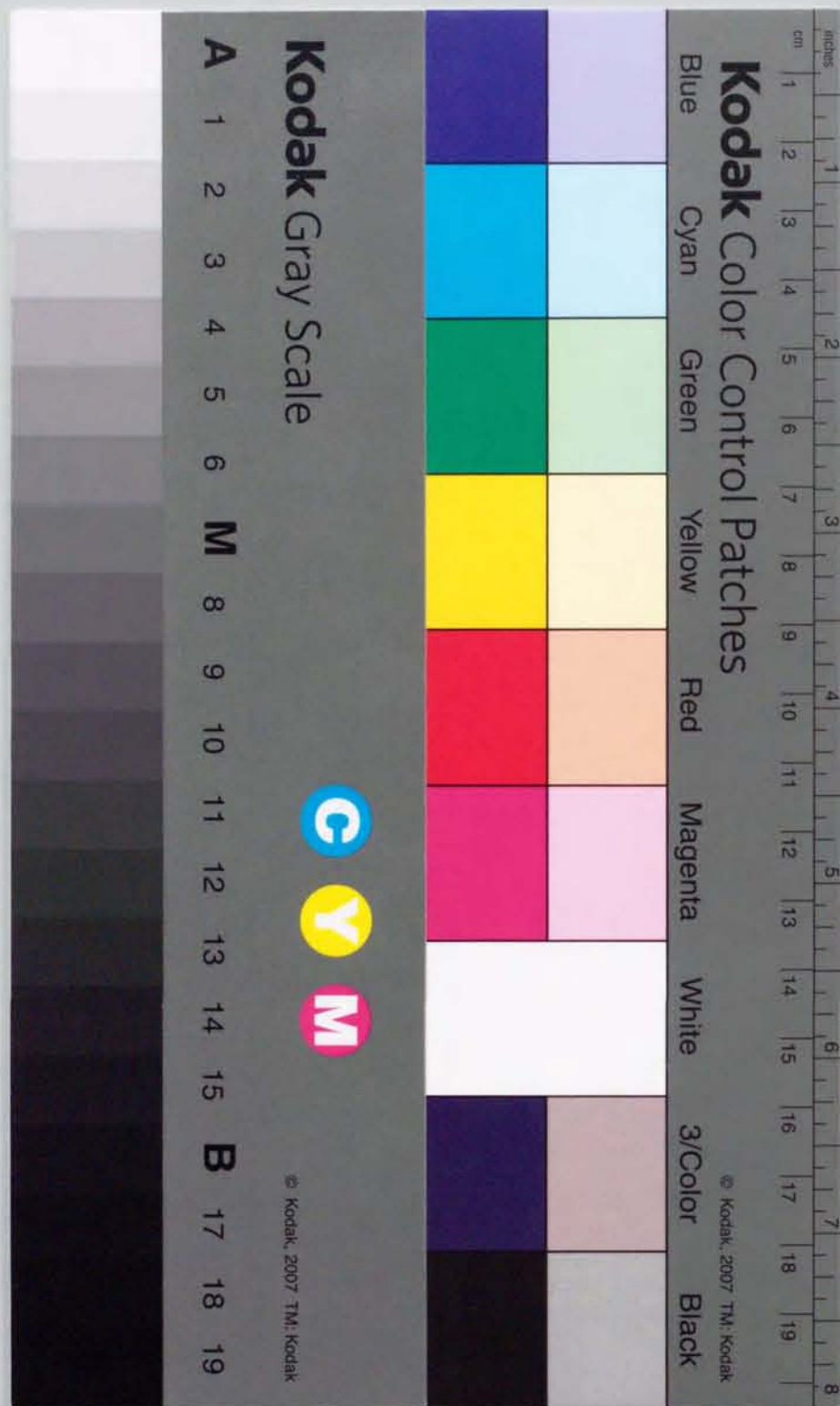


# 物体によるソリトンの散乱

上原大伸

平成11年12月27日





博士論文  
物体によるソリトンの散乱

愛媛大学理工学研究科環境科学専攻  
環境動態学講座 (応用物理学)

上原 大伸  
指導教官 長谷川 高陽

平成11年12月27日

# 目次

第1章 序論	3
第2章 2次の非線形媒質における KdV ソリトンの散乱	7
2.1 理論	7
2.1.1 モデル方程式	7
2.1.2 無限長媒質	8
2.1.3 半無限長媒質	10
2.1.4 物体によるソリトン散乱	11
2.2 数値実験	12
2.2.1 無限長媒質	13
2.2.2 半無限長媒質	17
2.3 結果と今後の課題	19
第3章 3次の非線形媒質における変形 KdV ソリトンの散乱	21
3.1 理論	21
3.1.1 モデル方程式	21
3.1.2 無限長媒質	21
3.1.3 半無限長媒質	22
3.1.4 物体によるソリトン散乱	23
3.2 数値実験	25
3.2.1 無限長媒質	25
3.2.2 半無限長媒質	27
3.3 結果と今後の課題	32
第4章 結論	33



## 第1章 序論

Zabusky, Kruskal の非線形格子ソリトンの発見以来 [1], ソリトン物理学は非線形物理学の中でも、非常に活発な分野の一つになった。ソリトンの方程式の中でも最も基本的な KdV 方程式の初期値問題が, Gardner らによって逆散乱法を用いて解けることが示され [2], KdV 方程式の  $N$  ソリトン解が逆散乱法をもちいて Wadati らにより具体的な形で求められた [3]. さらに非線形シュレディンガー方程式 (NLS) 方程式や変形 KdV 方程式 (mKdV) 方程式にも同様な方法が適用されるにあたって, 逆散乱法は KdV 方程式だけでなくもっと広い範囲の非線形方程式に適用されることが AKNS などの手法を用いて示され, 様々なソリトン方程式が発見され, 研究されることとなった。これらの KdV, NLS, mKdV といったソリトン方程式は, ただ単に可積分系であるというだけでなく, Taniuti によって開発された通減摂動法によって, 非常にひろいクラス of 非線形媒質に適用することができ, ソリトンが非線形性と分散性の釣り合う系における普遍的な現象であることが明らかになった [7]. 具体的な例としては底の浅い水の表面波や, 弾性管中の流体の運動, プラズマ中の荷電粒子の運動, LC 梯子型回路, 光ファイバー中のレーザーの伝播, 生物の筋収縮 などがある。光ファイバー中のレーザー伝播については通信分野への応用が可能までになってきている。

このようにソリトンが自然界における重要な要素の一つであることが明らかである以上ソリトンのさまざまな系における振舞を研究することは非常に重要である。不均一系における研究だけをとってみても, 実際に過去に行われた研究として, Sugimoto らによる流体のソリトン散乱 [11][12] や Iizuka, Wadati による一連の NLS, KP, KdV などの方程式で記述される系における散乱理論 [14][15][16][17] などがある。Sugimoto は底の浅い水の表面波で底が不均一になっている場合に, ソリトンがどのように散乱されるかを研究した。また Iizuka, Amie らは非線形格子中に不純物がある場合の包絡ソリトンの散乱についてシミュレーションを行い, Iizuka, Wadati の NLS ソリトンに関する散乱理論が正しいことを証明した [19]. これらの理論で重要な点は, 不均一性が適当に局在している局所的不均一系においては通減摂動法を拡張することにより, 非線形波動の散乱が解析でき, その結果, 入射波

と散乱波は互いに独立なソリトン方程式で記述できるという点である。そのため散乱波の初期状態が分かれば逆散乱法によりその後波の発展を記述することが可能である。ここで局所的不均一 (localized inhomogeneity) とは, 不均一領域がソリトンのスケールよりもはるかに狭い範囲に局在していることである。

以上のように非線形波動に関するソリトンの散乱の研究は多方面に渡っているが, 非線形媒質中の波動と物体の相互作用, とくに物体の運動についての研究はこれまで, ほとんどないといえる。しかし, 実際には水路上に浮かぶ船の運動や, 音響波とピストンの相互作用, プラズマ中の荷電物体の運動など, 波と物体が相互作用する系は数多く考えられる。最近になって, 著者らは2次の非線形媒質について初めて, 数値実験を含めた研究を行った [21]. これは Iizuka, Wadati らの KdV ソリトンの散乱理論を用いて新たに物体の運動を記述し, さらに KdV ソリトンの散乱理論が正しいこと, また入射波が KdV ソリトンのとき, 物体の運動を線形的に記述できることを数値実験によって確かめたものである。本論文の目的は, さらに3次の非線形性も含めた, ソリトンの可動物体による散乱の包括的解析である。特に逆散乱法を駆使した非線形波動の解析法を提出するとともに, 数値シミュレーションを用いてその検証を行う。ここでは特に代表的なソリトンモデルである KdV 方程式と mKdV 方程式に支配される媒質に物体が置かれたとき, 媒質を伝わるソリトンと物体との間の相互作用の理論的な解析を行う。ソリトンが物体によってどのような散乱を受けるのか? 具体的には散乱波から生成されるソリトンはいくつか? それらの振幅はどうなるのか? また, その際物体はどのような運動を示すのか? これらを, 逆散乱法から導かれる結果と, 力学モデルによる数値実験の両面から考察する。

本論文では, 非線形媒質中における物体の配置法は, 以下の図に示すような2つの場合を考える。ひとつは無限長の媒質中に物体が位置している場合 - 今後 case A と呼ぶ (図

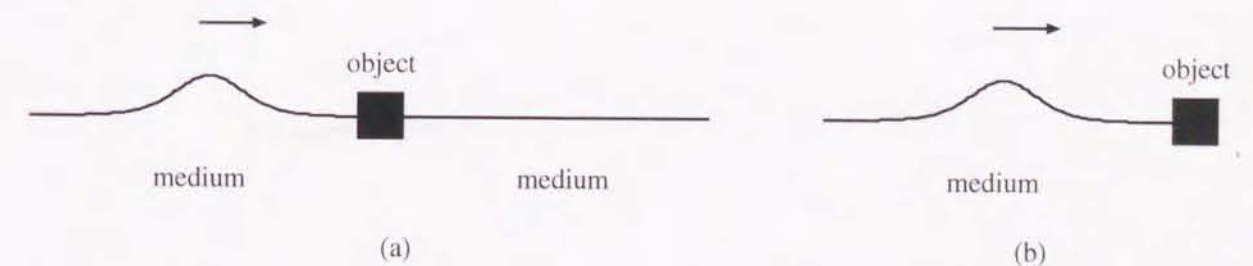


図 1.1: 境界端非線形媒体中 (a) またはその端 (b) に物体を置いた。最初を case A, 後を case B と呼ぶことにする。



1.1(a)), もうひとつは半無限長の媒体端に物体が位置している場合 – 同様に case B と呼ぶ, (図 1.1(b)) である. 力学モデルとしては媒質は非線形格子の連続体極限を採用し, また物体は格子中の非常に重い不純物であるとする. このとき, 格子の運動は Boussinesq 型の非線形波動方程式に支配され, 物体の運動は波動の境界条件から決定できる. さらに, 入射波と散乱波が独立なソリトン方程式を満たすことを示す. どのようなソリトン方程式が導かれるかは媒質の非線形性に依存する. 2 次の非線形性の場合には KdV 方程式であり, 3 次の非線形性ならば変形 KdV (mKdV) 方程式である. 境界条件を用いることにより, 入射波が与えられると, 物体の運動を求めることができ, 反射波, case A の場合はさらに透過波の「初期条件」導くことができる. KdV 方程式や変形 KdV 方程式は完全可積分系で, 初期値問題は逆散乱法で解くことができるので, 原理的には散乱波 (反射波, 透過波) のダイナミクスが決定できる.

