（第３号様式）(Form No. 3)

学 位 論 文 要 旨
Dissertation Summary

氏　　名 (Name) 石坂　宏樹

論　文　名： Anisotropic interpolation error analysis using a new geometric parameter
(Dissertation Title)　and its applications

（序論） 計算機を用いて偏微分方程式を数値的に解くことは現代文明を支える基幹技術である．有限要素法は，任意の形状領域（現象が起こる領域）に適用でき，汎用的なプログラミングが容易に作ることができるため，有力な数値解法の一つになっている．有限要素法においては，問題領域をメッシュと呼ばれる小領域（以下，要素と呼ぶ）に分割する必要がある．そのメッシュに関しては，「要素はあまり潰れてはならない」という幾何学的条件が課せられることが多い．そのようなメッシュは「等方性メッシュ」と呼ばれる．しかし，さまざまな理由により潰れた要素を含むメッシュが使われることがある．そのようなメッシュは「異方性メッシュ」と呼ばれる．例えば，偏微分方程式の解が領域のある部分で異方性の振る舞いをする問題では，異方性メッシュの使用が効果的であることが知られている．しかしながら，異方性メッシュを用いて高精度で効率的な有限要素スキームを構築することは容易ではなかった．

（これまでの理論の概説） 平面上の三角形メッシュ上の線形補間に関する幾何条件は，1957年にシンゲにより導入された．これは，「メッシュ内の三角形の最大角がある定数より小さい」というもので，最大角条件と言われている．最大角条件は，1976年はバブシュカ等によりさまざまな方向に拡張された．最大角条件の四面体要素への拡張は，1992年にクリゼックによってなされた．1991年にクリゼックは，三角形最大角条件と同等な外接円半径条件を示した．しかし，四面体の最大角条件に同値な幾何学的条件は，申請者らの研究まで知られていなかった．

一方1968年にクラマールにより，「メッシュ内の三角形の最小角がある定数より大きい」という最小角条件が提出された．最小角条件は，三角形が潰れないことを要請しているので，異方性メッシュには適用できない．この後，最小角条件と同等なshape-regularity条件が登場したが，これは多くの良い性質を持ち，また数学的な取り扱いが容易なので，現代的な有限要素法解析において主要な幾何条件になっている．つまり，現代的な有限要素解析の多くの論文や文献の手法では，異方性メッシュ上の誤差解析は扱えない．

1976年のバブシュカ・アジズの論文では，最大角条件が最適オーダー補間誤差評価を与える十分条件であり，(ある意味において)必要条件であることが述べられているが，さらに幾何条件を加えることによりよい補間誤差評価を得ることができる．この方向での本格的な異方性補間誤差評価は，1992年アペル等によって始まった．アペルは1999年の論文で，最大角条件と座標条件を課すことにより一般的な補間誤差評価，Scott-Zhangタイプ補間誤差評価，及び応用例を与えている．

（この学位論文の主要結果）本学位論文では，異方性メッシュ上の有限要素法の補間誤差解析の統一的な手法を与え，それを有限要素誤差評価に応用する．そのために，メッシュの特性を表す新しい幾何パラメータの導入し，さらに最適な補間誤差を与える異方性メッシュの新しい幾何条件を与える．本学位論文で与えられた幾何パラメータと補間誤差評価により，異方性メッシュ上の有限要素スキームの正当性を，単純にかつ繊細に証明することが可能になった．また，新しい幾何条件は容易にプログラミング可能であるため，特に事後誤差評価とアダプティブ有限要素法に対して有用であることが期待できる．

さらに申請者らは，前述した新しい幾何パラメーターを使った条件を導出し，これが四面体の最大角条件と同値であることを示した．この条件は，要素の体積と辺の長さを用いて計算できるので，非常にシンプルである．よって，最大角条件にかわる幾何条件になり得るかもしれない．

アペルによる異方性補間誤差評価では，最大角条件と座標条件を組み合わせて使っているが，そのため理論が複雑になりがちである．そこで本学位論文では，先ほどの新しい幾何条件に定量的に考えることができる別の幾何条件を加え，新しい補間誤差評価を与えた．解析の心臓部はスケーリング議論であり，それを用いて，やや強い仮定の下，精密な誤差評価を与えた．これにより，異方性メッシュを扱うことができるシンプルで最適な補間誤差評価式が得られるようになった．また，その仮定を外すことによって等方性メッシュでの最適な補間誤差評価式も得ることが可能である．

本学位論文で得られた補間誤差評価を，ポアソン方程式のクルーゼ・ラヴィアール有限要素近似，ポアソン方程式の混合有限要素近似，ストークス方程式のwell-balancedクルーゼ・ラヴィアール有限要素近似に応用した．

さらにいくつかの数値例を用いて，評価の有効性，正当性を確認した．