愛媛大学教育学部紀要　第52巻　第１号　139～152　2005

数学教育における記号論的連鎖に関する考察
― Wittmannの教授単元の分析を通して ―

二　宮　裕　之（数学教育講座）　岩　崎　秀　樹（広島大学）岡　崎　正　和（上越教育大学）
山　口　武　志（福岡教育大学）　馬　場　卓　也（広島大学）　植　田　敦　三（広島大学）

（平成１７年６月３日受理）

A Study on Semiotic Chaining in Mathematics Education: Through the Analysis of Wittmann‘s “Teaching Unit”

Hiroyuki NINOMIYA, Hideki IWASAKI, Masakazu OKAZAKI
Takeshi YAMAGUCHI, Takuya BABA, Atsumi UEDA

１．はじめに

本稿は、Presmeg（1998）で提唱された「記号論的連鎖」の枠組みを「数学化」と「比喩」の観点から精緻化するとともに、Witmann（1984）の提起する「教授単元」へと援用することで、教授単元における「数学化」に関する示唆を得ようとするものである。最初に、パースの記号論（semiotics）における３項モデルをもとに、「対象物」「記号」「解釈項」の３つの要素から成り立つ「記号論的連鎖の入れ子型モデル」を同定する。続いて、Freudenthalの示した「数学化」に関するTreffers（1987）の見解を取り上げ、「水平的な数学化（Horizontal Mathematization）」と「垂直的な数学化（Vertical Mathematization）」を同定する。更にこれら２通りの「数学化」の本性へと迫ることで「数学化」の過程に内在する『比喩』の存在に言及し、水平的な／垂直的な数学化のそれぞれがなされるメカニズムと、「比喩」「具象化」により記号論的連鎖が促進されるモデルにおける『比喩』の役割について明らかにする。そして具体的な事例の検討としてWitmannの教授単元を取り上げ、その概要について言及した後、教授単元の事例に対する記号論的連鎖の枠組みを用いた分析を試みる。

２．記号論的連鎖の２項モデルと３項モデル

Presmeg（1998）で提唱された記号論的連鎖は、Presmeg（2001）においてその理論的背景を、パース（Charles S. Peirce）が提唱した記号論（Semiotics）における記号論モデルから検討を始めている。パースのモデルでは、以下にあげる３つの基本的構成要素をあげており、「３項モデル」として捉えられる。（Presmeg,2001,p.２）

①『対象物(object)』：他の何ものからも独立した対象物の存在

②『記号(representamen)』：対象物とそれを指示する記号との間の関係

③『解釈項(interpretant)』：対象物、記号、及び解釈項と呼ばれる第三の要素との関係を考慮した、記号の解釈

そして、先行研究において述べられている具体例を参考に、以下のような例をあげてパースのモデルを解釈した。

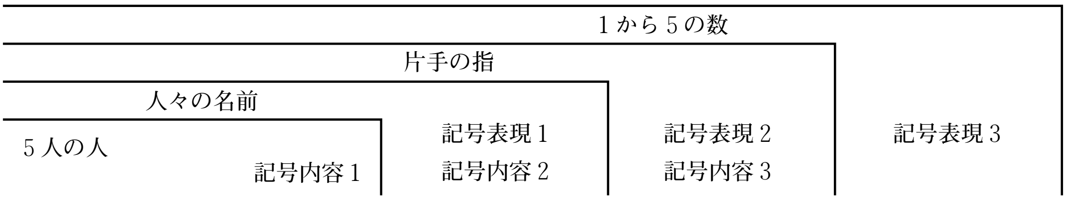
表１　パースの３項モデルの事例

対象物(object)	記号(representamen)	解釈項(interpretant)
ミシン（それ自体）	ミシンの写真	ミシンの機能が分かるような写真を理解すること
「多数は常に正しいのか？」という疑問	［複数のサイン］ 書籍の中での言語的表現 少数民族の宗教に対する視点が差別的傾向を持つ人	「多数は常に正しいとは限らない」という解釈
雨の降る可能性	雨が降る兆候	傘を持参することの決断

パースの３項モデルに対して、それとはまた異なる解釈を行っているのが、ソシュール（Ferdinand de Saussure）である。パースの枠組みが記号論（Semiotics）と呼ばれているのに対し、ソシュールの枠組みは記号学（Semiologie）と呼ばれる。氏は記号（signe）を「意味を担うもの（記号表現）」と「担われる意味（記号内容）」とに類別し、前者をシニフィアン（signifiant）、後者をシニフィエ（signifie）と名付けた。Presmeg（2001）は２項モデル（記号内容（シニフィエ）と記号表現（シニフィアン））に関連して、「これはそれぞれ３項モデルの構成要素となっている。しかし第三の要素（解釈項:interpretant）は、記号の解釈において暗黙的である（p.２）」と述べ、それらを統合した新しいモデルを以下のように提案している。

「記号内容が記号表現よりも優先される」とするソシュールのモデルを逆転して捉えたラカンは、記号内容よりも上位に位置する記号表現が強調されるモデルを考えた。そしてそれは、「記号表現が何らかの形で記号内容の支配下に置かれることが暗黙のうちに了解された場合には容易に認識されえない、記号表現による動的で継続的な生産作用における広遠な自律性（far ranging autonomy）」を意味するものとなった（Whitson, 1994, p.40）。 このような見識に対してPresmeg（2001）は、「前段階の記号の組み合わせにおける記号表現が、新たな記号の組み合わせの記号内容となり、さらにそれは繰り返される」という連鎖の過程を想定した。Presmeg（2001）はこのような連鎖を『記号論的連鎖（Semiotic Chaining）』と命名し、その具体的事例として、Walkerdine（1998）において取り上げられた「幼い娘が飲み物を注ぐ際の母親とのやりとり（pp.129- 138）」を次のように分析し示している。