本論文では以上の理論的シナリオを基にソリトンの不純物による散乱を調べる. 第 2 章では 2 次の非線形媒質を扱う. 入射波として KdV 方程式の 1 ソリトン解を用いて, 物体の運動, 散乱波の初期条件を不完全  $\beta$  関数を用いて解析的に求める. さらに, 初期条件から KdV 方程式の補助線形方程式であるシュレディンガー方程式のスペクトル問題を数値的に解く. 得られたスペクトルデータから, 散乱波のソリトンの個数やそれらの振幅を求めることができる. さらに, 格子のダイナミクスを直接シミュレーションすることによって両者の比較を行う. 以上の解析を case A, B に分けて行う. 第 3 章においては 3 次の非線形媒質を解析する. 入射波として, mKdV ソリトンを仮定し同様の解析を行う. ただし, この場合は散乱波に通常のソリトン以外にもブリザーが発生するのでここで注意しておく. 第 4 章では本論文の結論および議論を述べる.



## 第2章 2次の非線形媒質におけるKdVソリトンの散乱

### 2.1 理論

#### 2.1.1 モデル方程式

非線形格子(図2.1)の $j$ 番目の粒子の運動方程式が以下のように与えられた場合を考える.

$$m_j \frac{d^2 y_j}{dt^2} = K \{ [(y_{j+1} - y_j) + \alpha(y_{j+1} - y_j)^2 + \dots] - [(y_j - y_{j-1}) + \alpha(y_j - y_{j-1})^2 + \dots] \}, \quad (2.1)$$

ここで $y_j, m_j$ はそれぞれ $j$ 番目の粒子の変位と質量,  $K, \alpha$ はそれぞれバネ, 及び非線形定

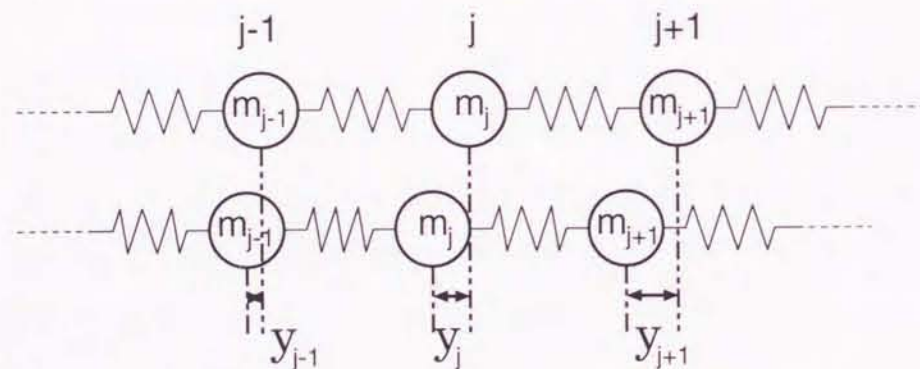


図 2.1: 非線形格子.  $y_j$  は自然長(粒子に力が加わっていない状態)からの変位である.

数である. そして無限長媒質(case A)では

$$\begin{cases} m_0 = M, \\ m_j = m \quad (j \neq 0, m \ll M), \end{cases} \quad (2.2)$$

のように, そして半無限長媒質(case B)では

$$\begin{cases} m_0 = M, \\ m_j = m \quad (j < 0, m \ll M), \\ m_j = 0 \quad (j > 0), \end{cases} \quad (2.3)$$

のように質量分布を与える. 物体は0番目の粒子により表されている. 物体の運動方程式は次のようになる.

$$\begin{aligned} M \frac{d^2 y_0}{dt^2} &= -K \left( \left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_{x=-0} - \left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_{x=+0} \right), \quad (\text{case A}) \\ M \frac{d^2 y_0}{dt^2} &= -K \left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_{x=-0}. \quad (\text{case B}) \end{aligned} \quad (2.4)$$

ここで $y_0$ は物体の変位である. 方程式(2.4)では高次の項は落してある. また長波長条件を考慮にいれる事により,  $y_0 \simeq y_{\pm 1}$ は

$$y_0 = y|_{x=-0} = y|_{x=+0}, \quad (2.5)$$

を満足する. 連続条件 $y_j(t) = y(x, t)$ により, 格子波(2.1)はBoussinesq型の方程式

$$\frac{1}{c_0^2} y_{tt} = y_{xx} + 2\alpha y_x y_{xx} + \frac{1}{12} y_{xxxx}, \quad (2.6)$$

$$c_0 = \pm \sqrt{\frac{K}{m}}, \quad (2.7)$$

により与えられる[17]. ここで分散量 $j$ は連続量 $x$ に書き換えた. また方程式(2.6)の下付き添字は対応する変数で偏微分する事を示している. 方程式(2.6)では, 高次のオーダーの非線形および分散項は省略した.  $y_x$ がBoussinesq方程式を満たす事は容易に示すことができる. Boussinesq方程式(2.6), 境界の運動(2.4)そして境界条件(2.5)は非線形媒体と物体の間の相互作用の記述の典型的な系である.

本論文においては, いわゆる弱非線形, 弱分散近似を採用する. 従って, ソリトン物理学においてしばしば採用される通減摂動法をここでも用いる[7]. つまり, 群速度で動く座標系を導入して非線形性と分散性がつりあうような変数変換を独立変数およびを導入する. しかし, 注意せねばならぬのは入射領域においては, 反射波と入射波が混在しそれらが逆の群速度を持つということである. そのために, 我々は2つの波を記述する別々の独立変数を導入しなければならない[14][17]. これは, ソリトンの散乱を用いる際の共通した手法である. 以下無限長(case A), 半無限長(case B)それぞれについて解析を行う.

#### 2.1.2 無限長媒質

Case Aの場合は, 物体の入射側とその反対側をわけて考える. まず左側の領域 $x < 0$ では入射波と反射波が混在することを考慮に入れて, 次の新しい独立変数を導入する.

$$\xi = \varepsilon(x - c_0 t), \quad (2.8)$$



$$\bar{\xi} = \varepsilon(x + c_0 t), \quad (2.9)$$

$$\tau = \frac{\varepsilon^3}{24}x \quad (\tau < 0). \quad (2.10)$$

ここで,  $\varepsilon$  は分散性と非線形性を表す, 無次元の小さなパラメータである. 従属変数  $u^I(\xi, \tau), u^R(\bar{\xi}, \tau)$  については以下の変換を行う.

$$y(x, t) = -\frac{\varepsilon}{4\alpha}[u^I(\xi, \tau) + u^R(\bar{\xi}, \tau)]. \quad (2.11)$$

(2.8)–(2.10) より

$$\frac{\partial}{\partial x} \longrightarrow \varepsilon \frac{\partial}{\partial \xi} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}} + \frac{\varepsilon^3}{24} \frac{\partial}{\partial \tau}, \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \longrightarrow -\varepsilon c_0 \frac{\partial}{\partial \xi} + \varepsilon c_0 \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}}. \quad (2.13)$$

式 (2.11)–(2.13) を (2.6) に適用すると,  $\varepsilon^3$  を含む項は互いに打ち消し合い 0 になる.  $\varepsilon^5$  の項より次式を得る [14].

$$\Psi_\tau^I - 6\Psi^I\Psi_\xi^I + \Psi_{\xi\xi\xi}^I = 0 \quad (\tau < 0), \quad (2.14)$$

$$\Psi_\tau^R - 6\Psi^R\Psi_{\bar{\xi}}^R + \Psi_{\bar{\xi}\bar{\xi}\bar{\xi}}^R = 0 \quad (\tau < 0), \quad (2.15)$$

$$\Psi^I(\xi, \tau) = u_\xi^{(I)}, \quad (2.16)$$

$$\Psi^R(\bar{\xi}, \tau) = u_{\bar{\xi}}^{(R)}. \quad (2.17)$$

注意すべきは,  $\Psi^I$  および  $\Psi^R$  はそれぞれ, 入射波と反射波に直接関係する波動であり, それぞれが独立な KdV 方程式を満たしていることである.

次に右側の領域  $x > 0$  では, ここでは透過波のみが存在するので, 方程式 (2.11) の代わりに次の  $u^T(\xi, \tau)$  を導入する.

$$y(x, t) = -\frac{\varepsilon}{4\alpha}u^T(\xi, \tau). \quad (2.18)$$

さらに同様に

$$\Psi^T = u_\xi^T, \quad (2.19)$$

を定義すると以下の KdV 方程式を得る.

$$\Psi^T - 6\Psi^T\Psi_\xi^T + \Psi_{\xi\xi\xi}^T = 0. \quad (\tau > 0) \quad (2.20)$$

境界条件 (2.4), (2.5) から, 入射波, 反射波, 透過波間の  $x = 0$  における関係を得る事ができる [17].

$$\Psi^T(\xi, 0) = -\mu e^{\mu\xi} \int_{\xi}^{+\infty} e^{-\mu\xi'} \Psi^I(\xi', 0) d\xi', \quad (2.21)$$

$$\Psi^R(\bar{\xi}, 0) = \Psi^I(-\bar{\xi}, 0) - \Psi^T(-\bar{\xi}, 0), \quad (2.22)$$

$$\mu = \frac{2m}{\varepsilon M}. \quad (2.23)$$

もし入射波  $\Psi^I$  が与えられれば,  $\Psi^T$  と  $\Psi^R$  の初期条件を得る事ができる. KdV 方程式の初期値問題を解くことにより, 透過波  $\Psi^T(\xi, \tau)$  と反射波  $\Psi^R(\bar{\xi}, \tau)$  を構成する事ができる. 物体の運動は

$$y_0(t) = \frac{\varepsilon^2 K}{2\alpha M} \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^{t'} \Psi^R(\varepsilon c_0 t'', 0) dt'' dt', \quad (2.24)$$

で与えられる. ここで  $y_0(-\infty) = \dot{y}_0(-\infty) = \ddot{y}_0(-\infty) = 0$  とした.

### 2.1.3 半無限長媒質

この場合つまり case B では片側  $x < 0$  についてののみ考えればよい. 同様の変換 (2.8)–(2.11) を適用すると KdV 方程式 (2.14), (2.15) を得る. 境界条件 (2.4), (2.5) そして波動方程式 (2.6) から次式を得る.

$$\frac{M}{m} y_{xx} = -y_x \quad (\text{at } x = 0). \quad (2.25)$$

ここで高次の項は無視した. 式 (2.11) と変換 (2.12) により, 方程式 (2.25) は次のように書き換えられる.

$$\Psi_\xi^I + \Psi_\xi^R = -\frac{m}{\varepsilon M}(\Psi^I + \Psi^R). \quad (\text{at } \tau = 0) \quad (2.26)$$

ここで  $\tau = x = 0, \xi = -\bar{\xi} = -c_0 t$  が満たされていることに注意すると, 方程式 (2.26) は  $\Psi^R(\tau = 0)$  について容易に解かれる.

$$\begin{aligned} \Psi^R(\bar{\xi}, 0) &= \Psi^I(-\bar{\xi}, 0) \\ &+ \mu e^{-\frac{\mu}{2}\bar{\xi}} \int_{+\infty}^{-\bar{\xi}} e^{-\frac{\mu}{2}\xi'} \Psi^I(\xi', 0) d\xi'. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Case A の場合と同様に KdV 方程式を解くことにより, 入射波から反射波を構成する事ができる. さらに, 物体の運動は

$$\begin{aligned} y_0(t) &= \frac{\varepsilon^2 K}{4\alpha M} \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^{t'} [\Psi^I(-\varepsilon c_0 t'', 0) \\ &+ \Psi^R(\varepsilon c_0 t'', 0)] dt'' dt', \end{aligned} \quad (2.28)$$



と与えられる.

