
						30103	14185	26642	22836	1586237	179	30103	14185	26642	22836	1586237			
						178	27209	27208	18437		181	178	27209	27208	18437				
						178	22376	13604	4833	1121435	181	178	22376	13604	4833	1121435			
						180	19368	16109	6697		191	180	19368	16109	6697				
						180	32219	22806	16652	2850207	191	180	32219	22806	16652	2850207			
						36673	12607	19482	30178		193	36673	12607	19482	30178				
						36673	33997	23302	19482	3830505	193	36673	33997	23302	19482	3830505			
						12481	2896	35319	17177		197	12481	2896	35319	17177				
						12481	3859	22002	35319	6816567	197	12481	3859	22002	35319	6816567			
						98	26202	11229	6304		199	98	26202	11229	6304				
						98	22459	17533	27580	388090	199	98	22459	17533	27580	388090			
						99	10349	2388	34427		211	99	10349						

A Table of Congruences on Units

311	97033	79306	92678	8708	467	466	68650	189135	74720	67	4557	2413	335	3149		
	97033	8085	92056	92678	26888438	466	160182	45766	28954	19628010	4557	401	3350	3484	242406	
313	98283	6574	72616	45698		479	229921	88616	48858	70413	71	5113	2273	568	1420	
	98283	50705	77624	72616	8621272	479	229921	131724	110170	48858	71	5113	2555	4686	1988	201640
317	100807	91614	24092	4438		487	486	99836	206488	68667	73	72	2337	4964	5183	
	100807	52304	71959	24092	6230318	487	486	175808	37986	30681	73	72	2410	4161	511	31974
331	109893	45348	48657	32107		491	241573	27988	236171	106547	79	39	4978	4898	1264	
	109893	12246	28797	48657	28595421	491	241573	9819	139444	236171	79	39	2685	5135	6162	24964
337	113907	45833	8762	90653		499	83167	165170	197105	41916	83	82	1495	0	6391	
	113907	96044	14154	8762	18398178	499	83167	103791	9980	197105	83	82	5894	5395	498	399562
347	17251	88486	53091	15962							89	8011	3205	6141	890	
	17251	14226	51356	53091	35159428						89	8011	7653	890	7031	87131
349	122151	40136	69451	40833							97	9507	1553	2231	4462	
	122151	104699	11517	69451	17295742						97	9507	1551	970	6693	564540
353	124963	52598	34947	36006							101	10303	5859	7373	9696	
	124963	54714	53656	34947	37133482						101	10303	807	7171	6868	683467
359	358	19746	87955	54568							103	102	4842	8652	8034	
	358	47030	13642	40926	32864655						103	102	4430	9579	4532	498623
367	45019	126616	80006	4037							107	11557	1	3103	8560	
	45019	109365	50646	80006	17644259						107	11557	2353	2461	214	423613
373	139503	30960	42149	54085							109	108	4797	3815	4578	
	139503	54830	42895	42149	27408413						109	108	10138	9483	3488	974242
379	189	129240	64430	7201							113	12883	7572	9944	11978	
	189	14780	72010	64430	39644916						113	12883	12429	8023	9153	689526
383	147073	83112	106091	31789							127	16257	890	4191	15367	
	147073	81195	8809	106091	19803015						127	16257	7873	10033	3429	1532255
389	151711	84414	4668	33454							131	130	6944	16899	12969	
	151711	141984	113199	4668	2118494						131	130	13887	4061	4454	120127
397	396	87738	73842	34936							137	2701	2193	11234	2192	
	396	147685	108778	83767	7565232						137	2701	684	8494	13426	1069833
401	161203	57745	70977	131929							139	19461	14318	695	18765	
	161203	18846	118696	70977	17688110						139	19461	12370	278	139	251173
409	167691	166055	148467	84254							149	22351	20712	13857	21158	
	167691	37627	101841	148467	52024391						149	22351	14154	19817	12814	3063738
419	175981	54890	57403	60336							151	150	6192	14194	6493	
	175981	60754	57822	57403	27036394						151	150	15705	2265	2114	1527667
421	177663	18525	42100	167979							157	156	3298	21038	2041	
	177663	93040	144403	42100	50513685						157	156	12090	23550	1570	443682
431	430	97838	56892	43962							163	8911	9129	21027	21190	
	430	113785	100854	128869	15603924						163	8911	14832	652	15648	3400832
433	432	108251	90497	133364							167	28057	14363	12859	6179	
	432	180995	36372	96992	29998240						167	28057	22711	11523	19038	1282894
439	64387	52242	121164	70240							173	30103	22145	7612	15051	
	64387	143113	1317	121164	36231548						173	30103	21970	29410	22663	4279847
443	196693	153279	18606	119610							179	32221	23629	179	20585	
	196693	159036	58033	18606	12167438						179	32221	11813	1969	20764	3332264
449	448	100577	136945	151313							181	180	5612	26426	13394	
	448	72290	86657	64656	86890031						181	180	1087	27512	25702	2358792
457	209307	156752	26049	26049							191	36673	4394	12224	29605	
	209307	156750	156751	26049	31327350						191	36673	9549	32661	5348	4268277
461	212983	100960	40568	55781							193	12481	28179	36284	19686	
	212983	131384	116172	40568	64181342						193	12481	12544	17370	18721	6630322
463	214833	92138	195849	61116							197	39007	15367	22261	9653	
	214833	37039	171773	195849	67954973						197	39007	19305	4137	31914	5355642