母親が、飲み物を注ぐべきお客さん(５名)の名前を順番に述べる。それを聞いた娘は、それぞれの名前に対して手の指を１本ずつ曲げる動作で対応させた。



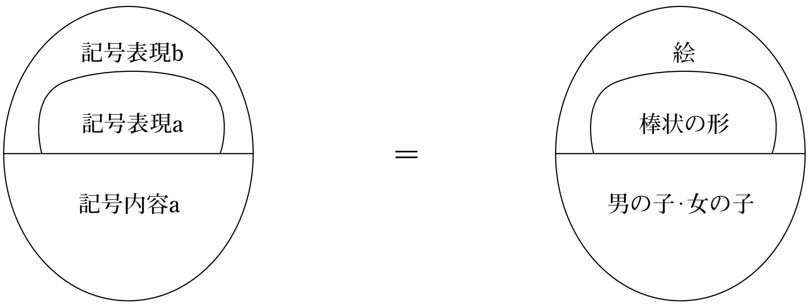
記号表現：意味を担うもの、意味するもの（シニフィアン）、
記号内容：担われる意味、意味されるもの（シニフィエ）、

図１　記号論的連鎖の２項モデル

図１において、５人の人（記号内容１）に対して最初に『名前』が「記号表現１」として登場する。しかしそれはすぐに、新しい記号表現(指)のための記号内容へと変容する。その後、「指」は再び記号内容となり、１から５までの数が新たな記号表現となる。

このような記号論的連鎖の枠組みに対し、Presmeg（2001）では更に新たな知見が導き出されている。Hall（2000）は上述の記号論的連鎖の枠組みを用いて子どもたちの学習活動を分析したが、このような二項モデルを基盤とする枠組みでは示しきれない、より複雑な学習過程が観察された。それは、一つの記号内容に対して複数の記号表現が同定されるものであった。その一例としてPresmeg（2003）は、Hall（2000）に述べられた次のような事例をあげている。

この活動は、子どもたちに男の子と女の子の人数を数えさせるものである。子どもたちは問題場面を絵に描いて考えるとともに、棒状の形を描いた。この場合、棒状に描かれたもの、絵に描かれたもの、の両者とも、同じ記号内容(男の子・女の子)に対する記号表現であると考えることができる。それは以下のような図で示されるものである。



このような事実に対しては、記号論的連鎖の枠組みを単純に採用するのではなく、意味の構成について考慮する必要がある。つまり、記号論的連鎖の２項モデルを拡張し、記号表現への連鎖のみならず、それぞれの連鎖における意味の生成に関わる構成要素を考えるべきなのである。記号論的連鎖における記号表現は、その連鎖における前段階の記号内容を表現している。この記号表現はその意味すること全てを含めて、新たな記号内容となる。このように、新たに構成された記号表現や記号内容は、連鎖のその時点に至るまでの全てを内包するのである。記号表現が数学教育において重要であるのは、このような「内包関係」があるからである。（Presmeg、2003, pp. 6 - 7 ）

このような知見に対しPresmeg（2003）では、記号論的連鎖における記号の再構成という観点から、図２のようなモデルを示した。

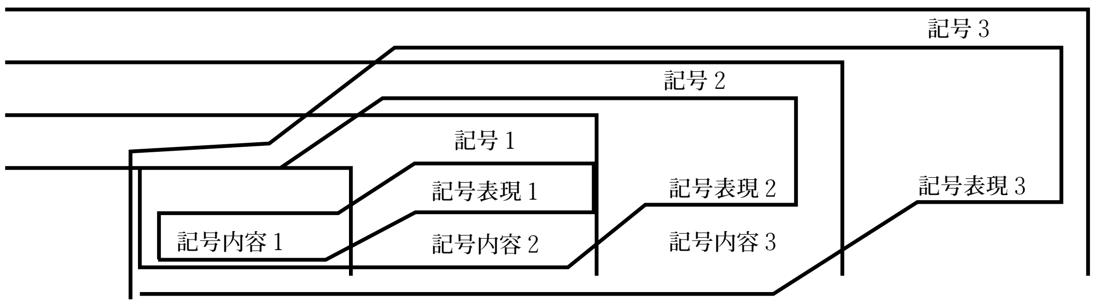


図２　記号論的連鎖における記号の再構成

そして、数珠繋ぎの連鎖（A chain）はこのような入れ子型の様相をきちんと表現しきれていない点において、必ずしも適切なモデルとは言い難いことを指摘するとともに、パースの３項モデルを手がかりに新たに図３に示すモデルを提示した(1)。

O ＝ Object (signified) ： 対象物（記号内容）
R ＝ Representamen (signifier) ： 記号（記号表現）
Ⅰ ＝ Interpretant ： 解釈項