### 2.1.4 物体によるソリトン散乱

この節では, 2.1.2, 2.1.3 節の結果を, 物体による KdV ソリトンの散乱に適用する. 入射波  $\psi^I(\xi, \tau)$  が 1 ソリトン解のときについて考える.

$$\psi^I(\xi, \tau) = -A \operatorname{sech}^2 \left[ \sqrt{\frac{A}{2}} (\xi - 2A\tau) \right]. \quad (2.29)$$

式 (2.21), (2.22) および (2.27) を解くことにより, 初期条件

$$\psi^T(\xi, 0) = -2\sqrt{2A}\mu e^{\mu\xi} B_v \left( \frac{\mu}{\sqrt{2A}} + 1, -\frac{\mu}{\sqrt{2A}} + 1 \right) \quad (\text{case A}), \quad (2.30)$$

$$\begin{aligned} \psi^R(\bar{\xi}, 0) = & -A \operatorname{sech}^2 \sqrt{\frac{A}{2}} \bar{\xi} \\ & + 2\sqrt{2A}\mu e^{-\mu\bar{\xi}} B_v \left( \frac{\mu}{\sqrt{2A}} + 1, -\frac{\mu}{\sqrt{2A}} + 1 \right) \quad (\text{case A}), \end{aligned} \quad (2.31)$$

$$\begin{aligned} \psi^R(\bar{\xi}, 0) = & -A \operatorname{sech}^2 \sqrt{\frac{A}{2}} \bar{\xi} \\ & + 2\mu e^{-\frac{\mu}{2}\bar{\xi}} \sqrt{2A} B_v \left( \frac{\mu}{2\sqrt{2A}} + 1, -\frac{\mu}{2\sqrt{2A}} + 1 \right) \quad (\text{case B}), \end{aligned} \quad (2.32)$$

$$v = \frac{e^{-\sqrt{\frac{A}{2}}\xi}}{e^{-\sqrt{\frac{A}{2}}\xi} + e^{\sqrt{\frac{A}{2}}\xi}} = \frac{e^{\sqrt{\frac{A}{2}}\bar{\xi}}}{e^{\sqrt{\frac{A}{2}}\bar{\xi}} + e^{-\sqrt{\frac{A}{2}}\bar{\xi}}}, \quad (2.33)$$

を得る. ここで  $B_v(x, y)$  は不完全ベータ関数である.

$$B_v(x, y) = \int_0^v t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt. \quad (2.34)$$

式 (2.24), (2.28), (2.30), (2.31)–(2.33) を用いる事により, 入射ソリトンが衝突している間の物体の運動を検出することができる. Case A および B に対する結果をそれぞれ図 2.2, 2.6 に示す. よく知られている KdV 方程式の初期値問題は逆散乱法により解かれ, ソリトンの生成はシュレディンガー方程式の不連続固有値つまり離散スペクトルの検出により決定される.

簡単に述べると, KdV 方程式の初期値  $\psi(\xi, 0)$  をポテンシャルに持つシュレディンガー方程式

$$\Phi_{\xi\xi} - [\psi(\xi, 0) - \lambda]\Phi = 0, \quad (2.35)$$

の離散固有値  $\lambda$  をもとめる.  $\Phi(\xi)$  は波動関数である. この固有値  $\lambda$  は初期値から生成される KdV ソリトンの振幅の半分であり無限遠方  $\tau \rightarrow \infty$  で生成されるソリトンは,

$$\psi(\xi, \tau) = -2\lambda \operatorname{sech}^2[\sqrt{\lambda}(\xi - 4\lambda\tau) - \xi_0], \quad (2.36)$$

であり, 離散固有値の数は生成されるソリトンの数に等しい.

ポテンシャル (2.30) – (2.32) に対して, QL 法アルゴリズムによりスペクトルを計算した. Case A の結果を図 2.4, 2.5 の実線で, case B の結果を図 2.8 の実線で示す. グラフは  $\mu = 2m/\varepsilon M$  の関数として描かれている. これらの結果から, case A の透過波  $\psi^T(\xi, \tau)$  では物体の質量が非常に重い場合 ( $\mu$  が小さい場合) 3つのソリトンが存在し物体の質量が軽くなるにつれ ( $\mu$  の値が大きくなるにつれ) て, 2つ, 1つ, ... とソリトンの数が減少し, 生成されるソリトンの振幅は増加することが予測される. また Case A の反射波  $\psi^R(\xi, \tau)$  や Case B では物体の質量にかかわり無く 1つのソリトンが生成され, 物体の質量が重くなるほど生成されるソリトンの振幅は増加することが予想される.

## 2.2 数値実験

この節では, 前節で得られたソリトンの散乱現象の, 離散スペクトルからの結果を検証するために, もとの非線形媒質系を直接シミュレーションする. 具体的には, Boussinesq タイプの方程式 (2.6) で支配される非線形媒体と非線形媒体につながれた物体の相互作用を実現する非線形格子を用いてその運動方程式を解く. この相互作用は接続条件 (2.4) 及び (2.5) により表される. 格子モデル (2.1)–(2.3) は境界条件において以上で述べられた系として考えられる. よって, 非線形格子モデルを用いその運動方程式の数値計算を実行することができる. また入射波は KdV One-Soliton 解とした. One-Soliton 解の Boussinesq 方程式の  $y_x$  に対する式は以下のように与えられる.

$$y_x(x, t) = A_B \operatorname{sech}^2[\sqrt{2\alpha A_B}(x - ct)], \quad (2.37)$$

$$c = c_0 \left( 1 + \frac{\alpha A_B}{3} \right). \quad (2.38)$$

ここで,  $A_B$  はパラメータで, Boussinesq 座標系でのソリトンの振幅である. 入射波の KdV ソリトン (2.29) を計算すると, 微小パラメータ  $\varepsilon$  は次のように与えられることがわかる.

$$\varepsilon = 2\sqrt{\frac{\alpha A_B}{A}}. \quad (2.39)$$



入射波を KdV ソリトン (2.29) とし初期条件  $y(x, t)$  および  $y_t(x, t)$  を次のように与える.

$$y(x, t) = \frac{\varepsilon}{2\alpha} \sqrt{\frac{A}{2}} \tanh \left\{ \frac{\varepsilon A}{2} \left[ \left( 1 - \frac{\varepsilon^2 A}{12} \right) x - c_0 t \right] \right\}, \quad (2.40)$$

$$y_t(x, t) = -\frac{\varepsilon^2 c_0 A}{4\alpha} \sqrt{\frac{A}{2}} \operatorname{sech}^2 \left\{ \frac{\varepsilon A}{2} \left[ \left( 1 - \frac{\varepsilon^2 A}{12} \right) x - c_0 t \right] \right\}. \quad (2.41)$$

格子力学系  $y_j(t)$  のなかでは, 連続変数  $x$  は次のように離散変数  $j$  に置き換えられる.

$$y_j(t) = \frac{\varepsilon}{2\alpha} \sqrt{\frac{A}{2}} \tanh \left\{ \frac{\varepsilon A}{2} \left[ \left( 1 - \frac{\varepsilon^2 A}{12} \right) j - c_0 t \right] \right\}, \quad (2.42)$$

$$\frac{dy_j(t)}{dt} = -\frac{\varepsilon^2 c_0 A}{4\alpha} \sqrt{\frac{A}{2}} \operatorname{sech}^2 \left\{ \frac{\varepsilon A}{2} \left[ \left( 1 - \frac{\varepsilon^2 A}{12} \right) j - c_0 t \right] \right\}. \quad (2.43)$$

ソリトン散乱をシミュレーションするには非常に多くの時間が必要である. なぜなら, 反射または透過波中において生成されるソリトンとさざ波を分離しなければならない. これに必要な時間が  $\varepsilon^{-3}$  のオーダーである. よって  $\varepsilon$  をあまりに小さくすることは難しい. しかし,  $\varepsilon$  は近似の精度を良くするために小さくしなければならない. 数値計算 (2.1) – (2.3), (2.42), (2.43) に対する数値計算のなかで  $\varepsilon = 0.06$ ,  $m = 1$ ,  $A = 1$ ,  $K = 1$ ,  $\alpha = 0.09$ ,  $t = -500$  に設定し  $M$  を変化させた. 式 (2.1) に対する数値スキームとして加速度項を

$$\frac{d^2 y_j(t)}{dt^2} \rightarrow \frac{y_j^{s+1} - 2y_j^s + y_j^{s-1}}{(\Delta t)^2}, \quad (2.44)$$

とした Verlet の方法を使用した. ここで  $s$  は整数で  $y_j^s \equiv y_j(s\Delta t)$  である. この計算を通して, 時間ステップ  $\Delta t$  は 0.025 に設定した.

### 2.2.1 無限長媒質

初期条件 (2.42), (2.43) に対して, 運動方程式 (2.2), (2.1) を解く. ソリトン散乱中, 物体の運動を  $y_0(t)$  の時間発展で検出する. 結果を図 2.2 でしめすが, 菱形が理論値である実線に非常に良く一致していることがわかる.

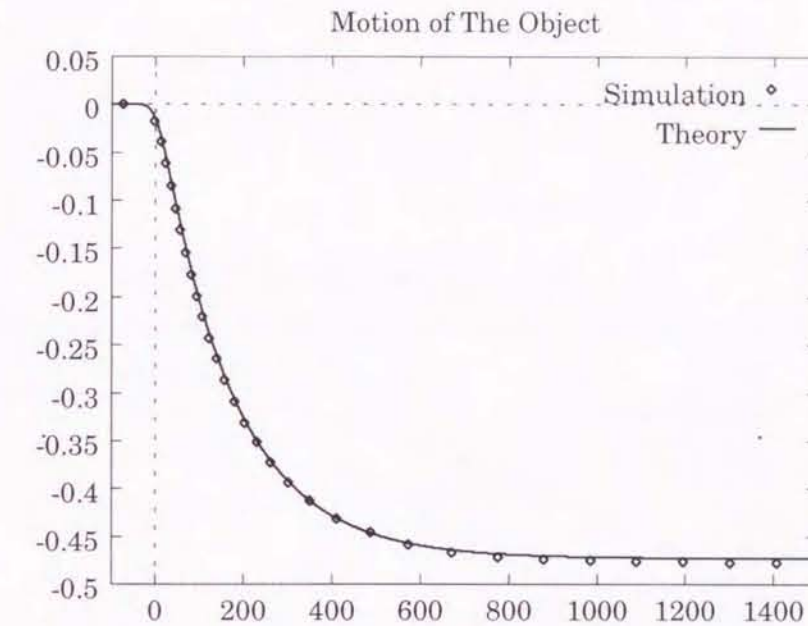


図 2.2: 入射波が KdV 1 ソリトンの場合の物体の運動 (Case A) 菱形はコンピュータシミュレーションにより計算された物体  $y_0$  の値, 実線は理論値.

同様に, 物体の位置 (初期条件) での透過波及び反射波の運動は, 不完全ベータ関数により計算された理論値 (2.21) 及び (2.22) と一致している. 十分に長時間の後, 生成されたソリトンと放射はそれぞれ分離する.  $\mu = 1.0$  に対する散乱後, 十分時間がたった場合の概形を図 2.3 に示す. また生成されたソリトンの振幅と数を検出した (図 2.4, 図 2.5). 透過波 (図 2.4)

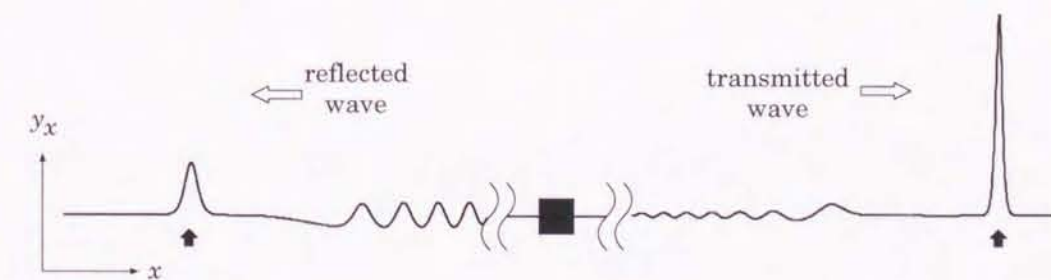


図 2.3:  $\mu = 1.0$  のときの反射, 透過波の概形. 黒矢印は生成されたソリトンを示している.