Toshiaki OKAMOTO

										$\epsilon^3 - 2\epsilon^2 - 5\epsilon - 1 = 0, D = 19^2$								
						ℓ	n_1, n_2	Cst	$C(\omega_1)$	$C(\omega_2)$	Det							
199	39801	9951	8955	22089		367	135057	93219	35232	9909		3						
	39801	14128	34626	31044	1742444		135057	32662	34498	45141	12795455							
211						373						ϵ	13	4	0	0		
	14911	27220	38613	1477			6643	86537	130177	64902		$\epsilon + 1$	13	2	0	0		0
	14911	40511	7385	40090	5876772		6643	30212	101456	55950	24069317							
223						379						5						
	16651	18733	18286	13826			144021	59125	12507	74663			31	21	0	10		
	16651	45714	21408	32112	2884282		144021	108772	38279	87170	28728200		31	19	5	20		75
227						383						7						
	51757	40634	908	14982			147073	9959	86558	68557			6	29	7	7		
	51757	2269	4767	15890	1494341		147073	52087	61280	8426	11441742		6	36	21	28		49
229						389						11						
	228	17634	10305	27938			194	46681	9336	33843			10	12	11	22		
	228	27481	51983	14198	2989137		194	89471	120201	108142	2572457		10	12	66	66		605
233						397						13						
	232	13748	51493	31921			158007	138951	42082	19056			183	66	39	65		
	232	3030	35882	25164	11237823		158007	73841	16277	61138	10086976		183	155	104	0		2028
239						401						17						
	238	30354	32743	49712			161203	4412	34486	66165			307	222	221	272		
	238	42543	43259	31787	9767691		161203	1603	54135	100651	18170513		307	67	34	187		2601
241						409						19						
	58323	11810	31812	50610			55897	2046	128835	96524			57	96	171	342		
	58323	56875	16870	24341	4530318		55897	8179	121882	58078	28270489		57	113	342	133		1805
251						419						23						
	63253	4268	14307	59989			175981	139947	160477	72068			553	484	322	115		
	63253	35641	43423	11295	7749123		175981	66620	165086	56984	42485762		553	367	345	23		4232
257						421						29						
	66307	14136	24672	58596			420	132195	59361	8420			871	117	522	261		
	66307	23386	39064	17219	3038254		420	155350	143982	109460	62034350		871	753	812	203		15979
263						431						31						
	69433	61017	66539	56808			186193	6035	48272	157746			15	125	527	310		
	69433	53914	42343	54178	17084743		186193	67235	173262	20257	67245482		15	30	93	186		9610
269						433						37						
	72631	55684	1076	21520			187923	46765	92229	99157			36	1296	1221	37		
	72631	2689	5649	22596	72361		187923	148951	80538	3897	4687225		36	1148	1184	74		46546
271						439						41						
	24571	20055	7046	33333			193161	38633	168576	161113			1723	42	82	820		
	24571	39294	32791	40379	7490982		193161	55313	143114	136968	31991686		1723	1557	738	41		18491
277						443						43						
	193	9419	56231	33240			442	106764	119610	81955			1893	1377	731	129		
	193	6924	18005	12742	11739537		442	50503	92587	190933	35324820		1893	1762	602	989		9245
281						449						47						
	280	31192	23042	30910			202051	199806	14817	133353			2257	612	329	611		
	280	62945	59853	25009	13107526		202051	101922	175110	148170	25401726		2257	2161	1363	1551		92778
283						457						53						
	80373	18113	12452	37073			209307	43873	138471	109223			2863	2545	848	2544		
	80373	30280	24055	49525	19541716		209307	85001	21936	38845	24226484		2863	847	2120	318		87079
293						461						59						
	86143	28129	20803	55084			212983	35498	172414	205145			3541	3128	236	1534		
	86143	41605	50689	75887	19058478		212983	108334	102342	165038	14026386		3541	2654	2478	3304		59177
307						463						61						
	306	47893	52497	72452			462	164366	15279	157883			3783	1099	2684	976		
	306	78900	39603	63549	3864209		462	137049	75469	41207	29154184		3783	3171	0	915		186050
311						467						67						
	310	6843	89257	30789			233	119553	131694	18213			93	1676	1273	2345		
	310	44163	77439	73396	15765523		233	92465	118151	149907	72187459		93	3617	2211	1474		0
313						479						71						
	312	39439	626	73868			229921	213635	51732	228962			5113	4332	2130	568		
	312	83885	26918	23475	19495831		229921	109690	127414	51253	74797766		5113	70	4757	3266		317583
317						487						73						
	158	24093	56426	41527			237657	116881	38473	141230			5403	512	1314	1606		
	158	47234	36455	2536	30850123		237657	181163	210871	179703	1660183		5403	3211	803	4526		378359
331						491						79						
	109893	102611	79771	5627			241573	37808	40753	170377			6321	633	790	3318		
	109893	58255	42699	85398	8107514		241573	126677	130606	211130	82931864		6321	5292	5609	1185		74892
337						499						83						
	336	80207	71107	15839			498	179142	83832	13972			41	3321	1743	1992		
	336	46170	76162	26623	36114942		498	223553	209580	151197	55278222		41	6722	1494	5727		144669
347						89						89						
	120757	118675	65236	46845									8011	3472	1780	4094		
	120757	35046	90220	112081	35279837								8011	7831	5607	2047		427734
349						97						97						
	122151	38042	64216	115519									3169	2814	2522	9118		
	122151	25127	12215	57934	13763513								3169	7177	3880	1940		545722
353						101						101						
	124963	16945	28240	46596									10303	9697	1111	5050		
	124963	7059	52950	74836	41993233								10303	7473	2121	1010		714070
359						103						103						
	358	63544	114880	23335									102	6181	8755	8034		