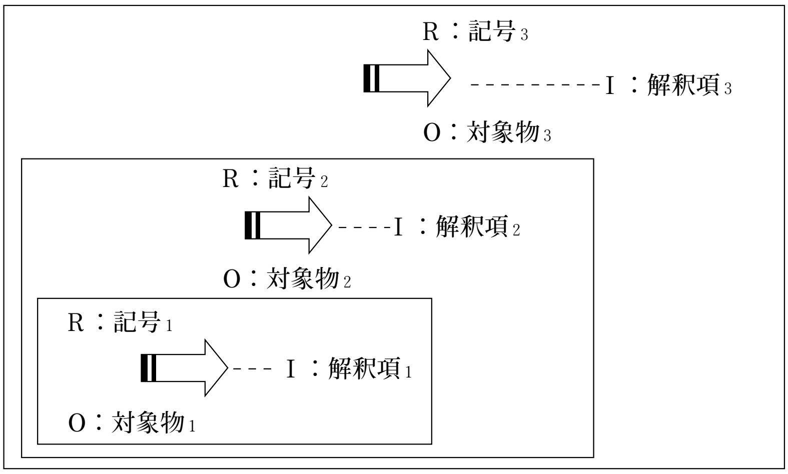


図３　記号論的連鎖の入れ子型モデル

図１に示した事例を図３に当てはめてみると、次のようになる。

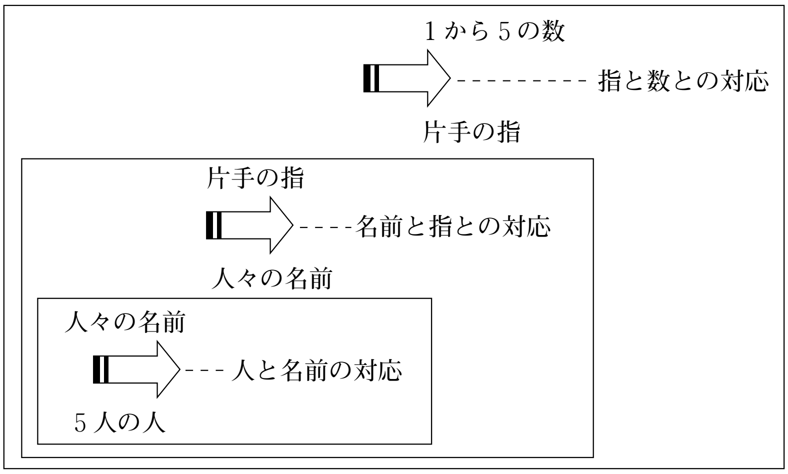


図４　入れ子型モデルの具体的事例

３．記号論的連鎖における「数学化」と比喩の役割

Presmeg（2003）ではさらにいくつかの事例をあげ、記号論的連鎖における「水平的な数学化（Horizontal Mathematization）」と「垂直的な数学化（Vertical Mathematization）」について説明している。ここで、『数学化』とはFreudenthalの示した「数学が有用であるためにはどのように教えるべきか（How to teach mathematics so as to be useful）」という設問に対する解答である。氏は以下のように述べている。

人間が学ばなければならないことは、閉じたシステムとしての数学ではなく、活動としての数学であり、現実を数学化するプロセスであり、可能なら数学すら数学化するプロセスである。(Freudenthal,1968,p.７)

Freudenthalの示した「数学化」を更に精緻に捉えたのがTreffersである。Treffers（1987）は数学化を「未知

の規則や関連·構造について、知識·技能を用いて構造化·組織化する活動（p.247）」と規定した上で、それを更に「水平的な数学化(Horizontal Mathematization)」と「垂直的な数学化（Vertical Mathematization）」の２つに区分している。そして前者を「問題場面を数学の文脈へと転換すること」、後者を「数学的体系内での手続き」とし、以下のように特徴づけた。

水平的な成分において、数学への道筋はモデルの形成·図式化·記号化を通して開かれる。一方で垂直的な成分は、数学の処理過程や考察中の問題領域構造におけるレベルの向上と関わりを持つ。しかし、水平的な成分と垂直的な成分との間のこのような区分は些か理論的過ぎ、それらは相互に関係のあるものである点を我々は認めざるを得ない。(Treffers,1987,p.247)

このような異なる二種類の数学化プロセスに関連して、岩崎（1996）は数学的理解の水平的な成分と垂直的な成分について言及した。そして前者を「物理的世界を基盤とする数学化」として、後者を「活動に基づく数学化」としてそれぞれ特長づけている（p.12）。このような岩崎（1996）による特徴づけとTreffers（1987）によるそれとを比較すると表２のようになろう。

表２　水平的／垂直的な数学化に関するTreffers(1987)と岩崎(1996)の見解の比較

	Treffers(１９８７)	岩崎(１９９６)
水平的な数学化	・問題場面を数学の文脈へと転換すること ・数学への道筋はモデルの形成·図式化·記号化を通して開かれる。	・物理的世界を基盤とする数学化
垂直的な数学化	・数学的体系内での手続き ・数学の処理過程や考察中の問題領域構造におけるレベルの向上と関わりを持つ。	・活動に基づく数学化

両者の見解はほぼ一致していることが分かる。即ち、水平的な数学化とは「問題場面を数学の文脈へと転換すること」であり、それは物理的世界を基盤とし、物理的世界における異なる対象を結びつけることでもある。そしてそのための手続きとして「モデルの形成·図式化·記号化」がなされ、水平的な数学化は推移していく。

一方、垂直的な数学化とは「数学的体系内での手続き」であり、数学の活動（数学的処理や考察）による変化を伴う対象間の関係に基づく。その結果、「問題領域構造におけるレベル」が向上することで、垂直的な数学化は推移していく。

ここで、岩崎（1996）はさらに次のように指摘を続けている。

こうした二分法は、Piagetの経験的抽象と反省的抽象という抽象の区分にも、そして比喩に関連させれば、Saussureの連合関係と統辞関係という言語使用の基本構造にも、深層で通じていると考えられる。（岩崎,1996,p.12）

そして楠見（1991）などを拠り所にして、『類似性に基づき、知識構造における異なるカテゴリーの対象を結び付け、カテゴリーを組み替えることによって成立する比喩』として隠喩（metaphor）を、『隣接性に基づき、カテゴリーを組み替えずに、カテゴリー内の上位ー下位関係や、場面内の時間的·空間的隣接関係に依拠する比喩』として換喩（metonymy）を、それぞれ規定している（p.13）。

水平的な数学化は「問題場面を数学の文脈へと転換すること」である。物理的世界における異なる対象を結びつけるものであり、カテゴリーを組み替える（異なる文脈を結びつける）ことによって成立する。そして対象（文脈）間の『類似性』がその結びつきの拠り所となる。従って、水平的な数学化は「対象間の類似性」に基づく転義がなされるものである点から『隠喩（metaphor）』的なつながりを持つものと捉えることができる。

一方、垂直的な数学化とは「数学的体系内での手続き」である。数学的処理や考察といった「同一の文脈内における」数学の活動により生じる変化を伴う対象間の関係に基づき、問題領域構造におけるレベルの向上を伴うも

のである。「カテゴリーを組み替えずに、カテゴリー内の上位－下位関係に依拠する」点において、対象間の『隣接性』がその結びつきの拠り所となる。従って、垂直的な数学化は「対象間の隣接性」に基づく転義がなされるものである点から『換喩（metonymy)』的なつながりを持つものと捉えることができよう。

別の言い方をするなら、「類似性に基づく転義（隠喩)」では、対象どうしの間に類似性が存在すること、つまりその対象どうしは本質的に同質のものであることが想定されるのに対し、「隣接性に基づく転義（換喩)」では、対象どうしが質的に異なるものであることに留意したい。これを数学の文脈に即して言い直すのであれば、内包される数学に注目した時に、水平的な数学化ではそれぞれに内包される数学の質は基本的に同じものであるのに対して、垂直的な数学化においては内包される数学が変容するものであると言える。