では,  $\mu > 1.0$  に対して 1 つのソリトンのみが生成され,  $0.15 < \mu < 1.0$  および  $\mu < 0.15$  では 2 および 3 つのソリトンがそれぞれ検出された. 反射波 (図 2.5) では 1 つのソリトンのみが存在する. 図 2.4 (透過波) と図 2.5 (反射波) のダイヤモンドで示された振幅は逆散乱法に基づく理論値 (実線) と非常に良く一致しているのがわかる.



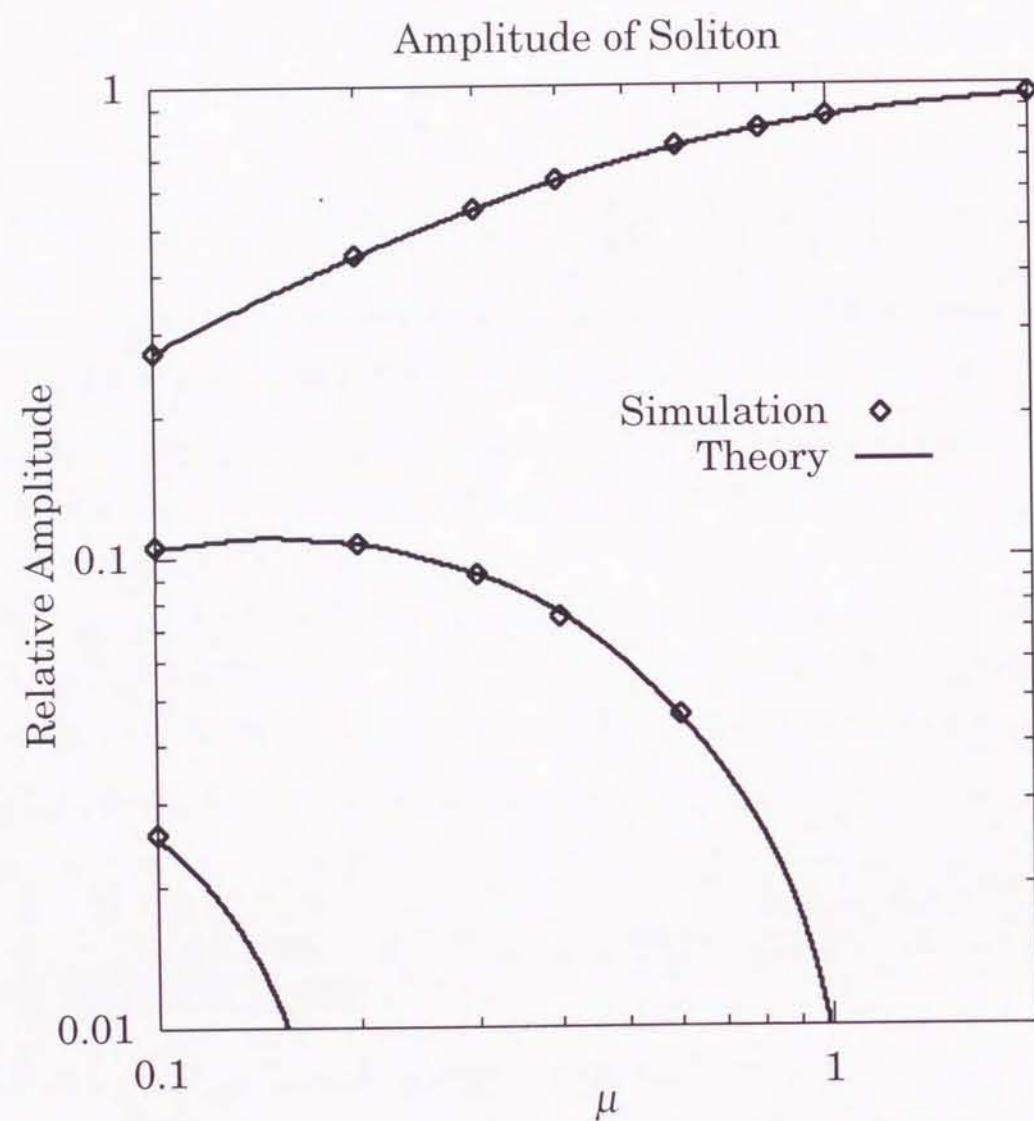


図 2.4: Case A での透過ソリトンの振幅. 検出された透過波中のソリトン振幅, ここで入射ソリトンの振幅は 1 である.

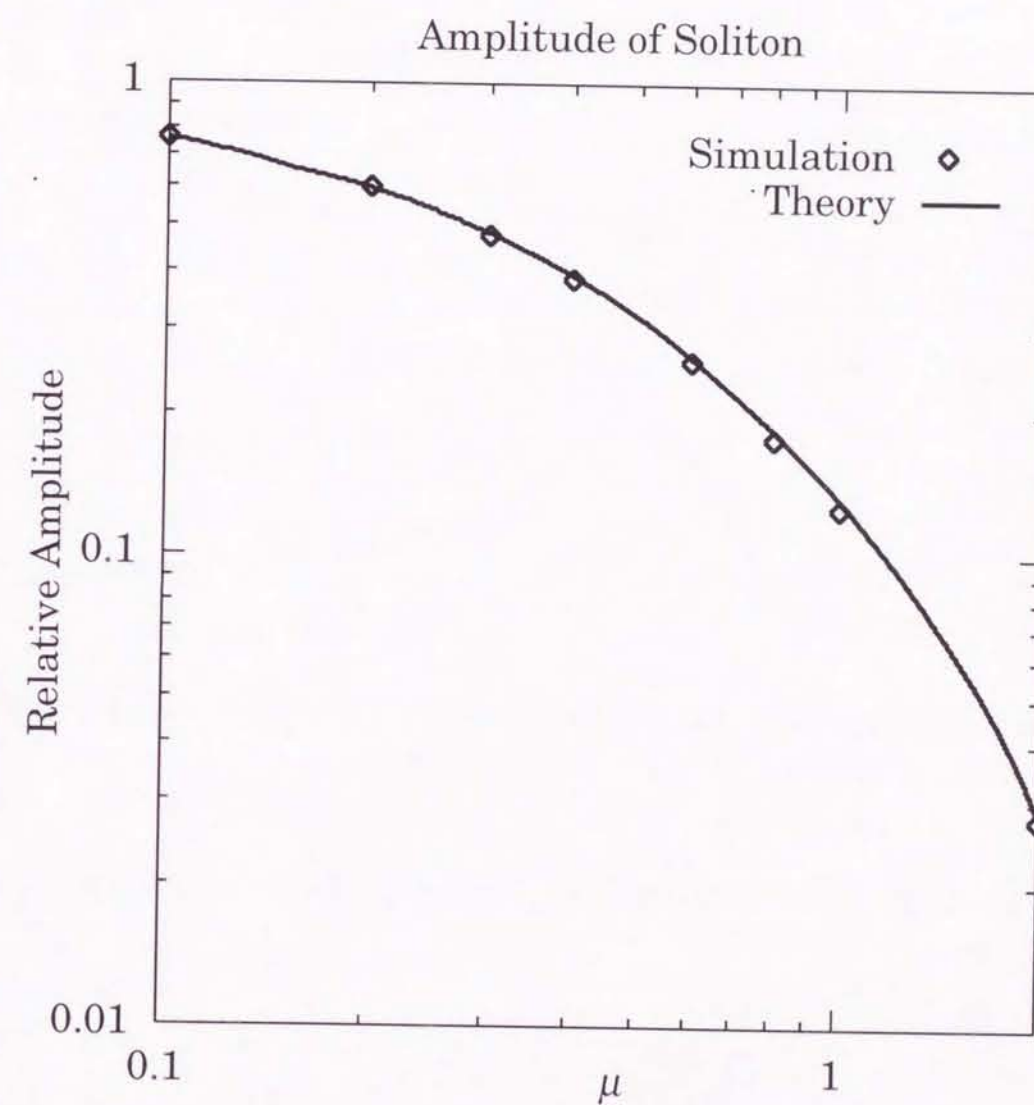


図 2.5: Case A での反射ソリトンの振幅. 検出された反射波中のソリトン振幅, ここで入射ソリトンの振幅は 1 である.



## 2.2.2 半無限長媒質

無限長の場合同様に数値実験を行った。この場合も以下に示すように、シュレディンガー方程式のスペクトラムから得られた理論値と非常に良い一致を得ることができた。物体の運動は図 2.6 では菱形で描かれている。波の概形と生成されるソリトンの振幅を図 2.7 及

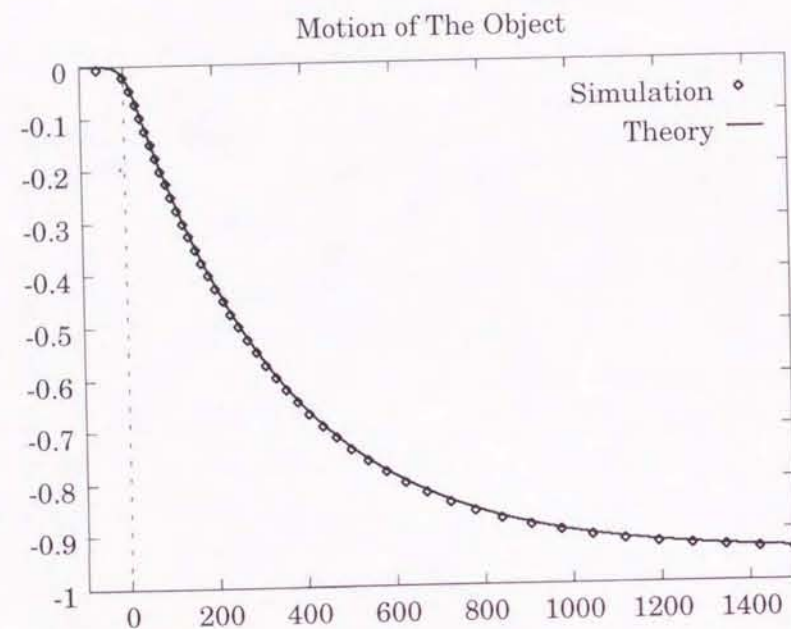


図 2.6: Case B での物体の運動。入射波は KdV 1 ソリトンである。縦軸は物体の位置  $y_0$  を示し、横軸は時間  $t$  を示す。パラメータ  $\mu$  は 0.1 である。

