（第６号様式）

学位論文審査の結果の要旨

氏　　名	YANEZ VICTOR HUGO
審査委員	主査　Shakhmatov Dmitri 副査　土屋　卓也 副査　山内　貴光 副査　尾國　新一

論　　文　　名　　Properties modelled on minimal almost periodicity, and small subgroup generating properties

審査結果の要旨

本論文は，位相群論において主要な研究対象の一つである minimally almost periodic 性について論じたもので，６章からなる。

ハウスドルフ位相群 G が minimally almost periodic であるとは，G から任意のコンパクトハウスドルフ位相群への連続準同型写像が自明写像のみであることをいう。この概念は，1940 年に von Neumann，Wigner によって導入され，調和解析，位相数学，代数学等において重要な役割を果たしている。以下，minimally almost periodic ハウスドルフ位相群を MinAP 群とよぶ。

ハウスドルフ位相群 G が extremely amenable であるとは，G の任意のコンパクト空間への連続群作用が不動点をもつことをいう。extremely amenable 群は MinAP 群であるが，その逆は一般に成り立たない。しかし，MinAP 可換群が extremely amenable であるか否かは，Pestov による未解決問題である。また，ハウスドルフ MinAP 群位相をもつ整数群が extremely amenable であるか否かという問題は，Glasner の問題としてよく知られている。Glasner の問題の反例の存在は，整数論の問題へ応用をもつ。

ハウスドルフ位相群 G が small subgroup generating property（以下，SSGP と表す）をもつとは，G の単位元の任意の開近傍 U に対し，U に含まれる巡回群全体の族の和集合が G の稠密部分群を生成することをいう。さらに，その和集合が G を生成するとき，G は DW 性をもつという。SSGP（DW 性）をもつ位相群を SSGP 群（DW 群）とよぶ。DW 群は SSGP 群であり，SSGP 群は MinAP 群である。逆は，可換位相群においても成立しない。

MinAP 可換群の代数的構造は 2014 年に Dikranjan，Shakhmatov によって明確になった。それに従い，2015 に Comfort，Gould は SSGP 可換群の代数的構造の解明を問題として提起した。2016 年に Dikranjan，Shakhmatov は特殊な可換群を除いて，Comfort-Gould の問題を解決した。

本論文は，残された特殊な可換群に対して Comfort-Gould の問題を肯定的に解決すると共に，MinAP 群に関連するいくつかの新しい位相群のクラスを導入することによって，DW 群，SSGP 群，MinAP 群の互い関係について興味深い成果を得ている。

以下，本論文の内容を述べると，第 1 章では本論文に関する基本的事実が述べられている。

第2章では，与えられた位相群のクラスCに対し，MinAP(C)とよばれる性質を導入している。ハウスドルフ位相群GがMinAP(C)群であるとは，GからCに含まれる任意の位相群への連続準同型写像が自明写像のみであることをいう。Cがコンパクト群全体のなすクラスであるときのMinAP(C)性(すなわち，MinAP(コンパクト)性)はMinAP性と一致しており，この意味でMinAP(C)性はMinAP性の一般化である。この章では，Lie群，NSS群，局所コンパクト群の3つの位相群のクラスCに対してMinAP(C)性を詳しく調べている。具体的には，一般にMinAP(Lie)群，MinAP(NSS)群，MinAP(局所コンパクト)群，MinAP群，SSGP群の5つクラスは互いに異なることを証明し，可換位相群においてはMinAP(Lie)性とMinAP(局所コンパクト)性がMinAP性と一致すること示している。また，可換位相群においてMinAP(NSS)性はMinAP性より真に強いことを示し，任意のMinAP(NSS)可換群は，ある順序数αに対し，Dikranjan, Shakhmatovによって導入されたSSGP(α)群であることを証明している。

第3章では，MinAP性を第2章と別の観点から一般化している。位相群の性質Pに対し，ハウスドルフ位相群GがMinAP(modulo P)群であるとは，Gから任意のコンパクトハウスドルフ位相群への任意の連続準同型写像fによるGの像f(G)が性質Pをもつことをいう。Pが「自明群である」という性質であるとき，MinAP(modulo P)群はMinAP群と一致する。この章では，Bohrコンパクト化を用いてMinAP(modulo P)群の特徴付けを得た後，5つの基本的な性質P(有限群，bounded群，ねじれ群，コンパクト群，連結群)について論じている。また，MinAP(mod連結)な可換群の代数的構造がMinAP可換群と一致することを示し，その以外の4つの性質Pについては，任意の可換群がMinAP(modulo P)群位相をもつことを得ている。

第4章では，正のdivisible rankをもつ可換群上にSSGP群位相が存在するための必要十分条件を得ている。この結果とDikranjan, Shakhmatovの定理より，任意の可換群に対するSSGP群位相が存在するための特徴付けが得られる。これによってComfort-Gouldの問題を解決している。

第5章では，有限生成でない自由群上にDW性をもつ群位相を構成している。この定理は，DW性より弱いSSGP性とMinAP性についても新しい結果である。

第6章では，可換群上のDW性をもつ群位相の存在を調べている。特に，有限の0-rankをもつ可換群にDW性をもつ群位相を導入できるための必要条件を得ている。この章の結果により，DW性はSSGPの性よりかなり強いことが明らかにされている。例えば，第4章の結果より有理数群上のSSGP群位相は存在するが，第6章の結果より有理数群上のDW群位相は存在しないことが得られる。

なお，本論文で得られている結果だけではなく，その結果を得るために導入した手法も高く評価される。例えば，第4章と第5章で用いられている群位相の構成方法は独創的であり，位相群の研究の発展につながる高いポテンシャルをもつものと言える。

以上，本論文は，その結果と手法を通して位相群の研究の今後の発展に大いに寄与したものと考えられる。実際，本論文の基となった4編の論文は査読付き国際学術誌に掲載または受理されており，国際的に高い評価を得ている。なお，2月9日にMicrosoft Teamsで開催された本論文の公聴会において口頭発表と質疑応答が行われ，本論文の主要な結果が明解に解説された。

よって，本論文は博士（理学）の学位を受けるに十分な価値があるものと認める。