以上をまとまると表３のようになる。

表３　水平的／垂直的な数学化における比喩

水平的な数学化 問題場面を数学の文脈へと 転換すること	対象間の類似性に基づく転義	隠喩的(metaphor)
	対象どうしの本質は同じ	
	内包する数学の質は同じ	
垂直的な数学化 数学的体系内での 手続き	対象間の隣接性に基づく転義	換喩的(metonymy)
	対象どうしが質的に異なる	
	内包する数学の質が変容	

ところで、Presmeg（2001）は記号論的連鎖のプロセスを次のように説明している。

> このような定式化により、前段階の記号における記号表現は新たな段階における記号の記号内容となり、それが繰り返しなされることとなる。ここで記号表現は記号内容に対して換喩的関係にある。また新たな記号内容は、前段階の記号表現の具象化により構築される。(p. 3)

この指摘は、記号論的連鎖において、それぞれの記号間に「比喩的関係」並びに「具象化」のプロセスが存在することを示すものと解釈できる。もっとも、記号内容から記号表現への比喩的関係を、Presmeg（2001）では「換喩」と限定されている点は問題である。ここでは、なされる数学化が水平的なものであるのか垂直的なものであるのかに因って、その比喩が「隠喩」となるか「換喩」となるかが異なると解釈すべきである [2]。Presmeg（2001）による記号論的連鎖のプロセスにおける記号間の関係についての記述は、図５および図６のように表すことができよう。

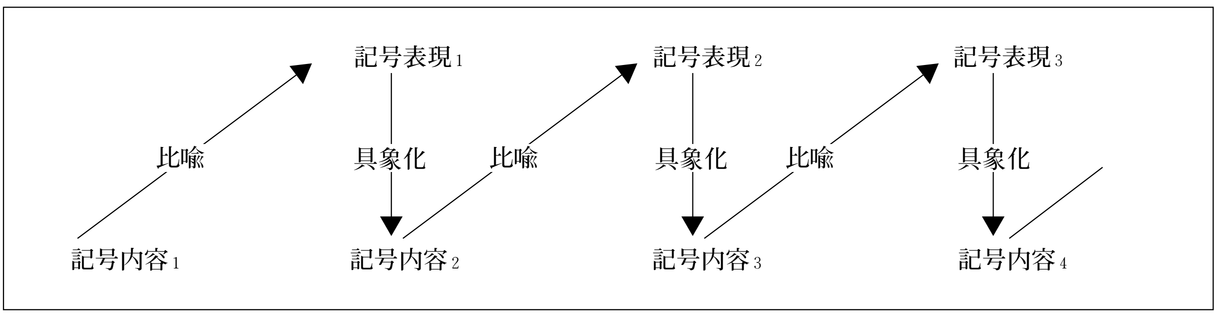


図５　記号論的連鎖における記号間の関係（２項モデル）

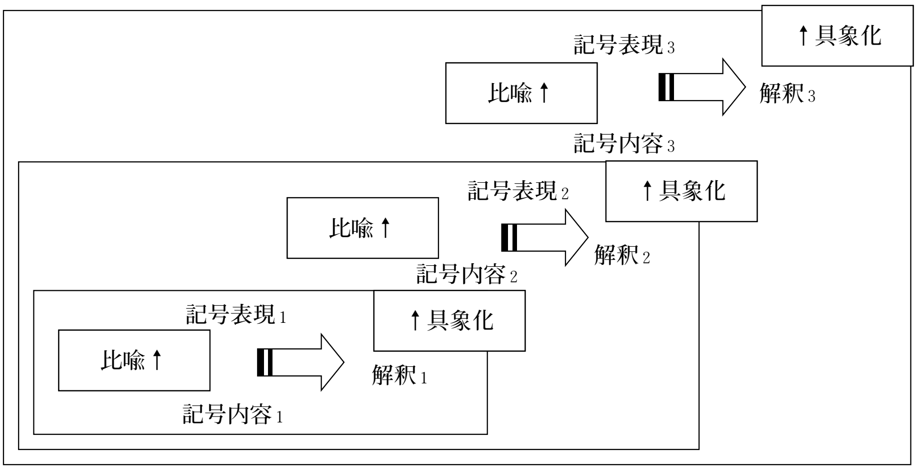


図６　記号論的連鎖における記号間の関係（入れ子型モデル）

例えば、図１に示した「幼い娘が飲み物を注ぐ際の母親とのやりとり」の事例を図６に基づいて解釈すると以下のようになる。

最初に、記号内容$_1$（５人の人）が「人と名前の対応」という解釈を介して、記号表現$_1$（人々の名前)へと結びついている。ここでの連鎖は、「人」と「名前」という「異なるカテゴリー」間を結びつけることでなされている。カテゴリーを組み替える（異なる文脈を結びつける）ことによる連鎖は、対象（文脈）間の類似性がその結びつきの拠り所となる。従ってここでの連鎖は、「対象間の類似性に基づく転義」がなされたと見なすことができ、『隠喩的なつながり』をもつ数学化、すなわち『水平的な数学化』がなされたものと判断することができる。

記号表現$_1$（人々の名前）は、解釈$_1$（人と名前の対応）を介して具象化され、新たな記号内容（記号内容$_2$：人々の名前）として更なる連鎖を続ける。

次の段階での連鎖では、記号内容$_2$（人々の名前）が「名前と指との対応」という解釈を介して、記号表現$_2$（片手の指）へと結びついている。これも同様に異なるカテゴリー間を結びつけ、カテゴリーを組み替える（異なる文脈を結びつける）ことによってなされる連鎖である。従ってここでの連鎖も、「対象間の類似性に基づく転義」がなされたと見なすことができ、『水平的な数学化』がなされたものと判断される。

再び、記号表現は解釈を介して具象化され、新たな記号内容（記号内容$_3$：片手の指）へと連鎖を続ける。

更なる連鎖は、記号内容$_3$（片手の指）が「指と数との対応」という解釈を介して、記号表現$_3$（１から５の数）へと結びつく。ここでの連鎖は、これまでのものとは若干様相を異にする。「人」「名前」「指」と異なるカテゴリーの対象を結びつける「水平的な数学化」により展開されてきた連鎖が、今度は『同じ指』を「単なる指」として見るか、それとも「数」としてみるか、という異なる連鎖により展開されている。つまり同一文脈内における、数学の活動による変化を伴う対象間の関係に基づき、問題領域構造におけるレベルの向上を伴う連鎖がなされているものと判断できる。そしてここでの連鎖は、対象間の類似性ではなく『隣接性』に基づく転義がなされたものと見なすことができる。 つまりここでの連鎖は、『換喩的なつながり』をもつ数学化、すなわち『垂直的な数学化』がなされたものと判断することができるのである。