A Table of Congruences on Units

107						257						421							
	106	2462	7276	10700			66307	2314	12850	11822			59221	72413	124616	169242			
	106	643	5136	5671	1007512		66307	42661	10794	36494	1849372		59221	420	36627	108618	24104776		
109						263						431							
	3997	10247	3706	9156			69433	16044	52074	3945			186193	36636	67667	128438			
	3997	2833	7957	10137	974242		69433	50232	23670	59964	9406984		186193	87061	12499	138782	19504905		
113						269						433							
	112	11188	1695	1921			72631	47883	49765	44654			5079	176232	36372	104353			
	112	4973	5763	7232	1187517		72631	20712	44654	66712	2315552		5079	103486	97858	57589	1124934		
127						271						439							
	5419	9780	15875	1397			24571	16261	70731	17886			6231	63217	58826	170771			
	5419	10286	7112	2540	1709674		24571	21679	29810	33062	14100672		6231	138284	169893	14926	38544200		
131						277						443							
	17293	14935	393	6550			276	47368	15235	26038			196693	112080	101004	87714			
	17293	14147	4454	13493	858050		276	59833	74513	9418	9898041		196693	106319	64235	80183	30222346		
137						281						449							
	18907	6714	6302	9727			79243	33440	15455	18827			448	1	73636	75881			
	18907	12877	6850	6987	544301		79243	2528	58729	53109	3553245		448	147273	147272	177804	16732883		
139						283						457							
	19461	4171	10147	417			26791	23773	8207	50940			228	168177	8683	22393			
	19461	3196	5282	10981	1796853		26791	7357	19244	29998	13855397		228	58040	182800	155380	23599937		
149						293						461							
	22351	8494	16688	3725			292	24906	62702	4102			212983	52555	94966	5532			
	22351	19518	12665	1937	1687276		292	14651	45122	14943	22406589		212983	75142	101420	106030	4887983		
151						307						463							
	150	18574	15251	18271			31519	63243	1842	80434			231	200943	53245	41207			
	150	11930	14043	16610	182408		31519	59557	91179	68461	25824226		231	94451	194923	135659	84247017		
157						311						467							
	24807	10049	20096	19625			155	72464	52248	39186			466	11676	50436	68182			
	24807	19153	24178	10048	2193761		155	64687	52559	33899	12380288		466	89198	192404	31289	70224658		
163						313						479							
	162	13693	12877	25591			32761	71052	30987	15337			229921	156155	205012	166692			
	162	12063	5216	15648	3055435		32761	9076	93587	61661	15381133		229921	205011	53648	79514	105083978		
167						317						487							
	28057	19039	24716	4342			100807	91297	81152	83688			486	150971	11688	135386			
	28057	25383	7014	5511	3290902		100807	29480	75129	47550	24217849		486	109576	34090	191878	52888687		
173						331						491							
	30103	2423	15051	5882			330	6621	87715	48657			241573	14240	221932	154665			