び図 2.8 にそれぞれ示す。Case A と同様反射波では一つのソリトンが生成される。

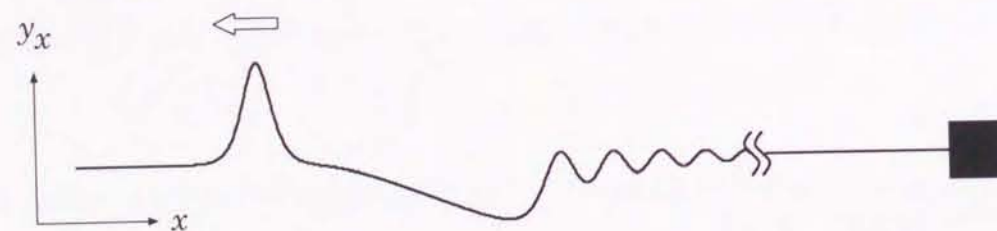


図 2.7: 散乱後の波の概形

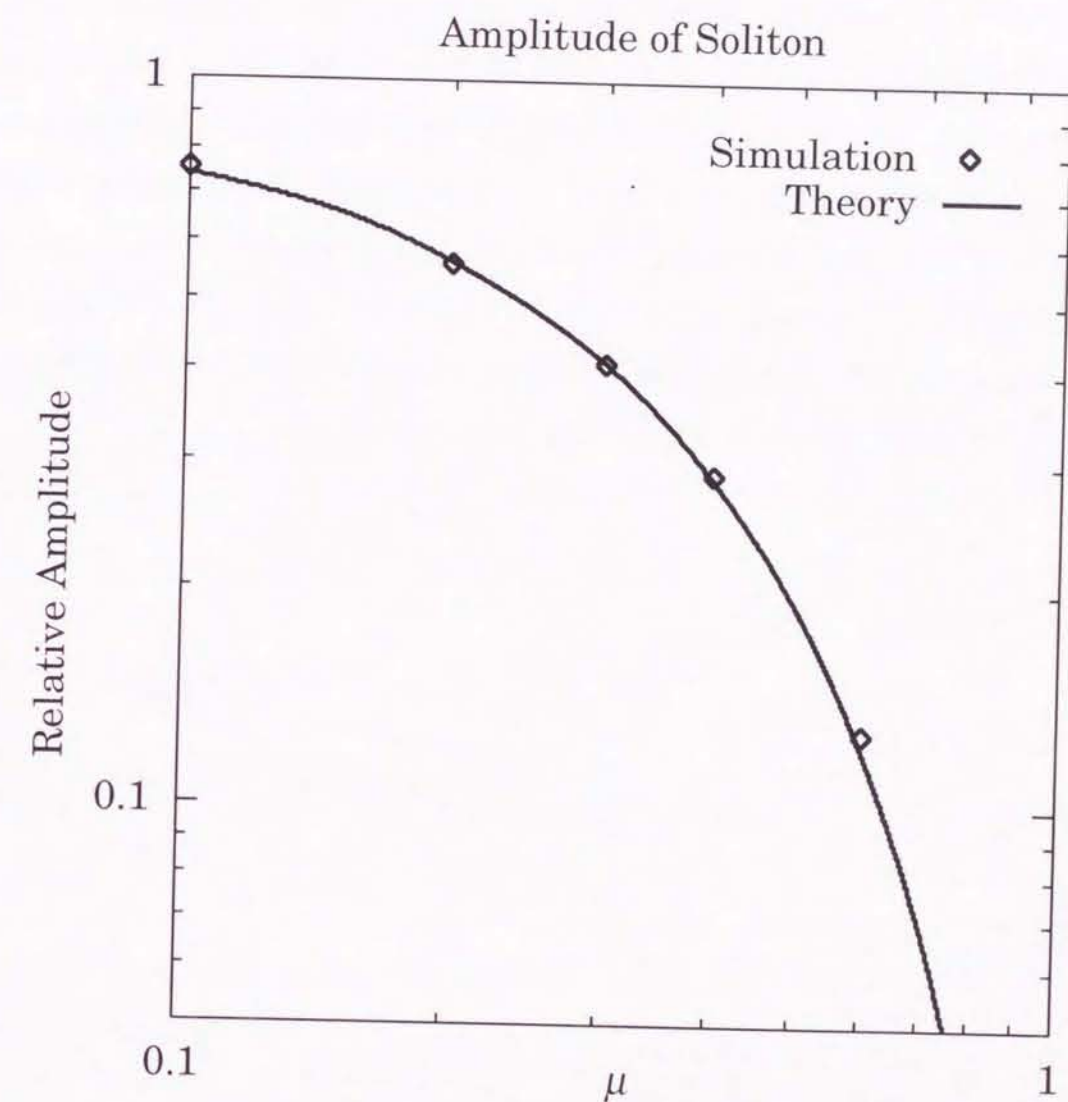


図 2.8: Case B における反射ソリトンの振幅。反射波によりもたらされたソリトンの相対振幅入射ソリトンの振幅は 1 である。



## 2.3 結果と今後の課題

本章では、2次の非線形媒質における非線形波動と物体の相互作用を解析した。長波長極限として汎用性のある Boussinesq タイプの方程式 (2.6) を満たす非線形媒質を考えた。物体との相互作用は境界条件 (2.4) で与えられる。さらに、これらを実現する力学系として、非線形格子 (2.1) で質量分布 (2.2) および (2.3) をもつ系をモデルとして採用した。結果として、入射波が与えられた時の散乱波のダイナミクスは、KdV 方程式の初期値問題に還元されることがわかった。特に、物体によるソリトン散乱について逆散乱法による理論およびシミュレーションの両面から解析した。生成されたソリトンの振幅を検出し、両者のよい一致を得た。これは、我々の知る限りでは、ソリトンと動いている物体の相互作用を解析した、最初の研究である。ここで用いた手法は非線形格子に限られたことではなく、流体系—例えば運河の中の船の運動や、非線形音響波とピストンの運動相互作用など2次の非線形性を有する広いクラスの物理系に対しても適用できるものと考えられる。



## 第3章 3次の非線形媒質における変形 KdV ソリトンの散乱

この章では3次の非線形媒質における、ソリトンと物体の相互作用を解析する。前章同様、非線形格子モデルを用いる。

### 3.1 理論

#### 3.1.1 モデル方程式

ここでは非線形格子モデルの、粒子の運動方程式を次のようにおく。

$$m_j \frac{d^2 y_j}{dt^2} = K \{ [(y_{j+1} - y_j) + \beta^2 (y_{j+1} - y_j)^3 + \dots] - [(y_j - y_{j-1}) + \beta^2 (y_j - y_{j-1})^3 + \dots] \}. \quad (3.1)$$

この式と式(2.1)は粒子の働く力の非線形特性が異なっている。この式に対して、連続体近似を行い、 $j$  を  $y_j(t) = y(x, t)$  と連続変数に置き換えることにより次式を得る。

$$\frac{1}{c_0^2} y_{tt} = y_{xx} + 3\beta^2 (y_x)^2 y_{xx} + \frac{1}{12} y_{xxxx} \quad (3.2)$$

以下前章同様に、case A, B 2つの場合に分けて、さらに入射波と反射波の群速度が逆符号を持つことに注意して摂動法を行う。

#### 3.1.2 無限長媒質

式(3.2)に対して、 $x < 0$  の領域で KdV 方程式の場合と同様の変換(2.8)–(2.10)を行う。ただし従属変数については

$$y(x, t) = -\frac{1}{\sqrt{6}\beta} \{ u^I(\xi, \tau) + u^R(\xi, \tau) \} \quad (3.3)$$

という変換を行う。この変換により mKdV 方程式を得る。

$$\Psi_\tau^I + 6(\Psi^I)^2 \Psi_\xi^I + \Psi_{\xi\xi\xi}^I = 0 \quad (\tau < 0), \quad (3.4)$$

$$\Psi_\tau^R + 6(\Psi^R)^2 \Psi_\xi^R + \Psi_{\xi\xi\xi}^R = 0 \quad (\tau < 0), \quad (3.5)$$

$$\Psi^I = u_\xi^I, \quad (3.6)$$

$$\Psi^R = u_\xi^R. \quad (3.7)$$

また透過波  $x > 0$  の領域でも

$$y(x, t) = -\frac{1}{\sqrt{6}\beta} u^T(\xi, \tau) \quad (3.8)$$

を導入して透過波に対する mKdV 方程式を得る。

$$\Psi_\tau^T + 6(\Psi^T)^2 \Psi_\xi^T + \Psi_{\xi\xi\xi}^T = 0, \quad (\tau > 0) \quad (3.9)$$

$$\Psi^T = u_\xi^T. \quad (3.10)$$

境界条件(2.4), (2.5)から入射波、反射波、透過波間の  $x = 0$  における関係(2.21), (2.22), (2.23)を得る。KdV系同様、入射波  $\Psi^I$  が与えられれば、 $\Psi^T$  と  $\Psi^R$  の初期条件を得る事ができる。また mKdV 方程式の初期値問題を解くことにより、透過波  $\Psi^T(\xi, \tau)$  と反射波  $\Psi^R(\xi, \tau)$  を構成する事ができる。物体の運動は

$$y_0(t) = \frac{2\varepsilon K}{\sqrt{6}\beta M} \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^{t'} \Psi^R(\varepsilon c_0 t'', 0) dt'' dt', \quad (3.11)$$

で与えられる。

#### 3.1.3 半無限長媒質

KdV 方程式同様、境界条件(2.4), (2.5), 波動方程式(3.2)より、式(2.25)を得る。また(2.26)(2.27)も同様に得られる。そして物体の運動は

$$y_0(t) = \frac{\varepsilon K}{\sqrt{6}\beta M} \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^{t'} [\Psi^I(-\varepsilon c_0 t'', 0) + \Psi^R(\varepsilon c_0 t'', 0)] dt'' dt', \quad (3.12)$$

となる。



## 3.1.4 物体によるソリトン散乱

入射される波が mKdV 1-Soliton 解

$$\psi^I = A_\psi \operatorname{sech} A_\psi (\xi - A_\psi^2 \tau), \quad (3.13)$$

のときについて case A, B それぞれの物体の位置での波形は (2.21), (2.22), (2.27) より

$$\begin{aligned} \psi^T(\xi, 0) = & \mu e^{\mu \xi} \left[ B_v \left( \frac{\mu + A_\psi}{2A_\psi} + 1, -\frac{\mu + A_\psi}{2A_\psi} + 1 \right) \right. \\ & \left. + B_v \left( \frac{\mu - A_\psi}{2A_\psi} + 1, -\frac{\mu - A_\psi}{2A_\psi} + 1 \right) \right], \quad (\text{Case A}) \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} \psi^R(\bar{\xi}, 0) = & A_\psi \operatorname{sech} A_\psi \bar{\xi} - \mu e^{-\mu \bar{\xi}} \left[ B_v \left( \frac{\mu + A_\psi}{2A_\psi} + 1, -\frac{\mu + A_\psi}{2A_\psi} + 1 \right) \right. \\ & \left. + B_v \left( \frac{\mu - A_\psi}{2A_\psi} + 1, -\frac{\mu - A_\psi}{2A_\psi} + 1 \right) \right], \quad (\text{Case A}) \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} \psi^R(\bar{\xi}, 0) = & A_\psi \operatorname{sech} A_\psi \bar{\xi} - \mu e^{-\frac{\mu}{2}\bar{\xi}} \left[ B_v \left( \frac{\mu + 2A_\psi}{4A_\psi} + 1, -\frac{\mu + 2A_\psi}{4A_\psi} + 1 \right) \right. \\ & \left. + B_v \left( \frac{\mu - 2A_\psi}{4A_\psi} + 1, -\frac{\mu - 2A_\psi}{4A_\psi} + 1 \right) \right], \quad (\text{Case B}) \end{aligned} \quad (3.16)$$

となる.  $B_v(x, y)$  は不完全  $\beta$  関数 (2.34) である. また

$$v = \frac{e^{-A\xi}}{e^{-A\xi} + e^{A\xi}} = \frac{e^{A\xi}}{e^{A\xi} + e^{-A\xi}}, \quad (3.17)$$

である.

mKdV 方程式の場合も KdV 方程式同様, 固有値問題を解くことによりその後の発展を知ることができる. mKdV 方程式の場合

$$\phi_{1x} + i\lambda\phi_1 = \Psi(\xi, 0)\phi_2, \quad (3.18)$$

$$\phi_{2x} - i\lambda\phi_2 = -\Psi(\xi, 0)\phi_1, \quad (3.19)$$

の固有値を求めればよい. 式 (3.18), (3.19) は変換

$$\Phi_1 = \phi_1 + i\phi_2, \quad (3.20)$$

$$\Phi_2 = \phi_1 - i\phi_2, \quad (3.21)$$

を用いると複素ポテンシャルを持つ一対のシュレディンガー方程式になる.

$$\Phi_{1xx} + [\lambda^2 + (\Psi^2 + i\Psi_\xi)]\Phi_1 = 0, \quad (3.22)$$

$$\Phi_{2xx} + [\lambda^2 + (\Psi^2 - i\Psi_\xi)]\Phi_2 = 0. \quad (3.23)$$

$\lambda$  は KdV 方程式の場合と異なり純虚数, もしくは虚軸対称に現れる. 通常の sech 型のソリトン解の場合には  $\lambda$  は純虚数となる. また虚軸対称の際にはブリザー解となる.  $\lambda$  が純虚数のとき  $\lambda = i\kappa$  とおくとソリトンは

$$\Psi(\xi, \tau) = 2\kappa \operatorname{sech}(2\kappa\xi - 8\kappa^3\tau + \xi_0) \quad (3.24)$$

となる. つまり固有値の虚部の2倍の振幅を持つ. また  $\lambda$  が虚軸対称な場合  $\lambda = \pm\kappa_1 + i\kappa_2$  とおくと,

$$\Psi(\xi, \tau) = -4\kappa_2 \operatorname{sech} \Upsilon \cdot \left[ \frac{\cos \Theta - (\kappa_2/\kappa_1) \sin \Theta \tanh \Upsilon}{1 + (\kappa_2/\kappa_1)^2 \sin^2 \Theta \operatorname{sech}^2 \Upsilon} \right], \quad (3.25)$$

$$\Theta = 2\kappa_1\xi + \delta\tau + \varphi + \theta, \quad (3.26)$$

$$\Upsilon = 2\kappa_2\xi + \gamma\tau + \chi, \quad (3.27)$$

$$\theta = \tan^{-1}(\kappa_2/\kappa_1), \quad (3.28)$$

$$\delta = 8\kappa_1(\kappa_1^2 - 3\kappa_2^2), \quad (3.29)$$

$$\gamma = 8\kappa_2(3\kappa_1^2 - \kappa_2^2), \quad (3.30)$$

という形の解になる. この解の振幅は  $4\kappa_2$  であり固有値の虚部の4倍である.