これら記号間の関係を図６に倣い図示すると次のようになる。

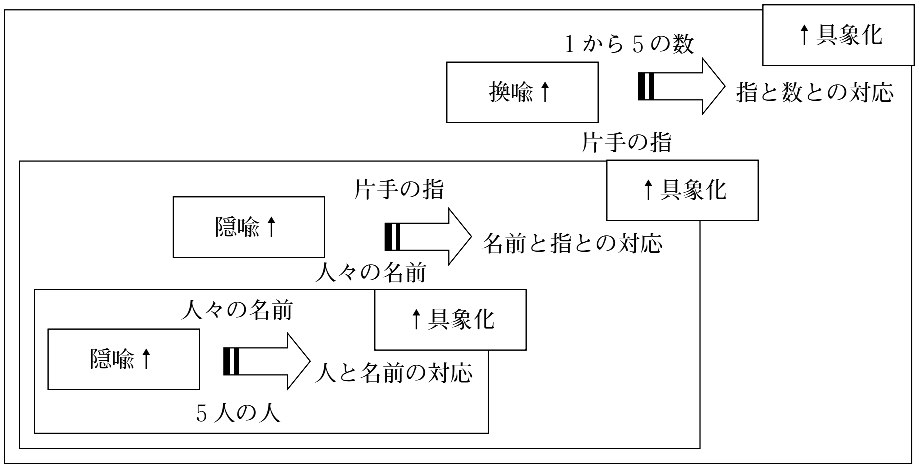


図7　記号論的連鎖における記号間の関係（Walkerdine(１９８８)の事例）

４．Wittmannの教授単元

ドイツで1987年に立ち上げられた数学教育改革プロジェクト「mathe200」を主催するWittmannは、最近の著書で「mathe 2000」プロジェクトの４人の始祖（vier Erzvater）として、John Dewey, Johannes Kuhnel, Jean Piaget, Hans Freudenthalをあげている（Muller, Steinbring und Wittmann, 2002, s. 3）。数学に関する始祖はFreudenthalであり、WittmannもまたFreudenthalと同様に『数学化』を一つの手がかりとして教授学的実践を進めている。そして、水平的な数学化と垂直的な数学化の統合を図るべく設計科学を導入し、教授単元（Teaching Units, Unterrichtsbeispiel）という枠を与えた。

氏の数学観は次のように示されている。

（数学教育学の）核心における作業は、人間的認知の根源的でかつ自然な要素としての、数学的活動から始まらなければならない。さらにこの作業では、「数学」は広汎な社会現象と考えられねばならない。私はこのもっとも広義の数学的作業を大文字でMATHEMATICSと書くことを提案したい。（中略）専門的数学も、より広い科学的・社会的活動にその多くの発想の源を負うているのであって、決して「数学（mathematics）」の専売だと考えるわけにはいかない。（Wittmann,1995, pp.358-359）

そして氏は、数学教育を「設計科学（Design Science）」と呼び、学習環境デザインの原理を次のように述べている。（Wittmann,2004,pp. 4 - 5）

（1）数学は、相互に研究され、形作られ、（再）発明されることのできる（応用可能な）パターンの科学とみなされている。

（2）学習は、能動的で、社会的に調停された知識構成の過程だと理解される。

（3）教師の主要な役割は、教授学習過程を組織し、子どもに寄り添い、適切なフィードバックを与える点に見られる。

さらに「教授単元」について以下のように述べている。

・教授単元、ひとそろいの一貫した教授単元、さらにはカリキュラムのデザインは、MATHEMATICSに起源をもたねばならない　（Wittmann,1995,p.359）。

・数学教育の研究における最も重要な成果は、基礎的な理論的原理に基づきながら、慎重にデザインされ、実験的にも検討された、教授単元の集まりである（Wittmann,1995,p.369）。

そして教授単元の設計原理を次のようにまとめている。

1）それは数学における学習指導の中心的な目的・内容・原理をある水準において明示している。

2）それは上記の水準を越える意味ある数学的な内容やプロセスや方法と結びついており、豊かな数学的活動の源である。

3）それは柔軟な取り扱いが可能であり、個々のクラスの特殊な条件に対応できる。

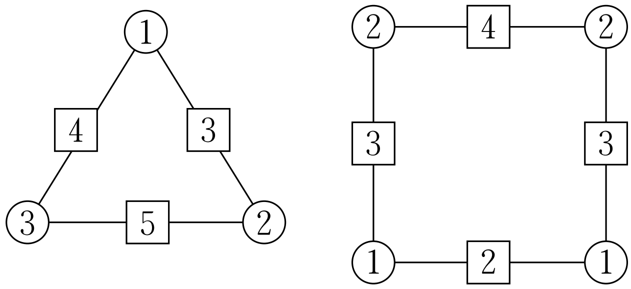
4）それは数学教授の数学的・心理学的・教授学的側面を統合し、実証のための豊かなフィールドを提供する。　（Wittmann,2001,p. 2）

教授単元の具体例の一つに「アリスモゴン（Arithmogons）」がある。（Wittmann,1984,p.31）

教授単元　アリスモゴン

目的：加法・減法。さらにこれらの混合計算に関する演算の研究。
探究と発見。

題材：三角アリスモゴン・四角アリスモゴン（ワークシートの使用。下図参照）



問題：いくつかの頂点や辺上の数が与えられている。その他の数を求めよ。

背景：頂点や辺上の数の一次独立性。方程式の体系に基づく組織的解法。
計算の原理。

教授単元「アリスモゴン」は、単にその設計原理を満たすのみならず、子どもたちの興味･関心あるいは数学的能力に応じて、多様な数学的活動の発展への道を兼ね備えている。例えば、三角アリスモゴンの展開を、低学年児童の「おはじきを置いたり、移したりする」活動と絡めれば、図８のようになる（ビットマン et al., 2004, p.131)。そこには実質的に方程式を解く活動が込められているし（２から４）、作ろうと思えば不定の場合も不能の場合も設定できる。また１のケースをプロトタイプとし、３つの領域のおはじきに変化を加えていけば、その和はどのように変化するのか（５から８）、子どもたちの意識はその変化に向かうであろう。さらに学年を上げれば、その本質を変えることなく、おはじきや整数を、分数や文字にまで発展させられることはいうまでもない（９から12)。

