

(第6号様式)

学位論文審査の結果の要旨

| | |
|------|-----------------|
| 氏名 | 石坂 宏樹 |
| 審査委員 | 主査 土屋 卓也 |
| | 副査 松浦 真也 |
| | 副査 シャクマトフ・ディミトリ |
| | 副査 石川 保志 |

論文名 Anisotropic interpolation error analysis using a new geometric parameter and its applications

審査結果の要旨

石坂宏樹氏は、2次元単体（三角形）及び3次元単体（四面体）上の関数補間に関して新しい知見を得た。以下それを説明する。

現代文明を支える数値シミュレーションの主要な方法の一つである**有限要素法**（finite element methods）は、関数解析学を基礎とする現代的な微分方程式論と相性が良く、得られた数値解の誤差を数学的に厳密に評価できる（場合が多い）という長所を持つ。有限要素法によるシミュレーションの第1段階では、問題領域（シミュレーションを行う領域）を“**要素**”（element）と呼ばれる図形用いて隙間なく分割するが、その要素としては単体が使われることが多い。そのような要素の集合を領域上の**メッシュ**という。有限要素法の誤差解析（得られた数値解の誤差を見積もる理論）（error analysis）は、その要素（単体）上の関数補間の誤差解析の理論の上に構築されている。単体上の関数補間の理論では、通常単体の**形状正則性条件**（shape regularity condition）と呼ばれる条件を課するのが普通である。形状正則性条件は、単体が“あまり潰れていない”ことを要求する。三角形の場合、三角形が潰れていく最小内角が0に近づいていくので、形状正則性条件は**最小角条件**（最小角がある定数以上）と同値である。つまり、現在のところ有限要素法による数値シミュレーションの正当性の数学的保証は、使用するメッシュの幾何学的形状に関する仮定の上に成り立っている。

しかし、解が境界層を持つ場合、つまり解がある方向のみ急減に変化するような場合、特定の方向に潰れた要素を使用した方が、数値計算の効率が上がる場合がある。特に、事後誤差評価とそれを用いた適合最適格子法（adaptive mesh refinement）では、境界層に沿ってメッシュ（要素の集合）を細分するため、潰れた要素が多数生じる。そのようなメッシュを**異方性メッシュ**（anisotropic mesh）という。このような場合はメッシュ内の要素の形状正則性条件が成り立たないので、有限要素法の誤差解析の現在の理論では、数値解の正当性が数学的には保証されないということになってしまう。この状況を改善するための、誤差解析の理論を**単体の形状正則性条件**を仮定せずに再構築することが望まれていた。

石坂氏は、本論文を通して、この状況を改善するいくつかの事実を証明した。以下、本論文の研究成果を箇条書きにまとめる。

- (1) 通常、解の精度は使用するメッシュ内の単体の大きさ（辺の最大長）を用いて表す（有限要素法では、単体の最大辺長を h 表すのが習慣である）。また、三角形要素の場合は、三角形の外接半径（外接円の半径、これを R とする）がもう一つ重要なパラメータであることが知られていた。「 R/h がある一定の定数より小さい」ことと、メッシュ内の内角の最大角がある定数より小さいことが同値であるので、これを**最大角条件**（maximum angle condition）という。しかし、四面体の場合、三角形の外接半径に対応するものが何かはわかっていなかった（四面体の外接球の半径ではダメだということは、反例を通して簡単に示せる）。石坂氏は、四面体に対して今まで知られていなかった新たな幾何学的量を発見した（それも R と書くことにしよう）。それは、四面体の6個の辺の長さから簡単に定義できるもので、計算も容易である。さらに、「 R/h がある一定の定数より小さい」ことと、四面体の最大角条件（四面体の全ての面の内角と面同士の間の角がある定数以下である）が同値であることも示した。
- (2) 石坂氏は、新たに発見した量 R を用いて三角形および四面体の上の関数の Lagrange 補間の新たな評価式を導いた。これは、Krizek や Duran らの先行研究を大きく発展させるものであり、四面体を使ったメッシュ上の有限要素法の誤差解析の理論に新たなページを書き加えた。
- (3) さらに、2次元および3次元の Crouzeix-Raviart 補間および Raviart-Thomas 補間についても同様な誤差評価を与え、Crouzeix-Raviart および Raviart-Thomas 有限要素法の新たな誤差解析の理論を与えた。
- (4) 異方性メッシュを使う場合、メッシュ内の単体のアスペクト比（縦横比）を使うと、計算誤差をより精密に評価できる場合がしばしばある。石坂氏は、この新たに発見した幾何学的量を使い、この方向で非常に精密な誤差評価を与えた。

提出された学位論文の研究成果に関連する内容は、国際学術雑誌に3編公表されていて、さらにもう1編投稿中、1編投稿準備中である。

本学位論文の公聴会は、2022年2月10日に開催し、約45分間の講演と20分間の（一部英語での）質疑応答が行われた。引き続き、学位論文審査委員会を開き、本論文の内容を厳正に審議した結果、審査委員全員一致で、理学（博士）の学位を授与するのに値するものと判定した。