KdV 方程式の場合と同様ポテンシャル (3.14) - (3.16) について, 行列の固有値問題を用いスペクトルを計算した.

Case A の場合透過波では物体の質量に関係なく虚軸上に1つの固有値が存在した. つまり透過波では sech 型のソリトンが1つ存在する. その値から計算したソリトンの振幅が図 3.3 の実線である. 物体の質量が軽くなるにつれ透過ソリトンの振幅は大きくなる. また反射波の理論計算から求めたソリトン振幅の結果を図 3.4 の実線に示す. 反射波では物体がある質量よりも重い領域 ( $\mu < 1.1$ ) では2つの固有値が虚軸上に存在する. これは2つの sech 型ソリトンが存在することを示す. しかしこの2つの sech 型ソリトンの固有値は物体が一定質量より軽くなると虚軸対称の固有値に変化した. この理論計算の結果から  $\mu > 1.1$  ではブリザーが存在することが考えられる.

Case B の場合も case A の場合と同様に理論計算から生成されるソリトンの振幅を求めた. 結果を図 3.7 の実線に示す. Case B の場合には物体が重い場合 ( $\mu < 0.9$ ) 3つの固有値が虚軸上に存在した. このことから物体が重い場合にはブリザーは存在せず3つの sech 型ソリトンが存在すると考えられる. また物体が軽い場合 ( $\mu > 0.9$ ) には3つの固有値のうち



2つの固有値が虚軸対称に現れた。このことからこの領域では1つの sech 型ソリトンと1つのブリザーが存在すると考えられる。

### 3.2 数値実験

非線形格子に対し数値実験を行った。入射波は mKdV 方程式の 1-Soliton 解を用いた。mKdV 方程式の 1-Soliton 解の  $y_x$  に対する項は次のように与えられる。

$$y_x(x, t) = \pm A_B \operatorname{sech} \sqrt{6\beta} A_B \left[ \left( 1 - \frac{\beta^2 A_B^2}{4} \right) x - c_0 t - x_0 \right]. \quad (3.31)$$

数値実験の初期条件は

$$y(x, t) = \pm \frac{2}{\sqrt{6\beta}} \tan^{-1} \exp A_\psi \varepsilon \left[ \left( 1 - \frac{A_\psi^2 \varepsilon^2}{24} \right) x - c_0 t \right], \quad (3.32)$$

$$y_t(x, t) = \pm \frac{A_\psi \varepsilon c_0}{\sqrt{6\beta}} \operatorname{sech} A_\psi \varepsilon \left[ \left( 1 - \frac{A_\psi^2 \varepsilon^2}{24} \right) x - c_0 t \right]. \quad (3.33)$$

また微小パラメータ  $\varepsilon$  は

$$\varepsilon = \sqrt{6\beta} \frac{A_B}{A_\psi}, \quad (3.34)$$

と与えられる。格子の粒子の運動として置き換えると、

$$y_j(t) = \pm \frac{2}{\sqrt{6\beta}} \tan^{-1} \exp A_\psi \varepsilon \left[ \left( 1 - \frac{A_\psi^2 \varepsilon^2}{24} \right) j - c_0 t \right], \quad (3.35)$$

$$\frac{dy_j(t)}{dt} = \pm \frac{A_\psi \varepsilon c_0}{\sqrt{6\beta}} \operatorname{sech} A_\psi \varepsilon \left[ \left( 1 - \frac{A_\psi^2 \varepsilon^2}{24} \right) j - c_0 t \right]. \quad (3.36)$$

KdV 系と同様に時間発展は  $\varepsilon^{-3}$  のオーダーに比例するため、シミュレーションには非常に多くの時間がかかる。 $\varepsilon = 0.1$ ,  $K = 1.0$ ,  $A_B = 1.0$ ,  $A_\psi = 1.0$ ,  $t = -2000$ ,  $m = 1$  にセットし  $M$  を変化させた。数値スキームとしては4次のルンゲクッタ法を用い時間刻み幅  $\Delta t = 0.2$  とした。

#### 3.2.1 無限長媒質

初期条件 (3.35), (3.36) に対し、運動方程式 (2.2), (3.1) を解き、ソリトン散乱中の物体の運動を  $y_0(t)$  の時間発展で検出した結果を図 3.1 に示す。菱形が数値シミュレーションの値、実線が理論値である。数値シミュレーションと理論値が非常によく一致していることがわかる。

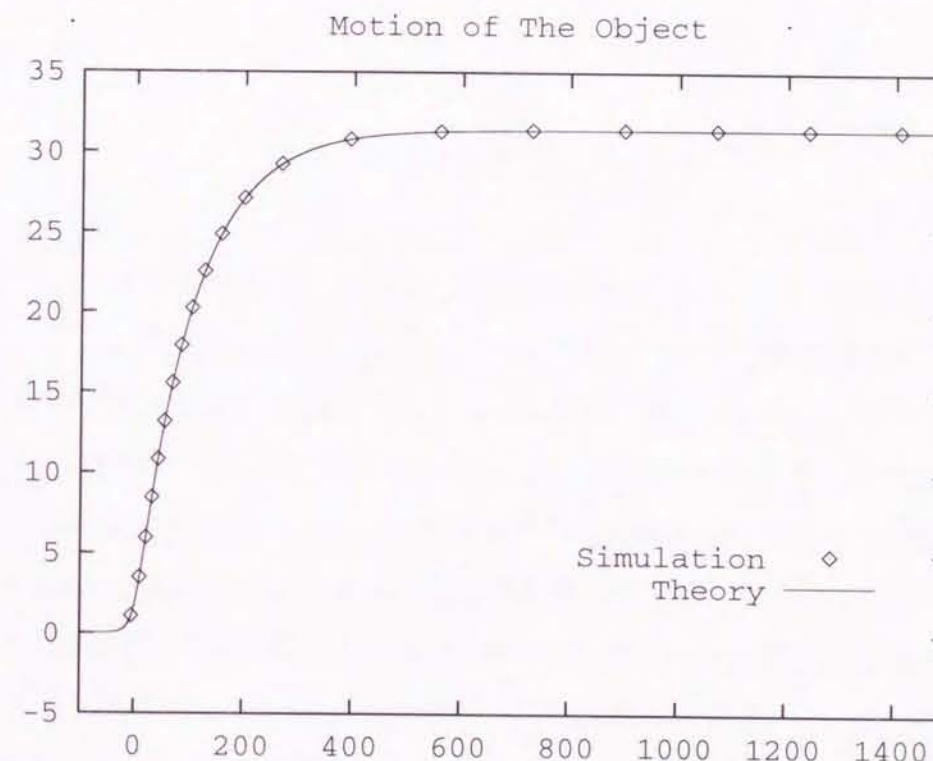


図 3.1: 入射波が mKdV 1 ソリトンの場合の物体の運動 (Case A) 菱形はコンピュータシミュレーションにより計算された物体  $y_0$  の値、実線は理論値であり式 (3.11) により計算された値である。



KdV 方程式の場合同様、散乱後十分時間がたってからソリトンの振幅を測定する。散乱後の波の概形を図 3.2 に示す。透過波の領域 (図 3.3) では理論によると 1 つのソリトンが存在する。

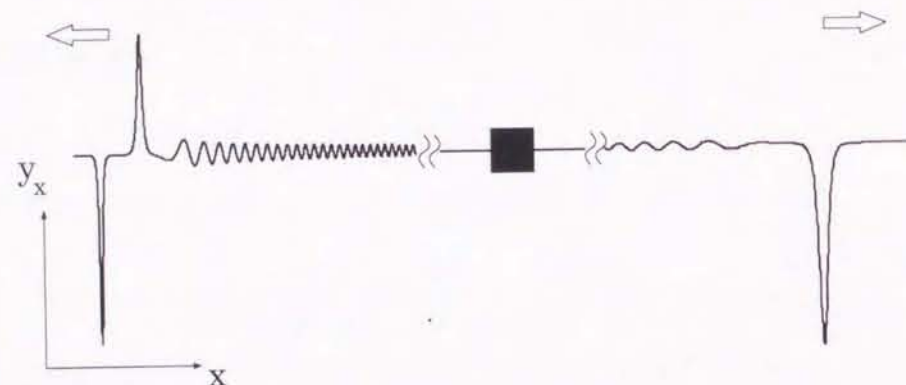


図 3.2: 散乱後の波の概形

存在する。これはシミュレーションの結果と非常によく一致している。mKdV 方程式は普通のソリトン解以外にブリザー解をもっている。反射波の場合 (図 3.4) には、理論計算によるとブリザー型 Soliton が存在する領域 (グラフ右側) と、通常の sech 型 Soliton が 2 つ存在する領域 (グラフ左側) の境界が  $\mu = 1.1$  付近に存在する。固有値計算の結果を見る限り、 $\mu < 1.1$  においては、固有値の実部はほぼ 0 であり、2 つの固有値の虚部の値はそれぞれ異なっている。しかし、 $\mu > 1.1$  では固有値は複素平面上においてほぼ虚軸対称である。ブリザー型 Soliton が現れる場合、固有値は虚軸対称に 2 つ現れることがわかっており、これはシミュレーションの結果と一致している。実際には固有値を求める際の誤差があるためそれぞれの固有値の実部、虚部は完全には一致しないが図 3.4 ではその平均値をとってプロットしてある。理論とシミュレーションではソリトンの振幅、生成されるソリトンの数ともに理論とシミュレーションの値が非常によく一致する。

### 3.2.2 半無限長媒質

散乱後の波の概形を図 3.6 に示す。Case B では反射波のみである。Case B では理論計算により 3 つの sech 型の Soliton が存在する領域と、ブリザーと 1 つの sech 型 Soliton が存在する領域とに分かれる。この境界は  $\mu = 0.09$  付近に存在する。これも理論値とシミュレーションで非常によく一致している。