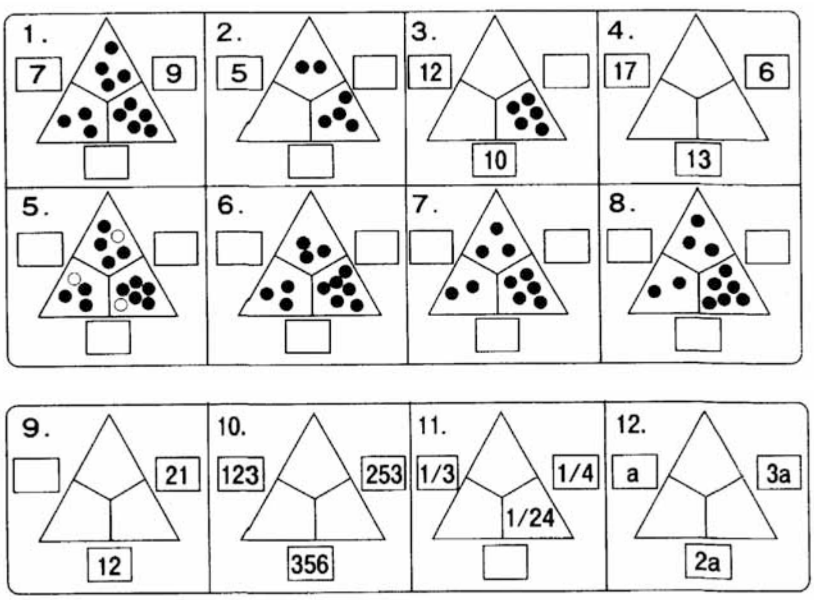


図８. 三角アリスモゴン

やや抽象度を上げてこの種の数学的活動をみていくと、そこに次のような数学が現れてくる。

> 三角arithmogonの背後にある数学はきわめて高度である。内側の３つの数は１つのベクトルを作り、外側の３つの数も同様にみられる。このようにみれば上記の操作は、実数上の３次元ベクトル空間からそれ自身への一次変換を定義する。対応する行列は正規である。この構造をｎ-gonに一般化できることは、McIntoshとQuadling（1975）によって示されている。
> （Wittmann, 1995, p.367）

また別の事例として、教授単元「星形多角形（Star Patterns)」がある。この教授単元のねらいは、円周上の等分点を線分で結んだときにできる図形と点の結び方との間に成り立つ関係を、特に星形に注目して探求し、法則を見出して一般化することにある。

教授単元　星形多角形

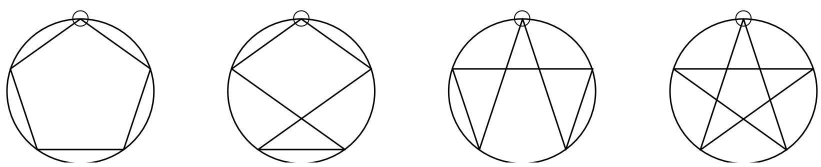
目的：幾何的諸性質の代数記号による考察。具体的には、幾何図形「星形」に内在する幾何的性質を代数的な記号列に置き換え、記号列の考察によって、幾何的性質を明確にする。

題材：星形多角形

問題：

（１）円周上の２等分点、３等分点、４等分点を一筆がきの要領で線分で結ぶと、どんな図形ができるだろう。

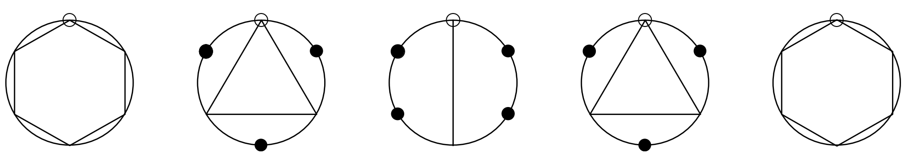
（２）円周上の５等分点を結んでできる図形をかき、それぞれに名前を付けてみよう。



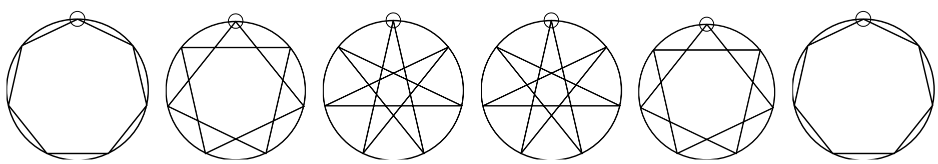
（３）（(２）でかいた図形のうち）星形に注目してみよう。どのようなかき方をしたときにその図形ができましたか。

（４）他にも星形をかいてみよう。円周上の６等分点、７等分点、…を線分で結び、星形をかいてみよう。

６・１　　６・２　　６・３　　６・４　　６・５



７・１　　７・２　　７・３　　７・４　　７・５　　７・６



（星形のかき方の約束として、一筆がき、線分で結ぶ、○の点からスタートして（　）個目ごとの点を結び、スタートの点にもどるまで続けることを確認。また描画された星形の名付け方を決める。）

（5）星形はどんなときにかける（または、かけない）のだろう。またなぜそうなるのか、理由もあわせて考えてみよう。

背景：円周上のｎ等分点を一筆がきの要領でｄ個めごとに線分で結ぶとき、次の関係が成り立つ。

① ｎとｄが互いに素のとき、一筆ですべての点を通るような星形多角形がかける。

② ｎがｄの倍数のときは、正n/d角形がかける。

③ g=GCD（n,d）とするとき、ｎとｄが既約でない場合にできる図形は、円周上のn/g等分点をd/ｇ個目ごとに結んだ星形多角形と同じになる。

ｎとｄが既約であるときにできる星ｎ・ｄは、正角形の概念を拡張して、正n/d角形という新たな正多角形が生まれる。また、シンメトリーの視点からは、回転と鏡映からなる対称変換群を導くこともできる。さらに、３次元の星形多面体への発展的展開も可能である。