	30103	2248	3460	26815	89787		330	59250	55939	34093	14790735		241573	52536	180197	49100	72083219		
179						337						499							
	178	11099	28461	25597			113907	2023	17861	94360			249501	160679	67864	133732			
	178	13784	8234	16468	5575134		113907	79868	80880	93012	0		249501	24949	105289	86327	102837413		
181						347													
	10981	18101	20453	7240			120757	9023	81198	106876									
	10981	9954	19005	2172	1703572		120757	87443	91955	54132	41059469								
191						349													
	190	22730	31133	14134			348	79224	52699	71196									
	190	3057	9932	13561	3100885		348	26176	47464	48511	27405225								
193						353													
	37443	32618	5983	21423			352	31065	100958	50126									
	37443	20650	18335	11580	0		352	46244	30711	48008	8348803								
197						359													
	196	33294	19306	37233			129241	88315	47388	11129									
	196	5320	8077	22655	6675148		129241	122418	37695	69646	12243695								
199						367													
	39801	8160	199	23681			135057	19452	78538	71198									
	39801	7760	31641	7960	950424		135057	131752	74134	86245	12391388								
211						373													
	44733	19202	4853	30173			186	40658	70497	110408			ε	13	4	6	0		
	44733	9494	41356	20678	7969259		186	100338	10444	126074	2365193		$\bar{\varepsilon}$	13	7	6	0	0	
223						379													
	49953	18064	22077	17840			378	23878	37142	61398			5	31	16	5	10		
	49953	23637	7805	8028	4724255		378	50408	110289	127344	27004508		5	31	16	0	10	50	
227						383													
	226	39045	36320	15890			147073	114135	136348	123709			7	57	43	42	28		
	226	33597	14074	34958	4998313		147073	134815	45194	90388	47673925		7	57	15	21	35	196	
229						389													
	228	36412	10992	31831			151711	11671	116311	24118			11	7	100	66	11		
	228	38015	46029	30228	7971032		151711	81689	87525	13226	16040026		11	7	1	66	55	242	
233						397													
	54523	23068	22135	26795			158007	12308	35333	3573			13	61	66	91	104		
	54523	33085	17475	21436	6243235		158007	99249	26599	42479	29315274		13	61	144	117	78	1521	
239						401													
	119	46845	11472	37284			23029	32482	69774	40501			17	307	273	119	0		
	119	23899	47322	28919	856815		23029	53733	150375	150776	45185081		17	307	256	238	153	3468	
241						409													
	58323	18558	26510	54466			55897	2046	159919	84254			19	127	39	209	190		

A Table of Congruences on Units

467	466	22417	46233	127958	
	466	129827	135897	203145	48851936
479	229921	159987	125498	85741	
	229921	98675	188726	2395	54836399
487	237657	79382	208923	78407	
	237657	176782	89121	124185	15178816
491	241573	229789	28969	36825	
	241573	198365	180688	2455	46046471
499	83167	231537	152195	213572	
	83167	128244	117265	204590	4731019