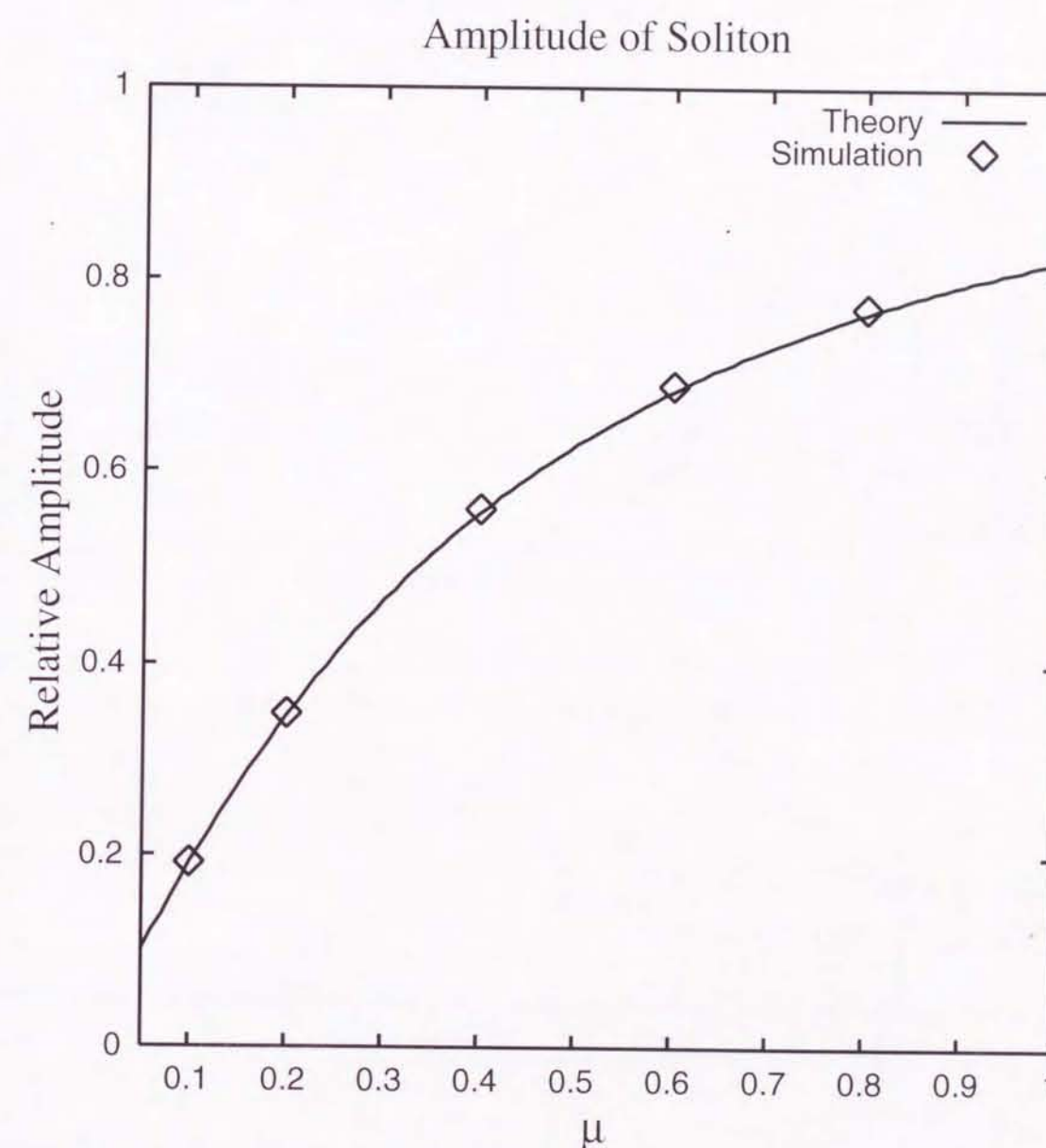


図 3.3: Case A での透過ソリトンの振幅。検出された透過波中のソリトン振幅、ここで入射ソリトンの振幅は 1 である。



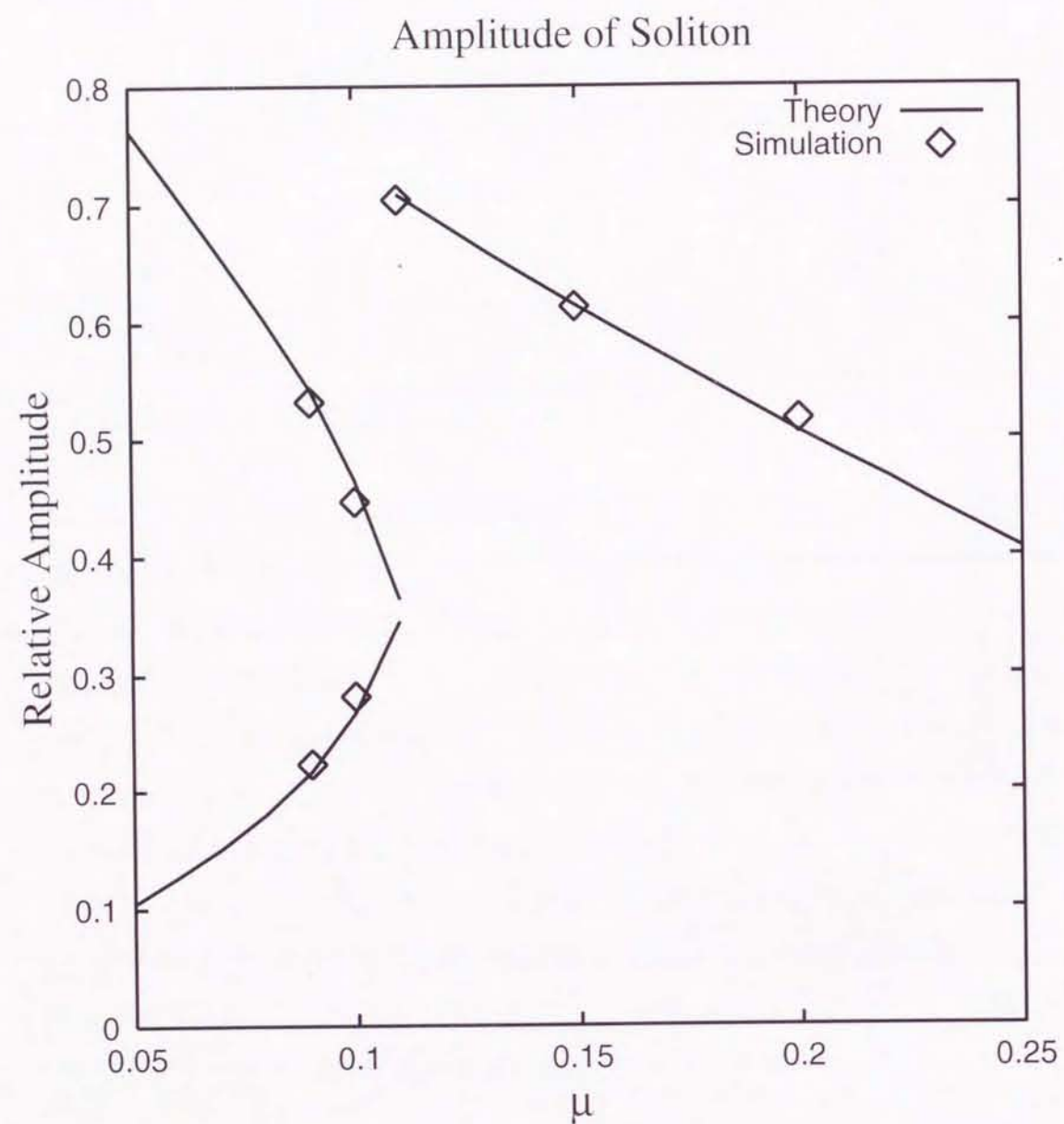


図 3.4: Case A での反射ソリトンの振幅. 検出された反射波中のソリトン振幅, ここで入射ソリトンの振幅は1である.  $\mu = 1.1$  で実線が不連続になっているがここがブリザー型 Soliton(グラフ右側)が存在する領域と sech 型の Soliton(グラフ左側)が存在する領域の境界である.

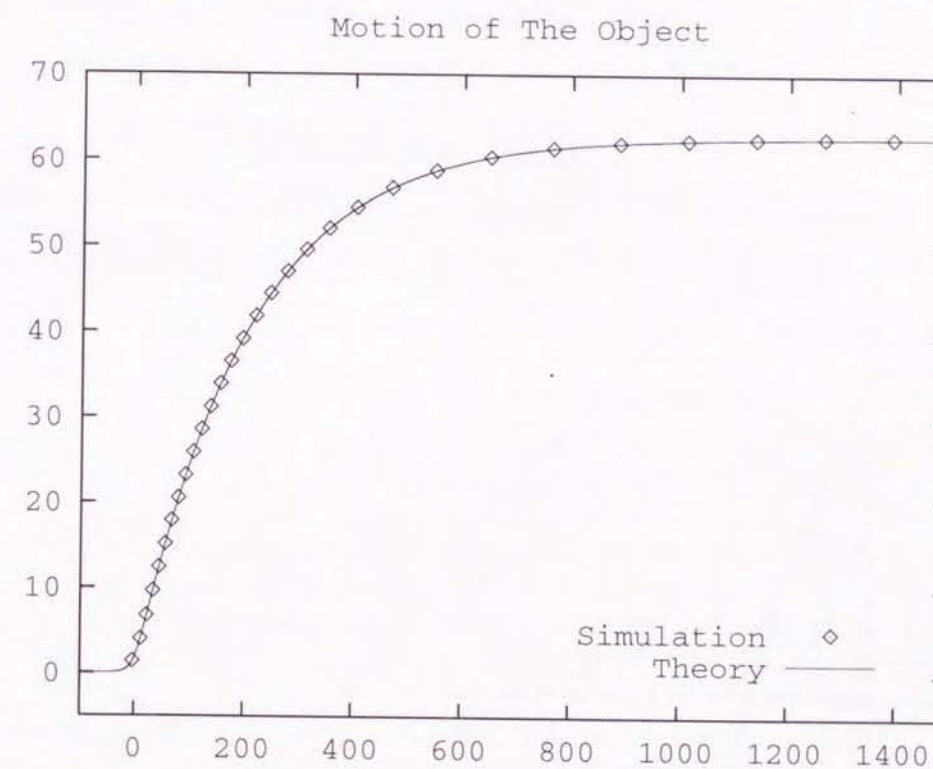


図 3.5: 入射波が mKdV 1-Soliton の場合の物体の運動 (Case B) 菱形はコンピュータシミュレーションにより計算された物体  $y_0$  の値, 実線は理論値で式 (3.12) により計算された値である.