５．教授単元の批判的考察

前節において、Wittmannの教授単元の具体例について検討を進めてきた。教授単元は、数学的活動を組織し設計する卓越した手法であり、その有効性はmathe2000の実践を通して実証されてきた。しかし教授単元には、教材を目的・題材・問題・背景に分節する項目はあっても、学習指導過程を分節する項目は用意されていない。子どもに内在する数学が、状況のMATHEMATICSとどのように共振し、知識としてあるいは見方・考え方として、どのようにクラスの中で共有されるかについて、予見し分析するシステムが教授単元に具備されていないのである。

そこで、本節では、Presmeg（2003）において示された記号論的連鎖の入れ子型モデルを援用し、教授単元を記号論的連鎖の視点から捉えることで、「学習指導過程」の分節を試みることとする。

アリスモゴンの学習指導過程を記号論的連鎖の枠組みを用いて表すと図９のようになる。

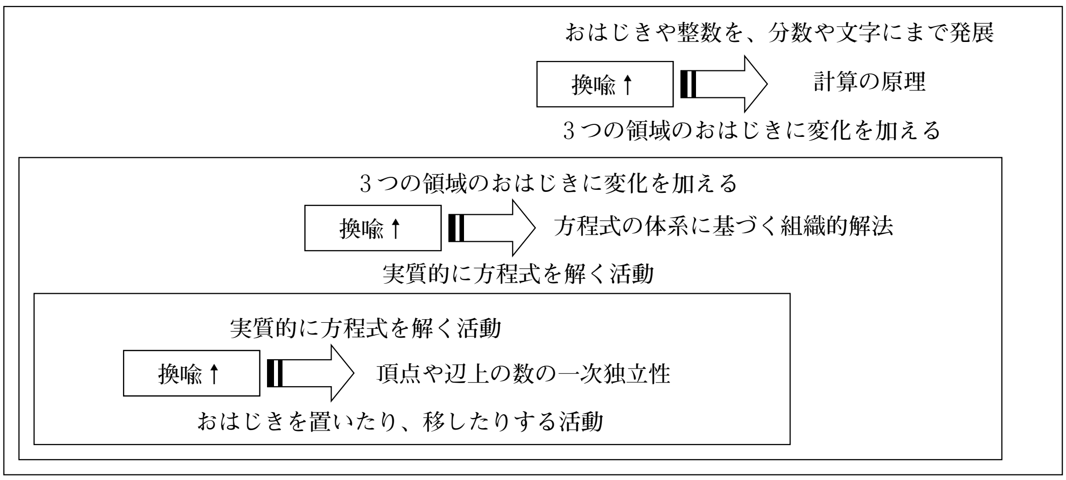


図９　教授単元「アリスモゴン」の記号論的連鎖

一方、星形多角形の学習指導過程を記号論的連鎖の枠組みを用いて表すと図10のようになる。

以上のことから、以下の諸点を見いだすことができる。第一に、記号論的連鎖の枠組みを用いて示すことで、教授単元の学習指導過程を分節することができる点である。特に、記号内容から記号表現へ至る比喩を同定することで、そこでの「数学化」が水平的なものであるか、垂直的なものであるかを同定することができる。第二として、学習指導過程において存在する連鎖が換喩的なつながりであることが、教授単元を本質的な学習場として機能させる点である。換喩的なつながりによる連鎖、即ち「垂直的な数学化」がなされているかどうかを記号論的連鎖の枠組みを用いて分析することで、教授単元の各学習指導過程における「数学化」の本性を見いだすことができる。更に第三として、垂直的な数学化がなされる場合、即ち換喩的なつながりによる連鎖が生じている場合には、その「解釈項」は教授単元設計原理の『背景』が相当する点である。