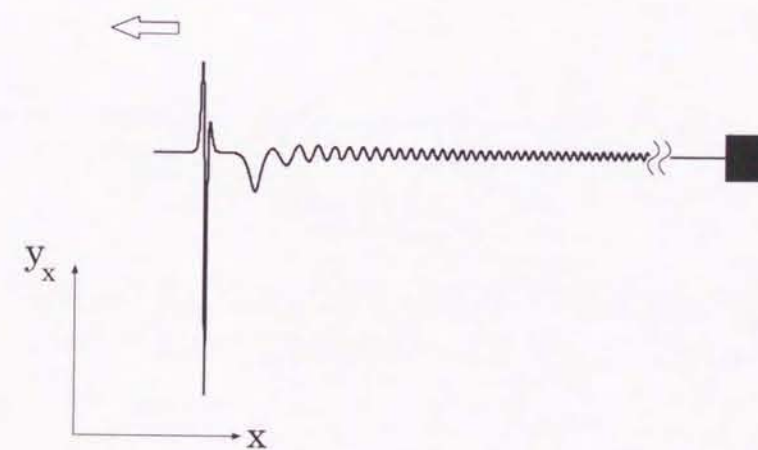


図 3.6: 散乱後の波の概形



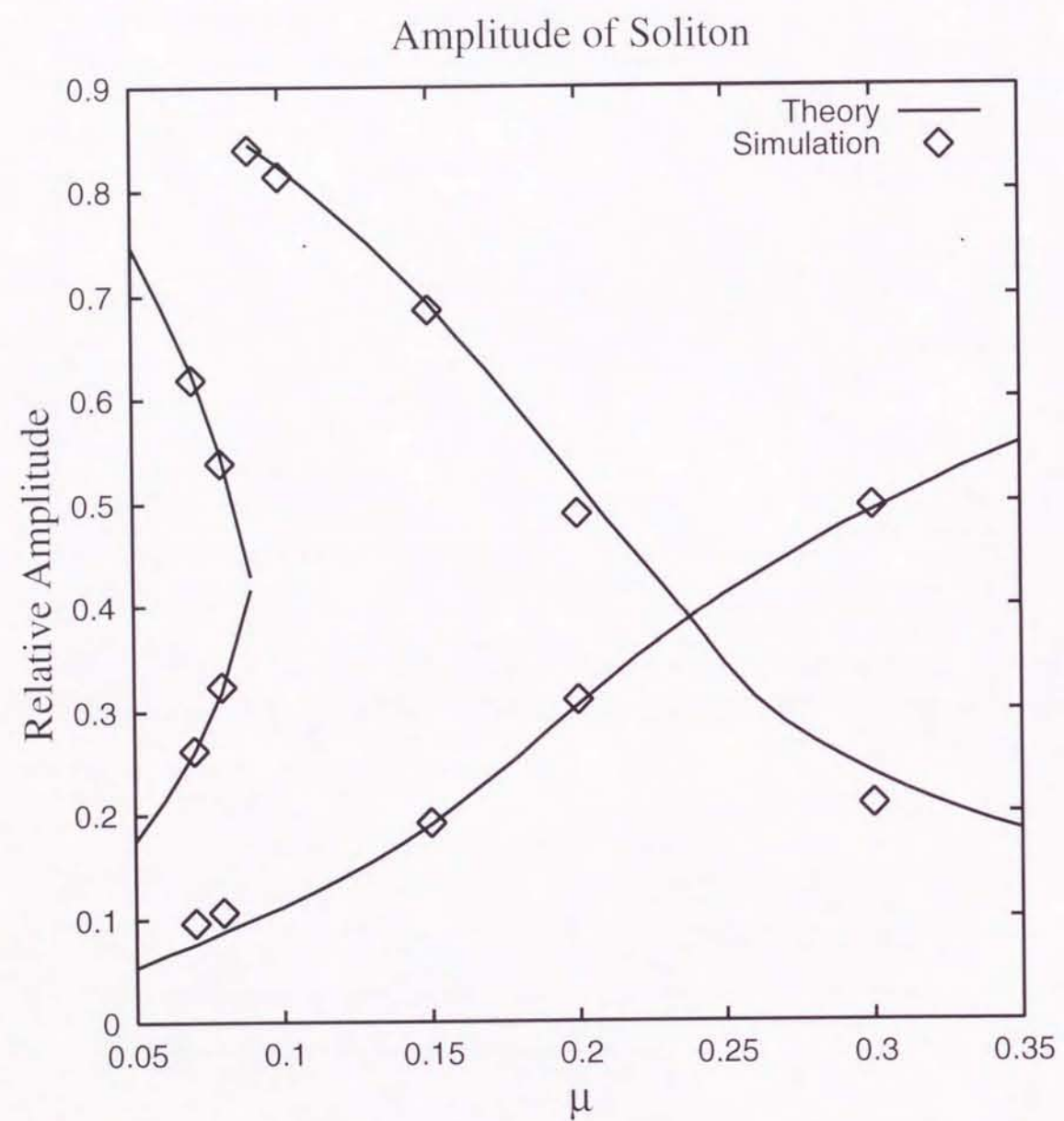


図 3.7: Case B での反射ソリトンの振幅. ここで入射ソリトンの振幅は1である. プリザー型 Soliton は case A 同様  $\mu = 0.09$  より小さい領域では, 存在できず 3つの sech 型のソリトンが存在する.

### 3.3 結果と今後の課題

3次の非線形媒質における mKdV 系でも前章同様, 理論とシミュレーションの結果が一致を得ることができた. ただ KdV 系の場合と異なり, ある質量以下になると 1-Soliton 解からブリザー解へ移行するなど KdV 系ではみられなかった現象がみられた. mKdV 系で不均一性の散乱によりこのような現象が発見されたのは我々が知る限りでは初めてである. これらの現象が複数の解をもつ他の不均一系で観測されるかどうか, 非常に興味深い.



## 第4章 結論

本研究では物体と媒質の非線形波動の相互作用、特に物体によるソリトンの散乱現象に焦点をあて、理論的解析を行った。非線形性として、2次、3次の場合を考えそれぞれについて、無限長および半無限長の系をとりあげた。第一に、逆散乱法に基づくスペクトル問題を通じて、散乱波から生じるソリトン決定する解析法を提出した。2次の非線形系、3次の非線形系はそれぞれ、KdV および mKdV 方程式の初期値問題に還元できることを明らかにした。さらに、非線形格子モデルを直接シミュレーションすることによって、ソリトンの散乱現象の数値実験を行った。結果、両者の間の非常に良い一致を見ることができた。KdV 系に関しては著者らによる論文 [21] で報告されている。以上の手続きを図示すると図 4.1 のようになる。

今回特に著しい結果として、mKdV 系で物体の質量を変化させることにより 2つの sech 型 Soliton が、ブリザー型 Soliton へ移行することがある。これは、ある意味で「相転移的」な振る舞いとみなされるべきで、「臨界点」におけるダイナミクスはどのように振る舞うのか？今後の問題として非常に興味深いところである。

本研究はおもに非線形格子系をモデルとして採用したが、手法自体は一般の 1次元非線形媒質にも適用できる。従って、我々の結果は単にソリトン物理学のフロントとして位置付けられるだけでなく、多くの工学的応用が期待されると考えられる。今後の課題としては、イオンプラズマ波と重い荷電粒子の相互作用、浅水波における浮遊物体とソリトンの相互作用などが考えられる。

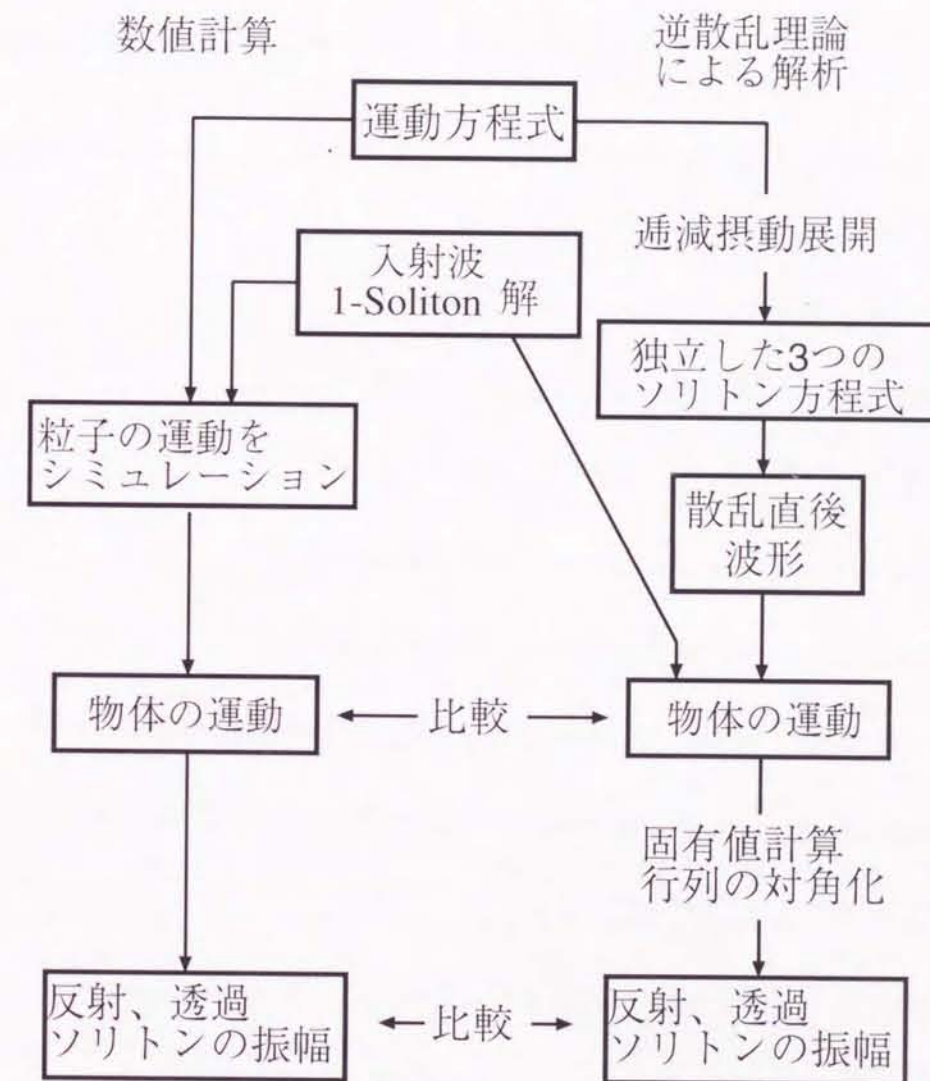


図 4.1: 研究の流れ



## 参考文献

- [1] N. J. Zabusky and M. D. Kruskal: Phys. Rev. Lett. **15** (1965) 240.
- [2] C. S. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal and R. M. Miura: Phys. Rev. Lett. **19** (1967) 1095.
- [3] M. Wadati : J. Phys. Soc. Jpn. **32** (1972) 1403.
- [4] M. Wadati : J. Phys. Soc. Jpn. **32** (1972) 1681.
- [5] M. Wadati : J. Phys. Soc. Jpn. **34** (1973) 1289.
- [6] M. Wadati : J. Phys. Soc. Jpn. **36** (1974) 1498.
- [7] T. Taniuti *et al* : Suppl. Prog. Theor. Phys. **55** (1974).
- [8] Ablowitz, Kaup, Newell and Segur: Stud. Appl. Math. **53** (1974a) 249.
- [9] Ablowitz, Kaup, Newell and Segur: J. Math. Phys. **15** (1974b) 1852.
- [10] A. M. Kosevich and A. S. Kovalev: Sov. J. Low. Temp. Phys. **1** (1975) 742.
- [11] N. Sugimoto, N. Nakajima and T. Kakutani: J. Phys. Soc. Jpn. **56** (1987) 1717.
- [12] N. Sugimoto, K. Hosokawa and T. Kakutani: J. Phys. Soc. Jpn. **56** (1987) 2744.
- [13] Y. S. Kivshar and B. A. Malomed: Rev. Mod. Phys. **61** (1989) 763.
- [14] T. Iizuka and M. Wadati: J. Phys. Soc. Jpn. **61** (1992) 3077.
- [15] T. Iizuka and M. Wadati: J. Phys. Soc. Jpn. **61** (1992) 4344.
- [16] T. Iizuka and M. Wadati: J. Phys. Soc. Jpn. **62** (1993) 1159.

- [17] T. Iizuka and M. Wadati: J. Phys. Soc. Jpn. **62** (1993) 1932.
- [18] X. D. Cao and B. A. Malomed: Phys. Lett. A **206** (1995) 177.
- [19] T. Iizuka, H. Amie, T. Hasegawa and C. Matsuoka: Phys. Lett. A **220** (1996) 97.
- [20] Y. S. Kivshar, F. Zhang and A. S. Kovalev: Phys. Rev. B **55** (1997) 1.
- [21] D. Uehara, T. Iizuka, T. Hasegawa and C. Matsuoka : J. Phys. Soc. Jpn. **67** (1998) 3769.



## 謝辞

本研究は平成9年4月から平成11年12月にわたって愛媛大学理学部物理学教室応用物理学研究室において行われたものである。

その間、熱心に御指導頂いた長谷川高陽教授、飯塚剛博士、松岡千博博士に感謝の意を表します。また研究室院生の城戸透氏、陳衛民氏、石田聡氏、今川義康氏、二宮宏之氏、別宮寿氏、伴大士氏に感謝します。学部生の大久保博史氏、中村進氏、農宗哲也氏、竹本平氏、渡部健太郎氏、前田直子氏にも感謝します。

とくに飯塚博士には査読や、研究に関する相談や意見交換など、大変お世話になりました。また長谷川教授には限られた予算のなかから、研究のシミュレーションで用いる計算機の購入予算を割いて頂きました。重ねて感謝の意を表します。