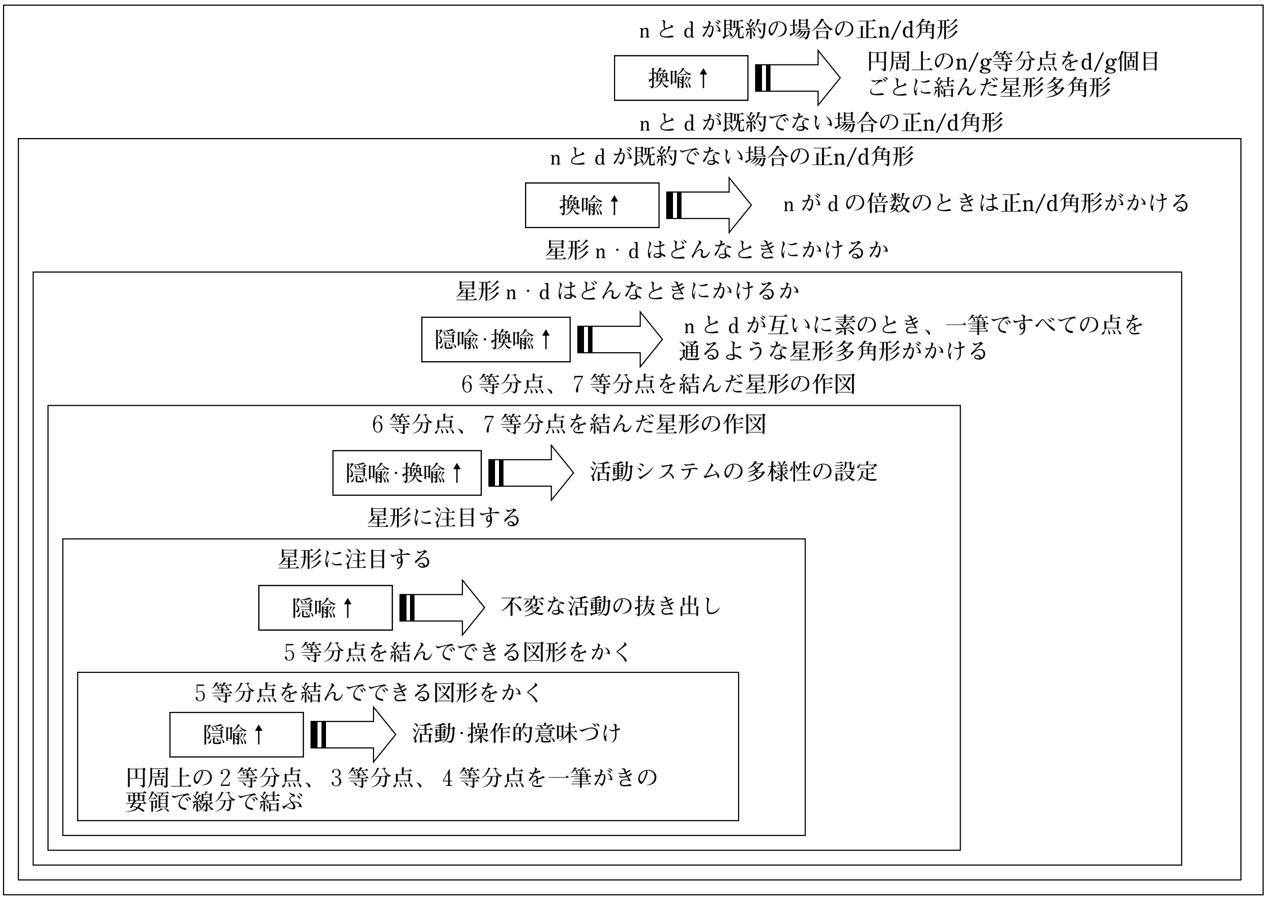


図10　教授単元「星形多角形」の記号論的連鎖

6．おわりに

本稿では、Presmeg（1998）で提唱された「記号論的連鎖」の枠組みを「数学化」と「比喩」の観点から精緻化するとともに、Witmann（1984）の提起する「教授単元」へと援用することで、教授単元における「数学化」に関する示唆を得た。その結果、以下の諸点が明らかとなった。

・教授単元における「学習指導過程」を分節するシステムとして、記号論的連鎖を用いることの有効性が示された。

・換喩的なつながり（垂直的な数学化）が促される連鎖により、教授単元は本質的学習場としての機能を果たすことができる。

・記号論的連鎖の「解釈項」は、その連鎖が換喩的なつながり(垂直的な数学化)においてなされる場合には、教授単元設計原理の「背景」がそれに相当する。

今後の課題として、更なる事例の分析と、分析結果をフィードバックすることによる枠組みの精緻化があげられる。

附記

本稿は、文部科学省科学研究費補助金「特定領域研究」新世紀型理数科系教育の展開研究A01班　教育内容と学習の適時性に関する研究「算数を数学に接続する一般化に基づく教授単元の計画・実施・評価に関する開発研究（代表：岩崎秀樹）」の一部として行われたもので、全国数学教育学会第21回研究発表会（平成15年1月29日～30日、於：埼玉大学）における報告に加筆修正したものである。

注

（1）Presmeg教授は、記号論的連鎖の2項モデルと入れ子型モデルについて、それぞれのモデルによさがあり、用途に応じて使い分けるべきであるとの立場をとっておられる。2項モデルは連鎖の様相、つまり記号のつながりの様子が分かりやすい。一方、入れ子型モデルは意味の構成の様相を捉えるのに適している。

（2）図10に示した「星形多角形」の記号論的連鎖では、「換喩的な隠喩」「隠喩的な換喩」などが混在している。

文献

岩崎秀樹（1996）「数学教育における比喩の意義（Ⅱ）ー分数の理解の比喩性ー」『全国数学教育学会誌　数学教育学研究』第2巻,pp. 9 -16

Freudenthal,H.（1968）, "Why to teach mathematics so as to be useful?", *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 1 , pp. 3 - 8 .

Hall, M.（2000） *Bridging the Gap Between Everyday and Classroom Mathematics: An Investigation of Two Teachers' Internal Use of Semiotic Chains*. Unpublished Ph.D. Dissertation, The Florida State University

Müller,G.N., Steinbring,H. und Wittmann,E.（2002）, *Ein Konzept zur Bildungsreform aus fachdidaktischer Sicht*, Universitat Dormund Fachbereich Mathematik Projekt Mathe 2000.

Ninomiya, H.：*Note-Taking and Metacognition in Learning Mathematics: An Analysis in Terms of Semiotic Chaining and Meta-Representation*, The 10th International Congress on Mathematical Education, Topic Study Group 25 Language and communication in mathematics education, Semiotic aspects of mathematics learning, （ http://www.icme-organisers.dk/tsg25/subgroups/ninomiya.doc）

Peirce, C. S. （1992）, *The Essential Peirce*. Volume 1 & 2 , edited by the Peirce Edition Project. Bloomington: Indiana University Press.

Presmeg, N.（1998）,A Semiotic Analysis of Students' Own Cultural Mathematics, *Proceeding of the 22nd Conference of the International Group for the Psycholopy of Mathematics Education*, Volume 1 , pp.136-151

Presmeg, N. （2001）, *Progressive Mathematizing Using Semiotic Chaining*, The 25th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Discussion Group （DG 3 , Semiotics in Mathematics Education: http://www.math.uncc.edu/~sae/）.

Presmeg, N.（2003）,*Semiotics As A Theoretical Framework for Linking Mathematics In and Out of School: Significance of Semiotics for Teachers of Mathematics,* Handout for the International Seminar: Meeting in Hiroshima Univ. with Prof. Dr. Presmeg (Sept. 25-27, 2003)

Treffers,A.（1987）, *Three Dimensions:A Model of Goal and Theroy Description in Mathematics Instruction－The Wiskobas Project*, Reidel.

Walkerdine, V.（1988）, *The Mastery of Reason: Cognitive Developments and the Production of Rationality*, New York: Routledge.

Wittmann,E.,（1984）, "Teaching Units as the Integrating Core of Mathematics Education", *Educational Studies in Mathematics*, Vol.15, pp.25-36.

Wittmann,E.,（1995）, "Mathematics Education as a Design Science", *Educational Studies in Mathematics*, Vol.29, pp.355-374.

Wittmann,E.（2001），"Developing Mathematics Education in a Systemic Process", *Educational Studies in Mathematics* vol. 4 48, pp. 1 -20.

Wittmann,E.,（2004）,Empirical Research Centred Around Substantial Learning Environments,『第37回数学教育論文発表会論文集』pp. 1 -14

Whitson, J. A. （1994）, Elements of a Semiotic Framework for Understanding Situated and Conceptual Learning, *Proceedings of the 16th Annual Meeting of PME-NA*, Vol. 1 , pp. 35-50.